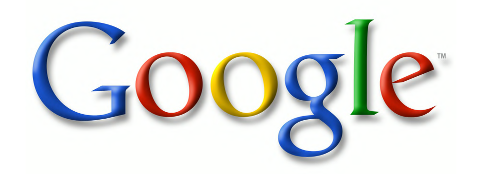



Stanford University Libraries
3 6105 000 993 167

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

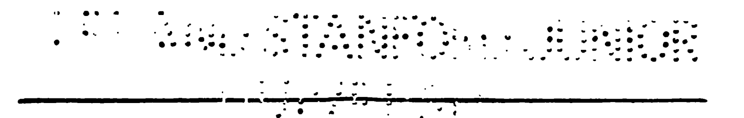
In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



Sieben und dreifsigster Band.

In vier Heften.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Berlin, 1848.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Dreiecken und Vierecken handeln, deren Stücke sich durch rationale oder ganze Zahlen ausdrücken lassen. Mit diesen Sätzen haben wir es also hier hauptsächlich zu thun; weshalb wir dieselben, so wie sie in der englischen Übersetzung lauten, wörtlich hersetzen.

33. The sum of the squares of two unalike quantities are the sides of an isosceles triangle; twice the product of the same two quantities is the perpendicular, and twice the difference of their squares is the base.

34. The square of an assumed quantity being twice set down and divided by two other assumed quantities and the quotients being severally added to the quantity first put, the moieties of the sums are the sides of a scalene triangle: from the same quotients the two assumed quantities being subtracted, the sum of the moieties of the differences is the base.

35. The square of the side assumed at pleasure, being divided and then lessened by an assumed quantity, the half of the remainder is the upright of an oblong tetragon; and this, added to the same assumed quantity, is the diagonal.

36. Let the diagonals of an oblong be the flanks of a tetragon, having two equal sides. The square of the side of the oblong, being divided by an assumed quantity, and then lessened by it, and divided by two, the quotient increased by the upright of the oblong, is the base, and lessened by it, is the summit.

37. The three equal sides of a tetragon, that has three sides equal, are the squares of the diagonal (of to oblong). The fourth is found by subtracting the square of the upright from thrice the square of the (oblong's) side. If it be greatest, it is the base; if least, it is the summit.

38. The uprights and sides of two rectangular triangles, reciprocally multiplied by the diagonals, are four dissimmilar sides of a trapezium. The greatest is the base; the least is the summit, and the two others are the flanks.

Wir übertragen diese Sätze zunächst in die gewöhnliche mathematische Ausdrucksweise; wobei wir zugleich alles im Texte Weggelassene, was nothwendig zur Sache gehört, vervollständigen.

33. Setzt man jede der beiden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks gleich a^2+b^2, und die Grundlinie gleich $2(a^2-b^2)$, wo a und b beliebige rationale Zahlen sind, so ist auch die Höhe und der Inhalt dieses Dreiecks rational.

34. Wenn die drei Seiten eines schiefwinkligen Dreiecks folgende Werthe haben: $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}+c\right)$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-c\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}-c\right)$, wo a, b und c beliebige rationale Zahlen sind, so sind die Höhen und der Inhalt desselben ebenfalls rational.

35. Wenn eine Seite eines Rechtecks gleich a, die andere gleich $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)$ genommen wird, wo a und b rationale Zahlen sind, so ist auch die Diagonal dieses Rechtecks rational.

36. Nimmt man von den zwei parallelen Seiten eines Paralleltrapezes die eine gleich $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}-c\right)$, die andere gleich $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}-c\right)$, und jede der beiden andern einander gleichen, nicht parallelen Seiten gleich $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}+c\right)$: so erhält man, wenn a, b, c rational sind, ein Paralleltrapez, dessen Seiten, Höhe, Diagonalen und Inhalt rational sind.

37. Ein Paralleltrapez mit drei gleichen Seiten, dessen Seiten, Höhe, Inhalt und beide (einander gleiche) Diagonalen rational sind, erhält man, wenn jede der drei gleichen Seiten gleich $(a^2+b^2)^2$ und die vierte Seite gleich $3(a^2-b^2)^2-4a^2b^2$ angenommen wird; wo a und b rationale Gröfsen bezeichnen.

38. Wenn die vier Seiten eines Vierecks, welches sich einem Kreise einschreiben läfst, die Werthe $(a^2+b^2)(c^2-d^2)$, $(a^2-b^2)(c^2+d^2)$, $2cd(a^2+b^2)$ und $2ab(c^2+d^2)$ haben, wo a, b, c und d beliebige rationale Zahlen bezeichnen, so sind auch die beiden Diagonalen, die Abschnitte derselben, so wie der Inhalt des Vierecks, und der Durchmesser des umschriebenen Kreises rational.

Alle diese Sätze lassen sich auf die einfachste Weise durch blofse Zusammensetzung rechtwinkliger pythagoräischer Dreiecke finden, deren Bildung, auf der Lösung der arithmetischen Aufgabe beruhend: zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist, den Indern vollständig bekannt war. Wir wollen nun von den einzelnen Sätzen zeigen, wie sie alle fast unmittelbar aus dieser Quelle fliefsen.

Zur Bildung des gleichschenkligen Dreiecks mit rationalen Seiten und Inhalt, welche im Satze 33. gelehrt wird, werden nur zwei congruente pythagoräische rechtwinklige Dreiecke so an einander gesetzt, dafs zwei an einanderliegende gleiche Katheten die Höhe, die beiden andern die Grundlinie bilden.

Die Bildung des schiefwinkligen Dreiecks mit rationalen Seiten und Inhalt, im Satze 34., geschieht durch die Zusammensetzung zweier verschiedener pythagoräischer rechtwinkliger Dreiecke, wenn in beiden eine Kathete gleich gemacht worden ist.

Das Rechteck im Satze 35. entsteht durch Verdoppelung eines pythagoräischen Dreiecks.

Das Paralleltrapez mit zwei einander gleichen, nicht parallelen Seiten wird gebildet, wenn man zunächst die beiden congruenten pythagoräischen Dreiecke BED und BGD (Taf. I. Fig. 1.) zu einem Rechtecke $EBGD$ zusammensetzt, dessen Seiten und Diagonalen rational sind. Setzt man darauf ein zweites pythagoräisches Dreieck BEA, dessen Kathete einer Rechtecksseite gleich gemacht ist, an das Rechteck an, und schneidet auf der andern Seite das diesem congruente Dreieck CGD von dem Rechtecke ab, so erhält man das Paralleltrapez $ABCD$ mit rationalen Seiten, Diagonalen, Höhe und Inhalt. Ist $BE = a$, $DE = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} - b\right)$, so wird $BD = AC = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + b\right)$; nimmt man ferner $AE = GC = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c} - c\right)$, so wird $AB = CD = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c} + c\right)$, also $AD = \left(\frac{a^2}{b} - b\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c} - c\right)$ und $BC = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} - b\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c} - c\right)$; wie der Satz es vorschreibt.

Das in dem folgenden Satze 37. construirte Paralleltrapez mit drei gleichen Seiten erhält man auf folgende Weise. Man setzt zunächst die beiden congruenten rechtwinkligen pythagoräischen Dreiecke AEB und AED (Fig. 2.) zu einem gleichschenkligen Dreiecke ABD zusammen, dessen Seiten und Höhen rational sind. Es wird also dadurch auch die Höhe BF rational, und eben so werden es die beiden Abschnitte AF und FD der Grundlinie AD. Verbindet man nun das dem Dreiecke BFD congruente Dreieck BGD mit diesem zu einem Rechtecke $BFDG$ und schneidet davon das Dreieck CGD ab, welches mit AFB congruent ist, so hat man das verlangte Paralleltrapez $ABCD$. Ist $AE = 2ab$, $BE = DE = a^2 - b^2$, so ist $BA = AD = DC = a^2 + b^2$; ferner ist in dem Dreiecke ABD: $AE.BD = BF.AD$, also $BF = \frac{AE.BD}{AD} = \frac{4ab(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$. Hieraus folgt nach den pythagoräischen Lehrsatze $DF = \frac{2(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}$, also $AF = CG = a^2+b^2 - \frac{2(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}$ und hieraus $DF - AF = \frac{4(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} - a^2 - b^2 = BC$ oder $BC = \frac{3(a^2-b^2)^2 - 4a^2b^2}{a^2+b^2}$. Multiplicirt man noch alle diese Stücke mit a^2+b^2, so hat man die im Satze angegebene Regel.

Der nun folgende letzte Satz 38. ist der merkwürdigste der sechs Sätze des ***Brahmegupta***, weil er ein etwas allgemeineres Viereck zu bilden lehrt, dessen Stücke rational sind. Setzt man zunächst (Fig. 3.) die beiden rechtwinkligen pythagoräischen Dreiecke AEB und CEB mit der in beiden gleich gemachten Kathete BE an einander, sodann an CE das Dreieck CED, welches dem Dreieck AEB durch passende Vervielfältigung und Theilung seiner drei Seiten auf die Weise ähnlich gemacht ist, dafs die der BE entsprechenden Kathete gleich CE ist, und setzt eben so das Dreieck AED, welches dem Dreiecke BEC auf die Weise ähnlich gemacht ist, dafs die der Kathete BE entsprechende Kathete desselben gleich AE ist, an AE an: so ist auch die Kathete DE in diesen beiden neuen Dreiecken dieselbe, und man erhält das verlangte Viereck $ABCD$. Der Punct D kann auch einfach so bestimmt werden, dafs man um das Dreieck ABC einen Kreis beschreibt und die Höhe des Dreiecks AE verlängert, bis sie die Peripherie des Kreises in D schneidet. Nimmt man die beiden rechtwinkligen pythagoräischen Dreiecke, deren Seiten $2ab$, a^2-b^2, a^2+b^2 und $2cd$, c^2-d^2, c^2+d^2 sind, und multiplicirt, um zwei Katheten in beiden gleich zu machen, die drei Seiten des ersten mit $2cd$, die des zweiten mit $2ab$, so erhält man, nachdem dieselben zu dem Dreiecke ABC zusammengesetzt worden sind: $AE=2cd(a^2-b^2)$, $BE=4abcd$, $CE=2ab(c^2-d^2)$, $AB=2cd(a^2+b^2)$, $BC=2ab(c^2+d^2)$; ferner wird wegen der Ähnlichkeit der gegenüberliegenden Dreiecke, $DE=(a^2-b^2)(c^2-d^2)$, $CD=(a^2+b^2)(c^2-d^2)$, $DA=(a^2-b^2)(c^2+d^2)$; wie es im Satze verlangt worden ist.

Die sämmtlichen Sätze des ***Brahmegupta*** von der Bildung von Dreiecken und Vierecken mit rationalen Stücken beruhen also hauptsächlich nur auf der Bildung rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten. Die dazu nöthigen geometrischen Kenntnisse beschränken sich, wie man sieht, auf den pythagoräischen Lehrsatz; wozu allenfalls noch der Satz gerechnet werden kann, dafs die vier Abschnitte, in welche zwei Sehnen eines Kreises sich gegenseitig theilen, in gleicher Proportion stehen. Aber selbst mit diesen beschränkten Mitteln hätte ***Brahmegupta*** weit mehr leisten können, da sie nicht nur zur Bildung der besonderen Vierecke des Satzes 38., in welchen die Diagonalen auf einander senkrecht stehen, sondern sogar zur allgemeinsten Lösung der Aufgabe über das dem Kreise einschreibbare Viereck mit rationalen Stücken vollständig ausreichen. Diese allgemeinste Lösung wird nämlich folgendermaafsen gefunden.

Man nehme drei rechtwinklige Dreiecke mit rationalen Seiten, und lege sie, nachdem man eine Kathete in allen gleich gemacht hat, mit dieser Kathete so an- und auf einander, dafs die andern Katheten in einer geraden Linie liegen. Durch Zusammensetzung der drei Dreiecke *BFA*, *BFE* und *BFC* (Fig. 4.) erhält man dann die beiden an einander passenden schiefwinkligen Dreiecke *BEA* und *BEC*, welche zusammen das Dreieck *ABC* bilden. Um dieses Dreieck *ABC* ziehe man einen Kreis, verlängere *BE* bis an die Peripherie desselben nach *D*, ziehe *DA* und *DC*: so ist *ABCD* das verlangte Viereck, dessen Seiten, Diagonalen, Abschnitte der Diagonalen, Radius des umschriebenen Kreises und Inhalt rational sind. Nimmt man für die Seiten der zum Grunde gelegten drei pythagoräischen Dreiecke folgende: *Erstlich*, $2ab$, a^2-b^2, a^2+b^2; *Zweitens*, $2cd$, c^2-d^2, c^2+d^2; *Drittens*, $2ef$, e^2-f^2, e^2+f^2, so erhält man leicht folgende Ausdrücke für die vier Seiten des Vierecks:

$$AB = (a^2+b^2)(e^2+f^2)cd,$$
$$BC = ab(c^2+d^2)(e^2+f^2),$$
$$CD = (a^2+b^2)(ef(c^2-d^2)-cd(e^2-f^2)),$$
$$DA = (c^2+d^2)(ef(a^2-b^2)-ab(e^2-f^2)).$$

Diese Ausdrücke geben, wie sich später zeigen wird, ganz allgemein alle dem Kreise einschreibbaren Vierecke mit rationalen Seiten, Diagonalen und Inhalt. *Brahmegupta* ist bis zu dieser vollständigen Auflösung der von ihm behandelten Aufgabe nicht vorgedrungen, obgleich sie, wie wir sahen, durch dieselben einfachen Mittel als jene beschränkteren möglich war.

Die hier gegebene vollständige Darlegung der sechs Sätze des *Brahmegupta* widerstreitet in einem Hauptpuncte der Ansicht, welche *Chasles* über dieselben und über den ganzen Abschnitt, welchem sie angehören, aufgestellt hat. *Chasles* sieht nämlich die vorhergehenden zwölf Sätze 21. bis 32. als Vorarbeiten an, welche hauptsächlich nur dazu dienen sollen, diese sechs arithmetischen Sätze, und namentlich den letzten derselben, vorzubereiten, und er meint, dafs alle diese vorhergehenden Sätze bei der Lösung der Aufgabe über das Viereck mit rationalen Stücken ihre Anwendung finden, so dafs keiner derselben dieser Aufgabe fremd, oder für sie überflüssig sei; welches, wie wir zeigten, nicht der Fall ist. Eine genaue Entwickelung der übrigen rein geometrischen Sätze dieses Abschnitts würde uns zu weit von unserem Ziele entfernen: dieselbe würde die zu hohen Erwartungen, welche *Chasles* von verloren gegangenen geometrischen Methoden der Inder hegt, gar sehr herabstimmen, und einen neuen Beleg für die Behauptung von *Colebrooke* liefern,

dafs sich die Geometrie der Inder in der damaligen Zeit nur auf einer sehr niedern Stufe der Ausbildung befunden habe, während die arithmetischen Kenntnisse derselben viel bedeutender waren. Die geometrische Methode der Inder zur Zeit *Brahmegupta's* scheint nemlich nach den vorliegenden Proben hauptsächlich nur in einer sehr unwissenschaftlichen Art von Induction bestanden zu haben, durch welche sie ihre Sätze fanden, die ihnen sodann als Regeln galten und eines Beweises nicht mehr bedürftig schienen. Sie bildeten sich ihre Figuren, namentlich Dreiecke und Vierecke, so, dafs die einzelnen Stücke derselben durch Zahlen, und zwar immer wo möglich durch rationale oder ganze Zahlen ausgedrückt wurden; aus diesen Zahlen hauptsächlich abstrahirten sie ihre allgemeinen Regeln für die Berechnung der Stücke; und wenn dieselben in mehreren vorliegenden Fällen galten, so schrieben sie ihnen ohne Bedenken allgemeine Gültigkeit zu. Hieraus glaube ich, ist es zu erklären, dafs *Brahmegupta* viele, nur unter besondern Bedingungen geltende Sätze so giebt, als wären sie allgemein gültig. Dafs namentlieh viele der Sätze über das Viereck nur unter der Bedingung gelten, dafs die Diagonalen auf einander senkrecht stehen, hat seinen Grund wohl darin, dafs *Brahmegupta* hauptsächlich nur Vierecke dieser Art zu bilden verstand, und dafs er deshalb hauptsächlich nur von solchen seine Regeln abstrahirte. Diese weggelassenen nothwendigen Bedingungen, welche, wie *Chasles* annimmt, immer hinzugedacht, wenn gleich nicht ausgesprochen wurden, sind nach meiner Ansicht, wenigstens grofsentheils, aus wirklicher Unkenntnifs weggelassen; wofür sich als äufserer Beweisgrund auch die Ansicht des indischen Mathematikers *Bhascara* anführen läfst, welcher fast sechs hundert Jahre nach *Brahmegupta* lebte und, wenn auch kein grofser Geist, doch ein Kenner der ältern Mathematiker seines Vaterlandes war; dieser tadelt *Brahmegupta* gerade wegen jener Vernachlässigungen, welche das Viereck betreffen, indem er sagt: „Yet though indeterminate diagonals have been sought as determinate by *Brahmegupta* and others," und nennt an einer andern Stelle Den, welcher dieses thut, einen dummen Teufel (blundering devil).

Wir wollen nun unsere eigene Auflösung der allgemeineren Aufgabe entwickeln: Vierecke zu finden, deren Seiten und Diagonalen rational sind; indem wir zunächst beweisen, dafs in jedem solchen Vierecke auch die Abschnitte rational sein müssen, in welche die beiden Diagonalen sich gegenseitig

theilen. Ist $ABCD$ (Fig. 5.) das Viereck, dessen Seiten AB, BC, CD, DA, so wie die beiden Diagonalen AC, BD rational sind, und man nennt die Winkel $BAC = u$, $DAC = v$, $AEB = w$, so sind die drei Cosinus $\cos u$, $\cos v$ und $\cos(u+v)$ rationale Zahlen; denn diese drei Winkel u, v, $u+v$ sind Winkel in Dreiecken, deren drei Seiten rational sind, und der Cosinus des Winkels eines Dreiecks ist eine rationale Function der drei Seiten desselben. Hieraus folgt nun nach der Formel $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$, dafs das Product $\sin u \sin v$ rational ist. Da ferner $\sin v^2 = 1 - \cos v^2$ rational ist, so folgt durch Division mit $\sin v^2$, dafs auch $\frac{\sin u}{\sin v}$ rational ist. Nun geben die Dreiecke AEB und AED die Gleichungen: $BE \sin w = AB \sin u$ und $DE \sin w = DA \sin v$, also $\frac{BE}{DE} = \frac{AB \sin u}{AD \sin v}$; woraus folgt, dafs $\frac{BE}{DE}$ rational sein mufs. Addirt man zu diesem Quotienten *Eins*, so ist auch $\frac{BE+DE}{DE}$ rational, d. h. $\frac{BD}{DE}$ rational, und, weil auch die Diagonal BD rational ist, so folgt, dafs DE rational ist; also auch BE. Derselbe Beweis gilt eben so für die beiden Abschnitte AE und CE der andern Diagonal AE. Wir erhalten daher folgenden

Lehrsatz. *In jedem Vierecke, welches rationale Seiten und Diagonalen hat, sind auch die vier Abschnitte rational, in welche die Diagonalen sich gegenseitig theilen.*

Das gesuchte Viereck ist also immer aus vier Dreiecken mit rationalen Seiten zusammengesetzt, in deren jedem ein Winkel, als Winkel, den die beiden Diagonalen bilden, bestimmt ist. Deshalb lösen wir denn jetzt die einfachere Aufgabe: Dreiecke mit rationalen Seiten zu bilden, welche einen gegebenen Winkel w haben. Dieser Winkel w ist, damit die Aufgabe überhaupt lösbar sei, stets so anzunehmen, dafs der Cosinus desselben eine rationale Zahl ist. Es sei demnach in dem Dreiecke AEB (Fig. 5.) $\cos w = \frac{m}{n}$, $AE = \alpha$, $BE = \beta$ und $AB = a$, so ist

$$1. \quad a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \frac{2m}{n}\alpha\beta.$$

Nimmt man an, dafs die drei Seiten α, β und a *ganze* Zahlen sein sollen, ohne einen, allen dreien gemeinschaftlichen Factor (welches eben so allgemein ist, als die Annahme rationaler Zahlen) und dafs der Bruch $\frac{m}{n}$ in

den kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, so mufs $2\alpha\beta$ durch n theilbar sein, und es sind nun die beiden Fälle zu unterscheiden, wo n *ungerade* und wo n *gerade* ist. Man untersuche zunächst den ersten dieser Fälle: n *ungerade*. Für diesen ist $\alpha\cdot\beta$ durch n theilbar; α und β müssen also jedes irgend einen der zwei Factoren des n enthalten. Setzt man demnach $n = r\cdot s$, so ist $\alpha = r\cdot\alpha'$, $\beta = s\cdot\beta'$ zu setzen, und folglich

$$2.\qquad a^2 = r^2\alpha'^2 + s^2\beta'^2 - 2m\alpha'\beta'.$$

α' und β' haben nun keinen gemeinschaftlichen Factor, weil sonst α, β, und auch a, denselben haben müfsten; gegen die Voraussetzung: also ist auch wenigstens eine der Zahlen α' und β' ungerade, z. B. β'. Wird mit r^2 multiplicirt, so kann man der Gleichung (2.) auch folgende Form geben:

$$3.\qquad r^2a^2 = (r^2\alpha' - m\beta')^2 + (n^2 - m^2)\beta'^2,$$

oder auch die Form:

$$4.\qquad (ra + r^2\alpha' - m\beta')(ra - r^2\alpha' + m\beta') = (n^2 - m^2)\beta'^2.$$

Die beiden Factoren $ra + r^2\alpha' - m\beta'$ und $ra - r^2\alpha' + m\beta'$ haben nun keinen gemeinschaftlichen Primfactor mit β', weil sonst auch ihre Summe und ihre Differenz, nämlich $2ra$ und $2(r^2\alpha' - m\beta')$, also auch $r^2\alpha'$ und folglich auch a^2, oder a, denselben Primfactor haben müfsten. Zerfället man daher $n^2 - m^2$ in irgend zwei Factoren p und q, so dafs $n^2 - m^2 = pq$ ist, so mufs

$$5.\qquad \begin{cases} ra + r^2\alpha' - m\beta' = py^2, \\ ra - r^2\alpha' + m\beta' = qz^2 \text{ und} \\ \qquad\qquad\quad \beta' = yz \end{cases}$$

sein. Aus diesen drei Gleichungen folgt

$$6.\qquad \frac{2r^2\alpha'}{\beta'} = \frac{py}{z} + 2m - \frac{qz}{y},$$

und da $\alpha = r\alpha'$, $\beta = s\beta'$, $rs = n$, also $\frac{2r^2\alpha'}{\beta'} = \frac{2n\alpha}{\beta}$ ist:

$$7.\qquad \frac{2n\alpha}{\beta} = \frac{py}{z} + 2m - \frac{qz}{y}.$$

Setzt man nun $\frac{py}{z} = n\xi$, wo ξ eine beliebige rationale (gebrochene) Zahl bedeutet, so wird $\frac{qz}{y} = \frac{pq}{n\xi} = \frac{n^2 - m^2}{n\xi}$, also, wenn endlich noch $\frac{m}{n} = c$ gesetzt wird,

$$\frac{2\alpha}{\beta} = \xi + 2c - \frac{(1 - c^2)}{\xi} \text{ oder}$$

$$7a.\qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\xi + c)^2 - 1}{2\xi} = \frac{(\xi + c + 1)(\xi + c - 1)}{2\xi}.$$

Diese Gleichung (7.) ist nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend für die Construction des verlangten Dreiecks; denn vermöge derselben ist

$$8. \quad a = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2-2c\alpha\beta)} = \frac{\beta(\xi^2+1-c^2)}{2\xi}.$$

Wir haben jetzt eigentlich noch den zweiten Fall, wo n *gerade* ist, eben so zu behandeln: da er aber nach derselben Methode genau zu denselben Resultaten (7. und 8.) führt, so wollen wir ihn nicht besonders herschreiben. Der Satz, welchen wir erlangt haben, ist folgender:

Lehrsatz. *Wenn in einem Dreiecke, dessen Seiten rational sein sollen, ein Winkel so gegeben ist, dafs der Cosinus desselben rational und gleich c ist, so mufs das Verhältnifs der beiden, den Winkel einschliefsenden Seiten sich durch den Ausdruck $\frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi}$ darstellen lassen, in welchem ξ irgend eine rationale Zahl bedeutet; und umgekehrt: wenn das Verhältnifs dieser beiden rationalen Seiten sich in dieser Form darstellen läfst, so ist auch die dritte Seite rational.*

Um diesen Satz auf das *Viereck* anzuwenden, bezeichne man die Theile, in welche die Diagonalen sich gegenseitig theilen, und welche, wie oben gezeigt, rational sein müssen, durch α, β, γ, δ, so dafs (in Fig. 5.) $AE=\alpha$, $BE=\beta$, $CE=\gamma$, $DE=\delta$ ist, und construire das Viereck mit diesen vier Stücken und dem Winkel, den die beiden Diagonalen bilden und dessen Cosinus rational und gleich c ist. Da es ferner nur auf die Verhältnisse dieser vier Abschnitte der Diagonalen ankommt, nicht auf die absoluten Längen, so kann man eine dieser Gröfsen willkürlich annehmen, oder auch, am einfachsten, sie der Einheit gleich setzen. Wird demnach $\beta=1$ gesetzt, so erhält man dafür, dafs aufser den Stücken α, β, γ, δ auch die vier Seiten des Vierecks $ABCD$ rational werden, folgende nothwendige und hinreichende Bedingungen:

$$9. \quad \begin{cases} \alpha = \frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi}, & \gamma = \frac{(\eta-c)^2-1}{2\eta}, \\ \frac{\delta}{\alpha} = \frac{(x-c)^2-1}{2x}, & \frac{\delta}{\gamma} = \frac{(y+c)^2-1}{2y}. \end{cases}$$

Da die drei Gröfsen α, γ, δ diesen vier Gleichungen genügen müssen, so folgt, dafs die fünf rationalen Zahlen ξ, η, x, y und c nicht ganz beliebig sind, sondern folgender, aus der Elimination des α, γ und δ hervorgehenden Gleichung genügen müssen:

$$10. \quad \left(\frac{(\eta-c)^2-1}{2\eta}\right)\left(\frac{(y+c)^2-1}{2y}\right) = \left(\frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi}\right)\left(\frac{(x-c)^2-1}{2x}\right).$$

Umgekehrt giebt aber auch jede rationale Bestimmung dieser fünf Gröfsen, welche der Gleichung (10.) genügt, und von welchen Gröfsen c, als Cosinus eines realen Winkels, kleiner als Eins sein mufs, eine passende Bestimmung der drei Gröfsen α, γ, δ, für welche auch die Seiten des Vierecks rational werden: denn wenn noch der Kürze wegen $1-c^2$ durch k^2 bezeichnet wird, so dafs k den Sinus des Winkels der beiden Diagonalen bezeichnet, der zwar nicht nothwendig *selbst*, aber dessen *Quadrat* stets rational ist, so erhält man nach der Gleichung (8.) folgende Ausdrücke der vier Seiten:

$$11.\quad \begin{cases} AB = \frac{\xi^2+k^2}{2\xi}, & BC = \frac{\eta^2+k^2}{2\eta}, \\ CD = \left(\frac{(\eta-c)^2-1}{2\eta}\right)\left(\frac{y^2+k^2}{2y}\right), & DA = \left(\frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi}\right)\left(\frac{x^2+k^2}{2x}\right). \end{cases}$$

Die vollständige Auflösung der Aufgabe, alle die Vierecke zu finden, deren vier Seiten und beide Diagonalen rational sind, liegt demnach allein in der Auflösung der Gleichung (10.) durch rationale Zahlen. Will man aufserdem die zweite Bedingung hinzufügen, dafs auch der *Inhalt* des Vierecks rational sein soll, so macht dies keine besondern Schwierigkeiten; denn dieser Inhalt hat, aus den Inhalten der vier Dreiecke zusammengesetzt, folgenden Ausdruck: $\frac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha)\sin w$; die einzige nothwendige und hinreichende Bedingung, damit auch dieser rational werde, ist also nur die, dafs aufser $\cos w = c$ auch noch $\sin w = k$ rational sei; und diese Bedingung wird auf die allgemeinste Art dadurch befriedigt, dafs man dem c die Form $c=\frac{r^2-1}{r^2+1}$ giebt; wodurch $k=\frac{2r}{r^2+1}$ wird. Von den fünf Gröfsen, welche die Gleichung (10.) enthält, betrachte man nun die drei ξ, η und c als willkürlich anzunehmende rationale Zahlen, und nur x und y als die beiden Unbekannten, welche, wenn jene gegeben sind, allemal so bestimmt werden sollen, dafs sie rational sind und der Gleichung (10.) genügen. Diese Gleichung ist in Beziehung auf jede der Unbekannten vom zweiten Grade und kann, wenn für die Ausdrücke $\frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi}$ und $\frac{(\eta-c)^2-1}{2\eta}$ der Kürze wegen die Zeichen α und γ beibehalten werden, folgendermaafsen dargestellt werden:

$$12.\quad \gamma\cdot\left(\frac{(y+c)^2-1}{2y}\right) = \alpha\cdot\left(\frac{(x-c)^2-1}{2x}\right),$$

oder, nach den Unbekannten geordnet, durch:

$$13.\quad \begin{cases} \gamma x y^2 - (\alpha x^2 - 2c(\alpha+\gamma)x - \alpha k^2)y - k^2\gamma x = 0 \text{ und} \\ \alpha y x^2 - (\gamma y^2 + 2c(\alpha+\gamma)x - \gamma k^2)x - k^2\alpha y = 0. \end{cases}$$

Löset man diese Gleichung in Beziehung auf y auf, so erhält man:

$$14. \quad y = \frac{\alpha x^2 - 2c(\alpha+\gamma)x - \alpha k^2 \pm \sqrt{[(\alpha x^2 - 2c(\alpha+\gamma)x - \alpha k^2)^2 + 4k^2\gamma^2 x^2]}}{2\gamma x}.$$

Die ganze Aufgabe reducirt sich also jetzt darauf, die rationalen Werthe von x zu finden, für welche auch die Wurzel

$$\sqrt{[(\alpha x^2 - 2c(\alpha+\gamma)x - \alpha k^2)^2 + 4k^2\gamma^2 x^2]}$$

rational wird. Diese Aufgabe ist bekanntlich schon von *Euler* mehrmals behandelt worden; und zwar zuletzt in einer Abhandlung vom Jahre 1780, welche erst im Jahre 1830 in dem elften Bande der „Mémoires de l'Académie de St. Petersbourg" erschienen ist. Auch hat *Jacobi* in der Abhandlung „De usu theoriae integralium ellipticorum et Abelianorum in analysi Diophantea," im dreizehnten Bande dieses Journals S. 353, die Aufgabe mit Hülfe der elliptischen Functionen gelöset, und dabei bemerkt, dafs diese Methode mit der *Euler*schen im Wesentlichen übereinstimmt. Es mufs, damit nach den genannten Methoden die Lösung der Aufgabe überhaupt gelinge, immer eine bestimmte Anzahl, und wenigstens *eine* der Fundamental-Auflösungen bekannt sein; aus welchen dann eine unendliche Anzahl neuer hergeleitet wird: die Fundamental-Auflösungen aber direct zu finden und durch die aus ihnen herzuleitenden alle möglichen Auflösungen zu erschöpfen, ist ein noch ungelösetes Problem, welches bedeutenden Schwierigkeiten unterworfen zu sein scheint. Wir müssen darum hier darauf verzichten, die vollkommen allgemeinen Ausdrücke für die Stücke des Vierecks mit rationalen Seiten und Diagonalen in entwickelter Form, d. h. so darzustellen, dafs die nöthige Bedingungsgleichung (10.) von selbst erfüllt wird, sind indessen durch die *Euler*'sche Methode in den Stand gesetzt, eine unendliche Anzahl solcher Ausdrücke zu liefern, welche sehr allgemein sind, da sie die drei willkürlichen rationalen Zahlen ξ, η und c enthalten; denn jeder rationale Werth von x, welcher die obige Wurzelgröfse rational macht, giebt eine solche Formel.

Die einfachsten rationalen Werthe von x, welche der Gleichung (10.) so genügen, dafs auch y rational wird, und welche sich von selbst darbieten und also hier als Fundamental-Auflösungen benutzt werden sollen, sind $x = 0$, $x = 1 + c$ und $x = \eta$. Diesen entsprechen nämlich die Werthe $y = 0$, $y = 1 - c$ und $y = \xi$. Der erste dieser Werthe $x = 0$ und $y = 0$ giebt für sich kein wirkliches Viereck, sondern nur ein solches, dessen eine Winkelspitze im Unendlichen liegt. Ebenso giebt $x = 1 + c$, $y = 1 - c$ nur ein Viereck, von welchem zwei Winkelspitzen ineinanderfallen: welches also ein *Dreieck* ist.

Der Werth $x=\eta$, $y=\xi$ aber giebt ein *wirkliches Viereck*, und zwar das dem Kreise eingeschriebene. Für diese Werthe $x=\eta$ und $y=\xi$ erhält man nämlich aus (9. und 11.) folgende Ausdrücke:

$$15.\quad \alpha=\frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi},\quad \beta=1,\quad \gamma=\frac{(\eta-c)^2-1}{2\eta},\quad \delta=\frac{((\xi+c)^2-1)((\eta-c)^2-1)}{4\xi\eta}$$

und

$$16.\quad \begin{cases} AB=\dfrac{\xi^2+k^2}{2\xi}, & BC=\dfrac{\eta^2+k^2}{2\eta}, \\ CD=\dfrac{((\eta-c)^2-1)(\xi^2+k^2)}{4\xi\eta}, & DA=\dfrac{((\xi+c)^2-1)(\eta^2+k^2)}{4\xi\eta}. \end{cases}$$

Diese Formeln enthalten auch den allgemeinsten Ausdruck aller einem Kreise einzuschreibenden Vierecke mit rationalen Seiten und Diagonalen; denn da diese der Bedingung $\alpha\gamma=\beta\delta$ genügen müssen, so folgt, dafs kein anderer Werth von δ möglich ist. Soll aufser den Seiten und Diagonalen auch noch der *Inhalt* rational werden, so ist es, wie oben gezeigt, hinreichend, und nothwendig, das c eine rationale Zahl von der Form $\frac{r^2-1}{r^2+1}$ sei; wodurch auch k rational wird. Für einen solchen Werth von c sind auch die hier gegebenen Formeln für das dem Kreise einzuschreibende Viereck, wie sich leicht erkennen läfst, wesentlich identisch mit den Formeln, welche wir oben durch blofse Zusammensetzung rechtwinkliger pythagoräischer Dreiecke nach der Methode *Brahmegupta's* fanden.

Als numerische Beispiele zu diesen Formeln für das dem Kreise einzuschreibende Viereck wollen wir $c=\frac{1}{2}$ setzen, also $w=60^0$; ferner $\xi=2$, $\eta=3$: dann ist $\alpha=\frac{3}{8}$, $\beta=1$, $\gamma=\frac{7}{8}$, $\gamma=\frac{21}{64}$, oder in ganzen Zahlen: $\alpha=24$, $\beta=64$, $\gamma=56$, $\delta=21$; die Seiten sind $AB=56$, $BC=104$, $CD=49$, $DA=39$ und die Diagonalen $AC=80$, $BD=85$. Ein anderes Beispiel, auch mit rationalem *Inhalt*, ist $c=\frac{3}{5}$, $\xi=\frac{8}{15}$, $\eta=\frac{4}{5}$; hiernach werden die Abschnitte der Diagonalen $\alpha=\frac{4}{15}$, $\beta=1$, $\gamma=\frac{7}{15}$, $\delta=\frac{28}{225}$, oder in ganzen Zahlen: $\alpha=60$, $\beta=225$, $\gamma=105$, $\delta=28$; ferner die Seiten $AB=195$, $BC=300$, $CD=91$, $DA=80$ und die Diagonalen $AC=165$, $BD=253$ und der Inhalt gleich 16698.

Die *Euler*sche Methode, deren wir uns jetzt bedienen wollen, um aus den drei bekannten Werthen von x andere abzuleiten, die ebenfalls die obige Wurzel rational machen und also rationale Werthe des y geben, beruht hauptsächlich darauf, dafs der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, welcher nach x vom vierten Grade ist, auf die Form P^2+QR gebracht wird, wo

P, Q und R rationale ganze Functionen vom zweiten Grade sind, mit rationalen Coëfficienten. Aus diesen wird sodann die quadratische Gleichung

$$17. \quad Qz^2+2Pz-R=0$$

gebildet, welche auch nach x quadratisch ist und also ebenfalls auf die Form

$$18. \quad Sx^2+2Tx-U=0$$

sich bringen läfst. Wenn nun für irgend einen Werth von x die gegebene Wurzel, welche durch $\sqrt{(P^2+QR)}$ dargestellt ist, rational wird, so wird auch z rational; und zwar erhält es zwei rationale Werthe. Setzt man einen derselben in die Gleichung (18.) in S, T und U, so giebt dieselbe zwei rationale Werthe von x, deren einer der ursprünglich bekannte, der andere neu ist, und welcher ebenfalls die Wurzel $\sqrt{(P^2+QR)}$ rational macht, weil er einen rationalen Werth von z giebt. Legt man nun eben so diesen neuen Werth von x zum Grunde, so findet man auf gleiche Weise wieder einen neuen Werth dazu; und so kann man bis in's Unendliche fortfahren, wenn sich nicht etwa ein Werth, der schon einmal da war, wiederholt; in welchem Fall man nur eine endliche Periode von verschiedenen Werthen erhält.

Die erste für diese Methode nöthige Operation, nämlich eine quadratische Gleichung zu finden, deren Wurzel z sich durch die rational zu machende Wurzelgröfse ausdrücken läfst, und welche auch in Beziehung auf x selbst vom zweiten Grade ist, wurde in unserem Falle auf eine Weise schon ausgeführt; denn die Gleichung (10.), welche, einerseits nach y, andrerseits nach x geordnet, die Formen (13.) annimmt, ist eine Gleichung dieser Art. Grade diese aber leistet nur sehr wenig, denn sie giebt, wie leicht zu sehen, niemals eine unendliche Reihe von Werthen des x, sondern immer nur eine Periode von zweien. Ist nämlich x irgend ein genügender Werth, welcher auch y rational macht, so ergiebt sich als zweiter Werth nur $-\frac{k^2}{x}$, und dieser führt wieder auf den Werth von x zurück. Der Werth $-\frac{k^2}{x}$ giebt aber niemals ein anderes Viereck als x selbst, weil der Ausdruck von δ derselbe bleibt, wenn man x in $-\frac{k^2}{x}$ verwandelt. Eben so bleibt auch α ungeändert, wenn ξ in $-\frac{k^2}{\xi}$, und γ, wenn η in $-\frac{k^2}{\eta}$ verwandelt wird; welche Bemerkung zu beachten nöthig ist, um verschiedene Werthe von x als Werthe zu erkennen, die keine wesentlich verschiedenen Formeln für Vierecke mit rationalen Seiten und Diagonalen geben.

Obschon nun die Gleichungen (13.) selbst, nicht eine unendliche Reihe rationaler Werthe des x geben, für welche auch y rational wäre, so reicht doch eine leichte Änderung hin, sie dazu passend zu machen. Setzt man nämlich $xy = z$, so erhält man:

$$19.\quad \gamma z^2 - (\alpha x^2 - 2c(\alpha+\gamma)x - \alpha k^2)z - k^2\gamma x^2 = 0,$$

oder, nach Potenzen von x geordnet:

$$20.\quad (\alpha z + k^2\gamma)x^2 - 2c(\alpha+\gamma)zx - z(\gamma z + k^2 z) = 0.$$

Sind nun z und z' die beiden Wurzeln der einen, x und x' die beiden Wurzeln der andern Gleichung, so ist bekanntlich

$$21.\quad zz = -k^2x^2, \qquad z + z' = \frac{\alpha x^2 - 2c(\alpha+\gamma)x - k^2\alpha}{\gamma},$$

$$22.\quad xx' = -\frac{z(\gamma z + k^2\alpha)}{\alpha z + k^2\gamma}, \qquad x + x' = \frac{2c(\alpha+\gamma)z}{\alpha z + k^2\gamma}.$$

Gehen wir jetzt von dem bekannten Werthe 0 von x aus, so finden sich für diesen von z die beiden Werthe $z = 0$ und $z = -\frac{k^2\alpha}{\gamma}$. Der erstere $z = 0$ ist zu verwerfen, weil er nur $x = 0$ zurückgiebt; die beiden Werthe $z = -\frac{k^2\alpha}{\gamma}$ und $x = 0$ aber geben nach der Gleichung (22.):

$$23.\quad x' = \frac{2c\alpha}{\alpha-\gamma};$$

welches ein *neuer* Werth des x ist, der z, und daher auch y, rational macht. Vermittelst einer der Gleichungen (21.) findet man ferner für den zweiten Werth von z, welcher zu diesem Werthe x' gehört:

$$z' = \frac{4c^2\alpha\gamma}{(\alpha-\gamma)^2}$$

und hieraus wieder vermittelst einer der beiden Gleichungen (22.) für den zweiten Werth von x, welcher zu diesem Werthe von z gehört:

$$24.\quad x'' = -\frac{2c\alpha(4c^2\gamma^2 + k^2(\alpha-\gamma)^2)}{(\alpha-\gamma)(4c^2\alpha^2 + k^2(\alpha-\gamma)^2)}.$$

Zu diesem gehört wieder, als neuer Werth von z, folgender:

$$z'' = -\frac{k^2\alpha(4c^2\gamma^2 + k^2(\alpha-\gamma)^2)^2}{(4c^2\alpha^2 + k^2(\alpha-\gamma)^2)^2},$$

welcher wieder folgenden neuen Werth des x giebt:

$$25.\quad x''' = -\frac{4ck^2\alpha(\alpha-\gamma)(4c^2\gamma^2 + k^2(\alpha-\gamma)^2)(2c^2(\alpha^2+\gamma^2) + k^2(\alpha-\gamma)^2)}{(4c^2\alpha^2 + k^2(\alpha-\gamma)^2)(4c^2\alpha\gamma + k^2(\alpha-\gamma)^2)(4c^2\alpha\gamma - k^2(\alpha-\gamma)^2)};$$

und so kann man mit Leichtigkeit die Reihe der Werthe von x, welche je-

doch immer complicirter werden, weiter fortsetzen. Die zu ihnen gehörigen Werthe von y erhält man ohne alle Rechnung durch Vertauschung der Buchstaben, weil die Gleichung (10.) oder (13.) ungeändert bleibt, wenn man ξ mit η, c mit $-c$ und x mit y vertauscht, wodurch auch α und γ vertauscht werden. Wir erhalten so die erste Reihe allgemeiner Formeln für Vierecke mit rationalen Seiten und Diagonalen; was sich folgendermaafsen ausdrücken läfst:

Wenn man in dem Vierecke ABCD den Winkel der Diagonalen so bestimmt, dafs dessen Cosinus eine rationale Zahl c ist, und die vier Abschnitte α, β, γ, δ, in welche die Diagonalen sich gegenseitig theilen, so annimmt, dafs

$$26.\quad \alpha = \frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi},\quad \beta = 1,\quad \gamma = \frac{(\eta-c)^2-1}{2\eta},$$
$$\delta = \left(\frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi}\right)\cdot\left(\frac{(x-c)^2-1}{2x}\right)$$

ist, wo ξ und η beliebige rationale Zahlen sind, x aber irgend einen der Werthe

$$x' = \frac{2c\alpha}{\alpha-\gamma},$$
$$x'' = -\frac{2c\alpha(4c^2\gamma^2+k^2(\alpha-\gamma)^2)}{(\alpha-\gamma)(4c^2\alpha^2+k^2(\alpha-\gamma)^2)},$$
$$x''' = -\frac{4ck^2\alpha(\alpha-\gamma)(4c^2\gamma^2+k^2(\alpha-\gamma)^2)(2c^2(\alpha^2+\gamma^2)+k^2(\alpha-\gamma)^2)}{(4c^2\alpha^2+k^2(\alpha-\gamma)^2)(4c^2\alpha\gamma+k^2(\alpha-\gamma)^2)(4c^2\alpha\gamma-k^2(\alpha-\gamma)^2)}$$

etc. etc.

erhält: so sind, aufser den beiden Diagonalen, auch alle vier Seiten des Vierecks rational. Die Ausdrücke für die vier Seiten sind:

$$27.\quad \begin{cases} AB = \dfrac{\xi^2+k^2}{2\xi}; & BC = \dfrac{\eta^2+k^2}{2\eta}; \\ CD = \left(\dfrac{(\eta+c)^2-1}{2\eta}\right)\cdot\left(\dfrac{y^2+k^2}{2y}\right); & DA = \left(\dfrac{(\xi+c)^2-1}{2\xi}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2+k^2}{2x}\right); \end{cases}$$

wo y, dem jedesmaligen Werthe des x entsprechend, einen der folgenden Werthe hat:

$$y' = \frac{2c\gamma}{\alpha-\gamma},$$
$$y'' = -\frac{2c\gamma(4c^2\alpha^2+k^2(\alpha-\gamma)^2)}{(\alpha-\gamma)(4c^2\gamma^2+k^2(\alpha-\gamma)^2)},$$
$$y''' = -\frac{4ck^2\gamma(\alpha-\gamma)(4c^2\alpha^2+k^2(\alpha-\gamma)^2)(2c^2(\alpha^2+\gamma^2)+k^2(\alpha-\gamma)^2)}{(4c^2\gamma^2+k^2(\alpha-\gamma)^2)(4c^2\alpha\gamma+k^2(\alpha-\gamma)^2)(4c^2\alpha\gamma-k^2(\alpha-\gamma)^2)}$$

etc. etc.

Als Zahlenbeispiel sei $c = \frac{1}{2}$, also $w = 60^0$, $\xi = \frac{3}{2}$, $\eta = 3$. Dann ist $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{7}{8}$; ferner $x' = 8$, also $\delta = \frac{221}{64}$, oder in ganzen Zahlen, $\alpha = 64$, $\beta = 64$, $\gamma = 56$, $\delta = 221$; ferner $AB = 64$, $BC = 104$, $CD = 199$, $DA = 259$ und die Diagonalen sind: $AC = 120$, $BD = 285$. Ein anderes Beispiel sei $c = \frac{4}{5}$, $\xi = 1$, $\eta = 3$; was $\alpha = \frac{28}{25}$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{16}{25}$, also $x' = \frac{56}{15}$ und $\delta = \frac{1711}{1500}$ giebt. oder in ganzen Zahlen: $\alpha = 1680$, $\beta = 1500$, $\gamma = 960$, $\delta = 1711$; ferner sind die Seiten $AB = 1020$, $BC = 2340$, $CD = 1105$ $DA = 3217$, die Diagonalen $AC = 2640$, $BD = 3211$, und der Inhalt ist gleich 2543112.

Sucht man weiter eine neue Reihe von passenden Werthen von x, so bietet sich zunächst der Werth $x = 1 + c$ als Fundamentalwerth dar, von welchem sich ausgehen läfst. Es findet sich aus demselben vermittels der Gleichungen (19. und 20.) wirklich eine neue Reihe Werthe von x, und aus diesen eine Reihe allgemeiner Formeln für die Vierecke. Die durch dieselben ausgedrückten Vierecke aber lassen sich alle aus den so eben gefundenen ableiten, wenn man blofs überall $-\frac{\alpha\gamma}{\delta}$ statt δ setzt. Dafs diese Verwandlung an jedem Vierecke, dessen Seiten und Diagonalen rational sind, ausgeführt werden könne, ohne dafs Seiten und Diagonalen aufhörten, rational zu sein, ist leicht zu zeigen. Beschreibt man namlich um das Dreieck CDA (Fig. 6.) einen Kreis, welcher BD in D' trifft, so ist $ABCD$ ebenfalls ein Viereck mit rationalen Seiten und Diagonalen, und es ist $ED' = -\frac{\alpha\gamma}{\delta}$. Da sich die Verwandlung auf alle vier Abschnitte der Diagonalen anwenden läfst, so erhält man aus einem Vierecke mit rationalen Seiten und Diagonalen noch vier andere; und dazu noch zwei, wenn man die Verwandlung an zwei gegenüberliegenden Winkelspitzen ausführt. Alle übrigen Vierecke, welche durch wiederholte Verwandlungen dieser Art entstehen, sind den sechs bezeichneten ähnlich und geben also nichts Neues.

Eine doppelt-unendliche Reihe wirklich brauchbarer Werthe von x geht aus $x = \eta$ hervor. Dieser Werth von x giebt nach (19.) für z die beiden Werthe $z = \xi\eta$ und $z = -\frac{k^2\eta}{\xi}$. Vermittels einer der Gleichungen (22.) erhält man hieraus folgende zwei Werthe von x:

$$28. \quad x' = -\frac{\eta(\xi\eta - 2c\xi + k^2)}{\xi\eta + 2c\eta + k^2} \quad \text{und} \quad x' = -\frac{k^2\eta(\xi - \eta + 2c)}{2c\xi\eta + k^2\xi - k^2\eta}.$$

Jeder dieser Werthe zieht eine unendliche Reihe anderer nach sich, welche

wir hier nicht weiter ausführen wollen. Da ferner auch von diesen beiden Werthen der eine aus dem andern entsteht, wenn $-\frac{k^2}{\eta}$ statt η gesetzt wird, so geben beide keine wesentlich von einander verschiedenen Formeln für Vierecke mit rationalen Stücken. Man kann also auch einen dieser Werthe unbeachtet lassen. Der erste giebt nach Gleichung (9.):

$$\delta = -\frac{\alpha\gamma(\xi\eta+(1+c)^2)(\xi\eta+(1-c)^2)}{(\xi\eta-2c\xi+k^2)(\xi\eta+2c\eta+k^2)}.$$

Setzt man aber $-\frac{\alpha\gamma}{\delta}$ statt δ, welches, wie gezeigt wurde, gestattet ist, so erhält man von δ den einfacheren Werth

$$\delta = \frac{(\xi\eta-2c\xi+k^2)(\xi\eta+2c\eta+k^2)}{(\xi\eta+(1+c)^2)(\xi\eta+(1-b)^2)}.$$

Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Wenn in dem Vierecke ABCD der Winkel der Diagonalen so angenommen wird, dafs der Cosinus c desselben rational ist, und man den vier Abschnitten, in welche die Diagonalen sich gegenseitig theilen, die Werthe:

$$29.\quad \alpha = \frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi},\quad \beta = 1,\quad \gamma = \frac{(\eta-c)^2-1}{2\eta},$$

$$\delta = \frac{(\xi\eta-2c\xi+k^2)(\xi\eta+2c\eta+k^2)}{(\xi\eta+(1+c)^2)(\xi\eta+(1-c)^2)}$$

giebt, wo ξ und η beliebige rationale Zahlen sind, so werden aufser den Diagonalen auch die Seiten des Vierecks rational und es ist:

$$30.\quad \begin{cases} AB = \frac{\xi^2+k^2}{2\xi}, \quad BC = \frac{\eta^2+k^2}{2\eta}, \\ CD = \frac{\eta^2(\xi\eta-2c\xi+k^2)^2+k^2(\xi\eta+2c\eta+k^2)^2}{2\eta(\xi\eta+(1+c)^2)(\xi\eta+(1-c)^2)}, \\ DA = \frac{\xi^2(\xi\eta+2c\eta+k^2)^2+k^2(\xi\eta-2c\xi+k^2)^2}{2\xi(\xi\eta+(1+c)^2)(\xi\eta+(1-c)^2)}. \end{cases}$$

Zu einem Zahlenbeispiel sei $c=\frac{1}{2}$, $w=60^0$, $\xi=\frac{3}{2}$, $\eta=3$. Dies giebt nach Wegschaffung der Brüche, $\alpha=456$, $\beta=456$, $\gamma=399$, $\delta=440$; ferner $AB=456$, $BC=741$, $CD=421$, $DA=776$, und für die Diagonalen $AC=855$, $BD=896$. Ein zweites Beispiel $c=\frac{3}{5}$, $\xi=\frac{6}{5}$, $\eta=\frac{12}{5}$ giebt, nach Wegschaffung der Brüche, $\alpha=4522$, $\beta=4845$, $\gamma=2261$, $\delta=3900$, $AB=4199$, $BC=6460$, $CD=3121$, $DA=7538$, $AC=6783$, $BD=8745$ und den Inhalt gleich 23726934.

Von den unendlich vielen ähnlichen allgemeinen Sätzen wollen wir jetzt nur noch einen entwickeln, und zwar einen solchen, der auch auf den Fall anwendbar ist, wo $c=0$, d. h. wo die Diagonalen auf einander senkrecht stehen; denn die bisher aufgestellten allgemeinen Sätze für die unregelmäfsigen, dem Kreise nicht einschreibbaren Vierecke sind grade für diesen Fall nichtssagend.

Setzt man in der Fundamentalgleichung (13.) $y=\frac{\alpha}{\gamma}(\eta-x)z+\xi$, so erhält man folgende verwandelte Gleichung:

$$31.\quad \alpha x(\eta-x)z^2+(\alpha k^2+2(\xi\gamma+c\alpha+c\gamma)x-\alpha x^2)z+\frac{\gamma\xi}{\eta}(k^2+\eta x)=0,$$

welche, nach Potenzen von x geordnet, auch wie folgt dargestellt werden kann:

$$32.\quad \alpha z(1+z)x^2-[\gamma\xi+2(\xi\gamma+c\alpha+c\gamma)z-\alpha z^2]x-\frac{k^2}{\eta}(\gamma\xi+\alpha\eta z)=0.$$

Nimmt man nun $x=\eta$ an, so erhält man für z den Werth

$$z=-\frac{\xi^2(\eta^2+k^2)}{\eta^2(\xi^2+k^2)}.$$

Zu diesem giebt die quadratische Gleichung (32.) von x, aufser dem Werthe η, noch den Werth:

$$33.\quad x=\frac{2\eta(c\xi\eta+ck^2+k^2\xi-k^2\eta)(\xi^2+k^2)}{((\xi+c)^2-1)(\xi-\eta)(\eta^2+k^2)}.$$

Mit Übergehung der unendlichen Reihe neuer Werthe, welche wieder aus diesem folgen, erhalten wir hieraus folgende neue, allgemeine Regel:

Wenn man die vier Abschnitte α, β, γ, δ der Diagonalen eines Vierecks und den Winkel derselben w so bestimmt, dafs

$$34.\quad \cos w=c,\quad \alpha=\frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi},\quad \beta=1,\quad \gamma=\frac{(\eta-c)^2-1}{2\eta},$$

$$\delta=\left(\frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi}\right)\cdot\left(\frac{(x-c)^2-1}{2x}\right),$$

wo

$$x=\frac{2\eta(c\xi\eta+ck^2+k^2\xi-k^2\eta)(\xi^2+k^2)}{((\xi+c^2)-1)(\xi-\eta)(\eta^2+k^2)}$$

ist, ξ, η und c aber beliebige rationale Zahlen sind, so sind in diesem Viereck, aufser den beiden Diagonalen, auch die vier Seiten rational; und zwar sind sie:

$$35.\quad \begin{cases} AB=\frac{\xi^2+k^2}{2\xi}, & BC=\frac{\eta^2+k^2}{2\eta}, \\ CD=\left(\frac{(\eta-c)^2-1}{2\eta}\right)\cdot\left(\frac{y^2+k^2}{2y}\right), & DA=\left(\frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi}\right)\cdot\left(\frac{x^2+k}{2x}\right), \end{cases}$$

wo

$$\gamma = \frac{2\xi(c\xi\eta + ck^2 + k^2\xi - k^2\eta)(\eta^2 + k^2)}{((\eta - c)^2 - 1)(\xi - \eta)(\xi^2 + k^2)}.$$

Als Zahlenbeispiel sei $w = 60^0$, $c = \frac{1}{2}$, $\xi = -\frac{1}{4}$, $\eta = 3$. Dies giebt, nach Aufhebung der Brüche, $\alpha = 240$, $\beta = 128$, $\gamma = 112$, $\delta = 57$, $AB = 208$, $BC = 208$, $CD = 97$, $DA = 273$, $AC = 352$ und $BD = 185$.

Für den besondern Fall, wo die Diagonalen auf einander senkrecht stehen, also $c = 0$ und $k = 1$ ist, läfst sich der Satz wie folgt ausdrücken:

Wenn in einem Vierecke, dessen beide Diagonalen auf einander senkrecht stehen, die vier Abschnitte der Diagonalen die Werthe

$$36.\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\xi^2 - 1}{2\xi}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \dfrac{\eta^2 - 1}{2\eta}, \\ \delta = \dfrac{(\xi\eta + \xi + \eta - 1)(\xi\eta + \xi - \eta + 1)(\xi\eta - \xi + \eta + 1)(-\xi\eta + \xi + \eta + 1)}{8\xi\eta(\xi^2 + 1)(\eta^2 + 1)} \end{cases}$$

haben, wo ξ und η beliebige rationale Zahlen sind, so sind auch die Seiten des Vierecks rational; und zwar sind ihre Ausdrücke:

$$37.\quad \begin{cases} AB = \dfrac{\xi^2 + 1}{2\xi}, \quad BC = \dfrac{\eta^2 + 1}{2\eta}, \\ CD = \dfrac{4\xi^2(\eta^2 + 1)^2 + (\eta^2 - 1)^2(\xi^2 + 1)^2}{8\xi\eta(\xi^2 + 1)(\eta^2 + 1)} \\ DA = \dfrac{4\eta^2(\xi^2 + 1)^2 + (\xi^2 - 1)^2(\eta^2 + 1)^2}{8\xi\eta(\xi^2 + 1)(\eta^2 + 1)}. \end{cases}$$

Als Zahlenbeispiel für diesen Fall, wo $w = 90^0$ ist, sei $\xi = 2$, $\eta = \frac{3}{2}$; dann ist $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{5}{12}$, $\delta = \frac{693}{2080}$, oder in ganzen Zahlen: $\alpha = 4680$, $\beta = 6240$, $\gamma = 2600$, $\delta = 2079$, $AB = 7800$, $BC = 6760$, $CD = 3329$, $DA = 5121$, $AC = 7280$, $BD = 8319$ und der Inhalt $= 30281160$.

Breslau im December 1846.

2.

Entwicklung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Puncte in Reihen, welche nach den Laplace'schen $Y^{(n)}$ fortschreiten; und Anwendung dieser Reihen zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotations-Ellipsoïds, welcher durch vertheilende Kräfte erregt ist.

(Von Herrn *J. Neumann*, Prof. der Mineralogie und Physik zu Königsberg.)

---

§. 1.

Herr Dr. *Heine* hat in diesem Journal Bd. 26. S. 185 die Differentialgleichung, welche aus

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=0$$

entsteht, wenn darin statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z die elliptischen

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\qquad y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\qquad z=\sqrt{(r^2-\lambda^2)}\cos\vartheta$$

gesetzt werden, durch eine Reihe integriren gelehrt, welche nach den *Laplace*schen $Y^{(n)}$ *(Kugelfunctionen)* fortschreitet. Derselbe hat gezeigt, dafs diese Reihen-Entwicklung des Integrals von dem vollständigen Integral der Gleichung

$$1.\qquad \frac{d(1-\sigma^2)\frac{dS}{d\sigma}}{d\sigma}+\left(n.n+1-\frac{m^2}{1-\sigma^2}\right)S=0$$

abhangt. Dies ist dieselbe Differentialgleichung, aus deren einem particulären Integral die Kugelfunction $Y^{(n)}$ zusammengesetzt ist. Ich werde dieses particuläre Integral durch $P_{n.m}(\sigma)$ bezeichnen. Es ist

$$2.\qquad P_{n.m}(\sigma)=(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mP_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m},$$

worin $P_{n.0}(\sigma)$ eine ganze rationale Function von der $n$ten Ordnung ist, welche der Gleichung

$$3.\qquad \frac{d(1-\sigma^2)\frac{dS}{d\sigma}}{d\sigma}+n.n+1.S=0$$

genügt und den Werth hat:

$$4.\quad P_{n.0}(\sigma)=\frac{1.3\ldots.2n-1}{1.2\ldots.\ n}\left\{\sigma^n-\frac{n.n-1}{2.2n-1}\sigma^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4.2n-1.2n-3}\sigma^{n-4}+\ldots\right\}.$$

Das zweite particuläre Integral von der Gleichung in (1.) hat *Heine* durch Reihen dargestellt, die nach den fallenden Potenzen, entweder von σ, oder $\sqrt{(1-\sigma^2)}$ fortschreiten; mit der Bemerkung, dafs diese Reihen sich in dem besondern Falle, wo $m=0$ und $n=0$ ist, auf einen geschlossenen logarithmischen oder trigonometrischen Ausdruck zurückführen lassen. Ich werde zeigen, dafs das zweite particuläre Integral von (1.) sich immer durch einen geschlossenen logarithmischen oder trigonometrischen Ausdruck darstellen läfst. Ich bezeichne dasselbe durch $Q_{n.m}(\sigma)$, so dafs, wenn A und B zwei willkürliche, von σ unabhängige Gröfsen bezeichnen, das vollständige Integral von (1.)

$$S = A.P_{n.m}(\sigma)+B.Q_{n.m}(\sigma)$$

ist, und behaupte, dafs

$$5.\quad Q_{n.m}(\sigma) = (1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m Q_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m}$$

ist, worin $Q_{n.0}(\sigma)$ das zweite particuläre Integral von der Gleichung (3.) ist (deren erstes durch $P_{n.0}(\sigma)$ ausgedrückt wurde) und den Werth hat:

$$6.\quad Q_{n.0}(\sigma) = \int_{-1}^{+1}\partial\mu\,\frac{P_{n.0}(\mu)}{\sigma-\mu}.$$

Setzt man aus (6.) den Werth von $Q_{n.0}(\sigma)$ in (5.), so erhält man

$$7.\quad Q_{n.m}(\sigma) = 1.2\ldots.m(-1)^m(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\int_{-1}^{+1}\frac{P_{n.0}(\mu)\,\partial\mu}{(\sigma-\mu)^{m+1}}.$$

Ich werde nachweisen, dafs, wenn man diesen Werth von $Q_{n.m}(\sigma)$ statt S in (1.) setzt, dieser Gleichung genügt wird. Man erhält nach einigen kleinen Reductionen aus (7.)

$$\frac{d.1-\sigma^2\frac{d.Q_{n.m}(\sigma)}{d\sigma}}{d\sigma} = 1.2\ldots.m(-1)^m(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\int_{-1}^{+1}\partial\mu\,\frac{P_{n.0}(\mu)}{(\sigma-\mu)^{m+1}}.$$
$$\times\left\{\frac{m+1.m+2-2.m+1.\sigma\mu-m.m+1.\mu^2}{(\sigma-\mu)^2}+\frac{m^2}{1-\sigma^2}\right\}.$$

Nun ist aber, wie leicht zu sehen,

$$\frac{m+1.m+2-2.m+1\ \sigma\mu-m.m+1.\mu^2}{(\sigma-\mu)^{m+3}} = \frac{d.1-\mu^2\frac{d}{d\mu}.\frac{1}{(\sigma-\mu)^{m+1}}}{d\mu}$$

und hierdurch verwandelt sich der vorstehende Ausdruck in folgenden:

$$8.\quad \frac{d.(1-\sigma^2)\frac{dQ_{n.m}(\sigma)}{d\sigma}}{d\sigma}$$

$$=1.2\ldots m(-1)^m(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\int_{-1}^{+1}\partial\mu P_{n.0}(\mu)\left(\frac{d.1-\mu^2\frac{d.\frac{1}{(\sigma-\mu)^{m+1}}}{d\mu}}{d\mu}\right)+\frac{m^2}{1-\sigma^2}Q_{n.m}(\sigma).$$

Das Integralzeichen in dem Gliede rechts läfst sich durch partielle Integration wegschaffen. Man erhält nemlich dadurch

$$\int\partial\mu P_{n.0}(\mu)\frac{d.(1-\mu^2)\frac{d.\frac{1}{(\sigma-\mu)^{m+1}}}{d\mu}}{d\mu}=1-\mu^2\frac{d.\frac{1}{(\sigma-\mu)^{m+1}}}{d\mu}P_{n.0}(\mu)-\frac{1-\mu^2}{(\sigma-\mu)^{m+1}}.\frac{dP_{n.0}(\mu)}{d\mu}$$

$$+\int_{-1}^{+1}\frac{1}{(\sigma-\mu)^{m+1}}.\frac{d.(1-\mu^2)\frac{dP_{n.0}(\mu)}{d\mu}\partial\mu}{d\mu},$$

worin die Glieder rechts, aufserhalb des Integralzeichens, wegen der Grenzen der Integration $+1$ und -1 verschwinden. In dem letzten Gliede kann zufolge der Gleichung (3.) $-n.n+1.P_{n.0}(\mu)$ statt $\frac{d.1-\mu^2\frac{dP_{n.0}(\mu)}{d\mu}}{d\mu}$ geschrieben werden, so dafs

$$\int_{-1}^{+1}P_{n.0}(\mu)\frac{d.1-\mu^2\frac{d.\frac{1}{(\sigma-\mu)^{m+1}}}{d\mu}}{d\mu}\partial\mu = -n.n+1\int_{-1}^{+1}\frac{P_{n.0}(\mu)}{(\sigma-\mu)^{m+1}}\partial\mu.$$

Setzt man diesen Werth in (8.), so erhält man, mit Rücksicht auf (7.):

$$\frac{d.(1-\sigma^2)\frac{dQ_{n.m}(\sigma)}{d\sigma}}{d\sigma} = -\left(n.n+1-\frac{m^2}{1-\sigma^2}\right)Q_{n.m}(\sigma);$$

welches die Gleichung ist, die bewiesen werden sollte.

Zur Ausführung der Integration in dem Ausdruck für $Q_{n.0}(\sigma)$ in (6.) dient die Bemerkung, dafs $\int_{-1}^{+1}\frac{\mu^p\partial\mu}{\sigma-\mu}=r-\sigma\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$ ist, worin r eine ganze rationale Function von σ vom $p-1$ten Grade bezeichnet, und gleich der Summe *der* Glieder in der Entwicklung von $\sigma^p\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$ nach den Potenzen von $\frac{1}{\sigma}$, welche

mit $\sigma = \infty$ nicht verschwinden. Hieraus folgt, mit Rücksicht auf den Werth von $P_{n,0}(\mu)$ in (4.), dafs

$$9.\qquad Q_{n,0}(\sigma) = \int_{-1}^{+1}\frac{P_{n,0}(\mu)\partial\mu}{\sigma-\mu} = R_n - P_{n,0}(\sigma)\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$$

ist, worin R_n eine ganze rationale Function von σ vom $n-1$ten Grade bezeichnet, und gleich der Summe der Glieder in der Entwicklung von $P_{n,0}(\sigma)\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$ nach den Potenzen von $\frac{1}{\sigma}$, welche, wenn $\sigma = \infty$ wird, nicht verschwinden. Hiernach ist R_n leicht hinzuschreiben; es kann auch bestimmt werden durch die Differentialgleichung

$$10.\qquad \frac{d.\overline{1-\sigma^2}\,\frac{dR_n}{d\sigma}}{d\sigma} + n.\overline{n+1}.R_n + \frac{4d.P_{n,0}(\sigma)}{d\sigma} = 0,$$

welche man aus (3.) erhält, wenn darin statt S der Werth von $Q_{n,0}(\sigma)$ aus (9.) gesetzt wird. Es ist

$$10\,b.\qquad R_0 = 0,\quad R_1 = -2,\quad R_2 = -3\sigma,\quad R_3 = -5(\sigma^2 - \tfrac{4}{15}),\ \text{u. s. w.}$$

Aus der Gleichung (9.) folgt sofort nach (5.)

$$11.\qquad Q_{n,m}(\sigma) = (1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m.R_n}{d\sigma^m} - (1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{d\sigma^m}P_{n,0}(\sigma)\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$$

und hieraus für den besondern Werth von $m = n$:

$$12.\qquad Q_{n,n}(\sigma) = -(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}n}\frac{d^n}{d\sigma^n}\,P_{n,0}(\sigma)\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}.$$

In allen vorstehenden Ausdrücken kann σ sowohl reell als imaginär sein. Die aus dem letztern Falle hervorgehenden Umformungen ergeben sich von selbst. Wenn σ von der Form $s\sqrt{-1}$ ist, so hat man

$$13.\qquad \begin{cases} P_{n,0}(s\sqrt{-1}) = \dfrac{1.3\ldots 2n-1}{1.2\ldots\ n}(-1)^{\frac{1}{2}n}\left\{s^n + \dfrac{n.n-1}{2.2n-1}s^{n-2} + \ldots\right\}, \\ P_{n,m}(s\sqrt{-1}) = (-1)^{-\frac{1}{2}m}(1+s^2)^{\frac{1}{2}m}\dfrac{d^m P_{n,0}(s\sqrt{-1})}{ds^m}. \\ Q_{n,0}(s\sqrt{-1}) = R_n - 2\sqrt{-1}\,P_{n,0}(s\sqrt{-1})\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \dfrac{1}{s}\right), \end{cases}$$

wo R_n eine ganze rationale Function vom $n-1$ten Grade von s ist, und gleich der Summe der Glieder, welche in der Entwicklung von

$$2\sqrt{-1}.P_{n,0}(s\sqrt{-1})\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{1}{s}\right)$$

nach den Potenzen von $\frac{1}{s}$ mit $s=\infty$ nicht verschwinden. Ferner ist

$$14. \quad Q_{n.m}(s\sqrt{-1})$$
$$= (-1)^{-\frac{1}{2}m}(1+s^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{ds^m}\Big(R_n - 2\sqrt{-1}.P_{n.0}(s\sqrt{-1})\,\mathrm{arc}\Big(\mathrm{tang}=\frac{1}{s}\Big)\Big).$$

In der Anwendung ist häufig die Kenntnifs der Functionen $P_{n.m}$ und $Q_{n.m}$ für einige besondere Werthe ihres Arguments erforderlich. Diese Fälle will ich noch näher entwickeln.

1. Wenn das Argument σ, es mag reell sein, oder imaginär, unendlich grofs wird, verschwindet $Q_{n.m}(\sigma)$. Dies folgt aus der Definition der Function R_n. Dagegen wird $P_{n.m}(\sigma)$ unendlich grofs, wenn σ reell und unendlich grofs wird; oder der Modul dieser Function, wenn σ imaginär und unendlich grofs ist. Ich bezeichne dies durch die Gleichungen

$$15. \quad P_{n.m}(\infty) = \infty, \quad Q_{n.m}(\infty) = 0.$$

2. Es soll der Grenzwerth des Products $\alpha P_{n.m}(\alpha r)Q_{n.m}(\alpha r_1)$, wo α reell oder imaginär sein kann, bestimmt werden, wenn α unendlich wird. Nach (2.) und (7.) ist

$$\alpha P_{n.m}(\alpha r)Q_{n.m}(\alpha r_1)$$
$$= 1.2.\dots m(-1)^m(1-(\alpha r)^2)^{\frac{1}{2}m}(1-(\alpha r_1)^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m P_{n.0}(\alpha r)}{\alpha^{m-1}dr^m}\int_{-1}^{+1}\frac{P_{n.0}(\mu)\partial\mu}{(\alpha r_1-\mu)^{m+1}},$$

wo, wenn α sehr grofs wird, zufolge (4.)

$$\frac{d^m P_{n.0}(\alpha r)}{\alpha^m dr^m} = \frac{1.3\dots 2n-1}{1.2\dots n}n.n-1\dots n-m+1(\alpha r)^{n-m}$$

gesetzt werden kann und, weil das Integral $\int_{-1}^{+1}\mu^p P_{n.0}(\mu)\partial\mu$ verschwindet, so lange p kleiner ist als n:

$$\int\frac{P_{n.0}(\mu)\partial\mu}{(\alpha r-\mu)^{m+1}} = \frac{m+1.m+2\dots m+n}{1.2\dots n}.\frac{1}{\alpha^{m+n+1}}\int_{-1}^{+1}\mu^n P_{n.0}(\mu)\partial\mu.$$

Setzt man zugleich statt $1-(\alpha r)^2$ und $1-(\alpha r_1)^2$ respective $-(\alpha r)^2$ und $-(\alpha r_1)^2$ und bemerkt, dafs

$$\int_{-1}^{+1}\mu^n P_{n.0}(\mu)\partial\mu = \frac{2}{2n+1}.\frac{1.2\dots n}{1.3\dots 2n-1}$$

ist, so erhält man als Grenzwerth:

$$16. \quad (\alpha P_{n.m}(\alpha r)Q_{n.m}(\alpha r))_{\alpha=\infty}$$
$$= \frac{2}{2n+1}(n+1.n+2\dots n+m)(n.n-1\dots n-m+1)\frac{r^n}{r_1^{n+1}}.$$

Für $m=0$ erhält man

$$17.\quad (\alpha P_{n,0}(\alpha r)\,Q_{n,0}(\alpha r_1))_{\alpha=\infty} = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{r^n}{r_1^{n+1}}.$$

3. Es sollen die Grenzwerthe von

$$Q_{n.m}(\sigma),\quad P_{n,m}\sigma\, Q_{n,m}(\sigma) \quad \text{und} \quad (1-\sigma^2)\frac{dP_{n,m}(\sigma)}{d\sigma}\cdot Q_{n,m}(\sigma)$$

für $\sigma=1$ bestimmt werden.

In dem Integral

$$Q_{n,m}(\sigma) = (-1)^m 1.2\ldots m(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\int_{-1}^{+1}\frac{P_{n,0}(\mu)\,\partial\mu}{(\sigma-\mu)^{m+1}}$$

ist wegen des Factors $(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}$, wenn σ sich der Einheit nähert, nur die obere Grenze zu berücksichtigen. Setzt man $\sigma-(\sigma-\mu)$ statt μ in $P_{n,0}(\mu)$ und ordnet diese Function nach den Potenzen von $\sigma-\mu$, so erhält man das unbestimmte Integral

$$\int\frac{\partial\mu\, P_{n,0}(\mu)}{(\sigma-\mu)^{m+1}} = -\frac{1}{m}\cdot\frac{P_{n,0}(\sigma)}{(\sigma-\mu)^m} - \frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(\sigma-\mu)^{m-1}}\cdot\frac{d.P_{n,0}(\sigma)}{d\sigma} - \ldots;$$

wofür man, indem man die obere Integrationsgrenze $\mu=1$ einführt, wenn σ der Einheit sich nähert,

$$-\frac{(-1)^m}{m}\cdot\frac{P_{n,0}(\sigma)}{(1-\sigma)^m}$$

schreiben kann. Substituirt man diesen Werth in $Q_{n,m}(\sigma)$ und setzt $2^{\frac{1}{2}m}(1-\sigma)^{\frac{1}{2}m}$ statt $(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}$, so erhält man, da $P_{n,0}(1)$ nach einem bekannten Satze $=1$ ist:

$$18.\quad (Q_{n,m}(\sigma))_{\sigma=1} = -\left(\frac{1.2\ldots m-1.2^{\frac{1}{2}m}}{(1-\sigma)^{\frac{1}{2}m}}\right)_{\sigma=1} = \infty.$$

Aus der Gleichung (9.) ergiebt sich direct, dafs auch

$$19.\quad (Q_{n,0}(\sigma))_{\sigma=1} = \infty \text{ ist.}$$

Aus (18.) und (2.) ergiebt sich

$$20.\quad (P_{n,m}\sigma\, Q_{n,m}(\sigma))_{\sigma=1} = -1.2\ldots m-1.2^{\frac{1}{2}m}\left(\frac{d^m P_{n,0}(\sigma)}{d\sigma^m}\right)_{\sigma=1},$$

so lange m nicht Null ist, oder, wenn für $\left(\frac{d^m P_{n,0}\sigma}{d\sigma^m}\right)_{\sigma=1}$ sein Werth

$$21.\quad \left(\frac{d^m P_{n,0}(\sigma)}{d\sigma^m}\right)_{\sigma=1} = \frac{n-m+1.n-m+2\ldots n\ldots n+m}{1.2\ldots m.2^m}$$

gesetzt wird:

$$22.\quad (P_{n,m}(\sigma)\,Q_{n,m}(\sigma))_{\sigma=1} = -\frac{n-m+1.n-m+2\ldots n\ldots n+m}{m.2^{\frac{1}{2}m}}.$$

Für $m=0$ giebt die Gleichung (9.)

$$23.\quad (P_{n,0}(\sigma)\cdot Q_{n,0}(\sigma))_{\sigma=1} = \infty.$$

Aus der Gleichung

$$(1-\sigma^2)\frac{d.P_{n.m}(\sigma)}{d\sigma} = -m\sigma(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m.P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m}+(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}(m+2)}\frac{d^{m+1}.P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^{m+1}},$$

verbunden mit (18.) und (21.), folgt

$$24.\quad \left((1-\sigma^2)\frac{d.P_{n.m}(\sigma)}{d\sigma}.Q_{n.m}(\sigma)\right)_{\sigma=1} = -n-m+1.n-m+2....n....n+m,$$

so lange m nicht Null ist; für $m=0$ ist

$$25.\quad (1-\sigma^2)\frac{d.P_{n.0}\sigma}{d\sigma}.Q_{n.0}(\sigma) = 0.$$

4. Es sollen die Werthe für

$$26.\quad Q_{n.m}(s\surd-1) = (-1)^m 1.2....m(1+s^2)^{\frac{1}{2}m}\int_{-1}^{+1}\frac{P_{n.0}(\mu)\partial\mu}{(s\surd(-1)-\mu)^{m+1}},$$

wenn $s=0$ wird, bestimmt werden.

Ich untersuche zuerst die Fälle, wo $n-m-1$ eine *ungerade* Zahl ist. Setzt man für $P_{n.0}(\mu)$ seinen Werth aus (4.), führt die Integration aus und setzt $s=0$, so zerstören sich alle Glieder, mit Ausnahme desjenigen, welches von dem Gliede in $P_{n.0}(\mu)$ herrührt, welches μ^m enthält. Dies Glied hat folgenden Werth:

$$\frac{1.3....2n-1.\mu^m}{(1.2....m)(2.4....n-m)(2n-1.2n-3.....n+m+1)},$$

so dafs der in Rede stehende Grenzwerth von $Q_{n.m}(s\surd-1)$

$$(-1)^m\frac{1.3....2n-1\int_{-1}^{+1}\frac{\mu^m\partial\mu}{(s\surd(-1)-\mu)^{m+1}}}{(2.4....n-m)(2n-1.2n-3....n+m+1)}$$

wird. Nun ist, wenn sich s der Null nähert, der Grenzwerth von $\int_{-1}^{+1}\frac{\mu^m\partial\mu}{(s\surd(-1)-\mu)^{m+1}}$ gleich dem Grenzwerthe von $(-1)^m\int_{-1}^{+1}\frac{\partial\mu}{s\surd(-1)-\mu}$, und dieser ist $=(-1)^m\surd(-1)\pi$, wenn π die *Ludolf*sche Zahl bezeichnet. Demnach erhält man, wenn $n-m$ eine gerade Zahl ist:

$$27.\quad (Q_{n.m}(s\surd-1))_{s=0} = \frac{1.3....2n-1}{(2.4....n-m)(2n-1....2n-3....n+m+1)}.\pi\surd-1,$$

und hierin $m=0$ gesetzt, giebt:

$$28.\quad (Q_{n.0}(s\surd-1))_{s=0} = \frac{1.3....n-1}{2.4....n}.\pi\surd-1;$$

wo jedoch n eine *gerade* Zahl sein mufs.

Um den Werth von $Q_{n.m}(s\surd-1)$ für die Fälle zu bestimmen, in welchen $n-m$ eine *ungerade* Zahl ist, erinnere ich an den sonst schon bekannten

Werth von $\int_{-1}^{+1} \mu^p P_{n.0}(\mu)\partial\mu$. Wenn n und p *gerade* sind, so ist

$$\int_{-1}^{+1} \mu^p P_{n.0}(\mu)\partial\mu = 2\frac{p.p-2\dots p-n+2}{p+1.p+3\dots p+n+1},$$

und wenn n und p *ungerade* sind, hat man

$$\int \mu^p P_{n.0}(\mu)\partial\mu = 2\frac{p-1.p-3\dots p-n+2}{p+2.p+4\dots p+n+1}.$$

Diese Formeln gelten für positive und negative Werthe von p.

Mittels dieser Formeln erhält man aus (26.), indem darin $s=0$ und $p=-(m+1)$ gesetzt wird:

$$29.\quad (Q_{n.m}(s\sqrt{-1}))_{s=0} = -2(-1)^{\frac{1}{2}(n+m+1)}\frac{2.4\dots m+n-1}{1.3\dots n-m},$$

wo $n-m$ eine ungerade Zahl sein mufs; und hieraus

$$30.\quad (Q_{n.0}(s\sqrt{-1}))_{s=0} = -2(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}\frac{2.4\dots n-1}{1.3\dots n},$$

wo n *ungerade* sein mufs.

§. 2.

Die reciproke Entfernung zweier Puncte, von denen der eine innerhalb des gegebenen Rotations-Ellipsoïds

$$1.\quad \frac{x_0^2}{r_0^2}+\frac{y_0^2}{r_0^2}+\frac{z_0^2}{r_0^2-\lambda^2} = 1$$

liegt, der andere aufserhalb desselben, soll in eine nach den Kugelfunctionen $Y^{(n)}$ fortschreitende Reihe entwickelt werden. Es seien x, y, z die Coordinaten des innern Puncts und x_1, y_1, z_1 die des äufsern Puncts. Statt dieser rechtwinkligen Coordinaten werden drei andere eingeführt, nemlich die Aequatorial-Axe des mit dem gegebenen confocalen Ellipsoïd, welches durch den Punct geht, und zwei Winkel, durch welche seine Lage auf dieser confocalen Fläche bestimmt wird. Es wird gesetzt:

$$2.\quad \begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi, & x_1 = r_1\sin\vartheta_1\cos\varphi_1, \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi, & y_1 = r_1\sin\vartheta_1\sin\varphi_1, \\ z = \sqrt{(r^2-\lambda^2)}\cos\vartheta, & z_1 = \sqrt{(r_1^2-\lambda^2)}\cos\vartheta_1. \end{cases}$$

Wird die Entfernung beider Puncte durch e bezeichnet, so ist

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{\{r^2-\lambda^2\cos^2\vartheta+r_1^2-\lambda^2\cos^2\vartheta_1-2\sqrt{(r^2-\lambda^2)}\sqrt{(r_1^2-\lambda^2)}\cos\vartheta\cos\vartheta_1-2rr_1\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)\}}},$$

oder, wenn

$$3.\quad \frac{\lambda}{e} = v$$

und

$$\cos\vartheta = \mu, \quad \frac{r}{\lambda} = \varrho, \quad \sigma^2 + \varrho^2 = 1,$$

$$\cos\vartheta_1 = \mu_1, \quad \frac{r_1}{\lambda} = \varrho_1, \quad \sigma_1^2 + \varrho_1^2 = 1$$

gesetzt wird,

$$4. \quad v = \frac{1}{\sqrt{\{2-\sigma^2-\sigma_1^2-\mu^2-\mu_1^2+2\sigma\sigma_1\mu\mu_1-2\sqrt{(1-\sigma^2)}\sqrt{(1-\sigma_1^2)}\sqrt{(1-\mu^2)}\sqrt{(1-\mu_1^2)}\cos(\varphi-\varphi_1)\}}}.$$

Diesen Ausdruck für v will ich in eine nach den $Y^{(n)}$ fortschreitende Reihe entwickeln; die $Y^{(n)}$ als Functionen von μ und φ oder μ' und φ_1 betrachtet.

Ich bemerke, dafs bei *abgeplatteten* Ellipsoïden, weil für sie λ reell ist, sowohl σ als σ_1 imaginär sind, und dafs hier σ zwischen 0 und $\sqrt{\left(\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2-1\right)}\sqrt{-1}$ liegt, während σ_1 zwischen $\sqrt{\left(\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2-1\right)}\sqrt{-1}$ und ∞ seinen Werth hat. Bei *verlängerten* Ellipsoïden ist λ imaginär; daher sind hier σ und σ_1 reell; ersteres liegt zwischen 1 und $\sqrt{\left(\frac{r_0^2}{\lambda^2}+1\right)}$, letzteres zwischen $\sqrt{\left(\frac{r_0^2}{\lambda^2}+1\right)}$ und ∞.

Bildet man von der in Bezug auf σ, σ_1, μ, μ_1 symmetrischen Function v den Differential-Ausdruck

$$\frac{d(1-\mu^2)\frac{dv}{d\mu}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{d^2v}{d\varphi^2},$$

so findet man dessen Werth (den ich nicht hinschreiben will) in Bezug auf σ, σ_1, μ und μ_1 wiederum symmetrisch. Der Werth dieses Ausdrucks bleibt also ungeändert, wenn man eine dieser Gröfsen gegen die andere vertauscht. Daraus folgen die drei Differentialgleichungen

$$5. \quad \frac{d(1-\mu^2)\frac{dv}{d\mu}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{d^2v}{d\varphi^2} = \frac{d(1-\mu_1^2)\frac{dv}{d\mu_1}}{d\mu_1} + \frac{1}{1-\mu_1^2}\cdot\frac{d^2v}{d\varphi_1^2}$$

$$= \frac{d(1-\sigma^2)\frac{dv}{d\sigma}}{d\sigma} + \frac{1}{1-\sigma^2}\cdot\frac{d^2v}{d\varphi^2} = \frac{d(1-\sigma_1^2)\frac{dv}{d\sigma_1}}{d\sigma_1} + \frac{1}{1-\sigma_1^2}\cdot\frac{d^2v}{d\varphi_1^2},$$

in welchen φ mit φ_1, wie aus (4.) ersichtlich ist, vertauscht werden kann.

Diese Differentialgleichungen sollen zur Entwicklung des v nach den $Y^{(n)}$ benutzt werden. Sie bestimmen diese Entwicklung bis auf ihre Zahlencoëfficienten, deren Werth durch anderweitige Bedingungen, welchen v zu genügen hat, ermittelt werden mufs. Folgende drei Bedingungen lassen diese Absicht vollständig erreichen.

1. Die Entwicklung mufs für v einen endlichen Werth geben, wo auch der innere Punct in dem gegebenen Ellipsoïd liegen mag; also auch wenn derselbe in der Brenn-Ebene des abgeplatteten Ellipsoïds, oder in der Brenn-Linie des verlängerten liegt, d. h. respective wenn $\sigma = s\sqrt{-1}$ verschwindet, oder wenn $\sigma = 1$ ist.

2. Der partielle Differentialquotient von v, nach irgend einer Richtung in Bezug auf den innern Punct, mufs einen endlichen Werth haben; auch wenn dieser Punct in der Brenn-Ebene des abgeplatteten Ellipsoïds, oder in der Brenn-Linie des verlängerten Ellipsoïds liegt.

3. Wenn λ verschwindet, also das Ellipsoïd in eine Kugel sich verwandelt, mufs die Entwicklung in elliptischen Coordinaten mit der bekannten Entwicklung von $\frac{1}{\varepsilon}$ in Kugel-Coordinaten identisch werden.

Die erste Bedingung entspricht derjenigen, welche bei der Entwicklung der Gröfse $\frac{1}{\varepsilon}$, wenn sie in Kugel-Coordinaten ausgedrückt ist, zur Bestimmung der Constanten angewandt wird, und wird dort so ausgesprochen, dafs $\frac{1}{\varepsilon}$ einen endlichen Werth haben mufs, wenn der innere Punct im Mittelpunct der Kugel liegt. Derselbe gewährt für die Entwicklung in elliptischen Coordinaten denselben Nutzen, wenn das Ellipsoïd ein verlängertes ist; sie ist aber erfolglos bei abgeplatteten Ellipsoïden. Bei diesen tritt an die Stelle der ersten Bedingung die zweite; welcher übrigens bei verlängerten Ellipsoïden Genüge geschieht, wenn die erste erfüllt ist.

Setzt man in die zweite der Gleichungen (5.), nemlich in

$$\frac{d\cdot\overline{1-\mu^2}\frac{dv}{d\mu}}{d\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{d^2v}{d\varphi^2}=\frac{d\cdot\overline{1-\sigma^2}\frac{dv}{d\sigma}}{d\sigma}+\frac{1}{1-\sigma^2}\cdot\frac{d^2v}{d\varphi^2}$$

die Reihe

$$6.\quad v=\sum_0^\infty {}^n\, Y^{(n)},$$

wo $Y^{(n)}$ der Gleichung

$$7.\quad \frac{d\cdot\overline{1-\mu^2}\frac{dY^{(n)}}{d\mu}}{d\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{d^2Y^{(n)}}{d\varphi^2}=-n.\overline{n+1}.Y^{(n)}$$

genügt, so erhält man

$$\sum_0^\infty {}^n\left\{\frac{d.\overline{1-\sigma^2}\frac{dY^{(n)}}{d\sigma}}{d\sigma}+\frac{1}{1-\sigma^2}\cdot\frac{d^2Y^{(n)}}{d\varphi^2}+n.\overline{n+1}.Y^{(n)}\right\}=0;$$

woraus folgt, dafs

$$8.\quad \frac{d.\overline{1-\sigma^2}\frac{dY^{(n)}}{d\sigma}}{d\sigma}+\frac{1}{1-\sigma^2}\cdot\frac{d^2Y^{(n)}}{d\varphi^2}+n.\overline{n+1}.Y^{(n)} = 0 \text{ ist.}$$

Der allgemeinste Ausdruck für $Y^{(n)}$ ist

$$9.\quad Y^{(n)} = \sum_0^n{}^m P_{n.m}(\mu)\{S_{n.m}\cos m\varphi + T_{n.m}\sin m\varphi\},$$

wo $S_{n.m}$ und $T_{n.m}$ beliebige, aber von μ und φ unabhängige Gröfsen sind. In dem vorliegenden Falle verwandelt sich dieser Ausdruck, weil v nur eine Function von $\cos(\varphi-\varphi')$ ist, in

$$10.\quad Y^{(n)} = \sum_0^n{}^m S_{n.m}P_{n.m}(\mu)\cos m(\varphi-\varphi').$$

Dieser Werth in (8.) substituirt, giebt

$$\sum_0^n{}^m\left\{\frac{d.\overline{1-\sigma^2}\frac{dS_{n.m}}{d\sigma}}{d\sigma}+\left(n.\overline{n+1}-\frac{m^2}{1-\sigma^2}\right)S_{n.m}\right\}\cos m(\varphi-\varphi') = 0,$$

woraus

$$\frac{d.\overline{1-\sigma^2}\frac{dS_{n.m}}{d\sigma}}{d\sigma}+\left(n.\overline{n+1}-\frac{m^2}{1-\sigma^2}\right)S_{n.m} = 0$$

folgt.

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist

$$11.\quad S_{n.m} = A_{n.m}P_{n.m}(\sigma)+B_{n.m}Q_{n.m}(\sigma),$$

wo $A_{n.m}$ und $B_{n.m}$ nur noch Functionen von μ_1 und σ_1 sind.

Setzt man in die Reihe (6.) in die erste der Gleichungen (5.), nemlich in

$$\frac{d.\overline{1-\mu^2}\frac{dv}{d\mu}}{d\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{d^2v}{d\varphi^2} = \frac{d.\overline{1-\mu_1^2}\frac{dv}{d\mu_1}}{d\mu_1}+\frac{1}{1-\mu_1^2}\cdot\frac{d^2v}{d\varphi_1^2},$$

so erhält man

$$\frac{d.\overline{1-\mu_1^2}\frac{dY^{(n)}}{d\mu_1}}{d\mu_1}+\frac{1}{1-\mu_1^2}\cdot\frac{d^2Y^{(n)}}{d\varphi_1^2}+n.\overline{n+1}.Y^{(n)} = 0,$$

und hierin den Werth von $Y^{(n)}$ aus (10.) gesetzt, giebt

$$\frac{d.\overline{1-\mu_1^2}\frac{dS_{n.m}}{d\mu_1}}{d\mu_1}+\left(n.\overline{n+1}-\frac{m^2}{1-\mu_1^2}\right)S_{n.m} = 0;$$

woraus folgt, dafs

$$S_{n.m} = a_{n.m}P_{n.m}(\mu_1)+b_{n.m}Q_{n.m}(\mu_1)$$

ist, wo aber, weil $Q_{n.m}(\mu_1)$ für $\mu_1 = 1$ nach (18. §. 1.) unendlich wird, $b_{n.m} = 0$ sein mufs *). Die Vergleichung dieses Ausdrucks von $S_{n.m}$ mit demjenigen in (11.) zeigt, dafs

$$A_{n.m} = \alpha_{n.m} P_{n.m}(\mu_1), \qquad B_{n.m} = \beta_{n.m} P_{n.m}(\mu_1)$$

sein mufs, und dafs demnach der Ausdruck in (10.) sich in

$$12. \quad Y^{(n)} = \sum_0^n \{\alpha_{n.m} P_{n.m}(\sigma) + \beta_{n.m} Q_{n.m}(\sigma)\} P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi_1)$$

verwandelt; wo $\alpha_{n.m}$ und $\beta_{n.m}$ nur noch Functionen von σ_1 sind.

Setzt man die Reihe für v (6.) in die dritte der Gleichungen (5), nemlich in

$$\frac{d.1-\mu^2 \frac{dv}{d\mu}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2} \cdot \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = \frac{d.1-\sigma_1^2 \frac{dv}{d\sigma_1}}{d\sigma_1} + \frac{1}{1-\sigma_1^2} \cdot \frac{d^2 v}{d\varphi_1^2},$$

woraus sich

$$\frac{d.1-\sigma_1^2 \frac{dY^{(n)}}{d\sigma_1}}{d\sigma_1} + \frac{1}{1-\sigma_1^2} \frac{d^2 Y^{(n)}}{d\varphi_1^2} + n.n+1.Y^{(n)} = 0$$

ergiebt, und hierin für $Y^{(n)}$ seinen Werth aus (12.), so erhält man

$$\left\{\frac{d.1-\sigma_1^2 \frac{d\alpha_{n.m}}{d\sigma_1}}{d\sigma_1} + \left(n.n+1-\frac{m^2}{1-\sigma_1^2}\right)\alpha_{n.m}\right\} P_{n.m}(\sigma)$$
$$+ \left\{\frac{d.1-\sigma_1^2 \frac{d\beta_{n.m}}{d\sigma_1}}{d\sigma_1} + \left(n.n+1-\frac{m^2}{1-\sigma_1^2}\right)\beta_{n.m}\right\} Q_{n.m}(\sigma) = 0.$$

Da $\alpha_{n.m}$ und $\beta_{n.m}$ unabhängig von σ sind, so müssen die Factoren von $P_{n.m}(\sigma)$ und $Q_{n.m}(\sigma)$ für sich verschwinden. Hieraus folgt

$$13. \quad \begin{cases} \alpha_{n.m} = e_{n.m} P_{n.m}(\sigma_1) + f_{n.m} Q_{n.m}(\sigma_1), \\ \beta_{n.m} = g_{n.m} P_{n.m}(\sigma_1) + h_{n.m} Q_{n.m}(\sigma_1), \end{cases}$$

wo $e_{n.m}$, $f_{n.m}$, u. s. w. nur noch Zahlencoëfficienten sind.

---

*) Wenn man (10.) in (6.) substituirt, erhält man

$$v = \sum_0^\infty \sum_0^n S_{n.m} P_{n.m}(\mu) \cos(\varphi - \varphi'),$$

und hieraus

$$S_{n.m} \cos m\varphi' = p \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} v P_{n.m}(\mu) \cos m\varphi \, \partial\mu \, \partial\varphi;$$

wo p ein Zahlencoëfficient ist, den ich nicht hinschreiben will. Es erhellet aus dieser Gleichung, dafs, da v endlich ist, $S_{n.m}$ nicht unendlich werden darf.

Dafs $e_{n.m} = 0$ und $g_{n.m} = 0$ sein mufs, erhellet sofort daraus, dafs sonst nach (15. §. 1.) $Y^{(n)}$ und somit v unendlich grofs werden würde, wenn der aufserhalb des Ellipsoïds liegende Punct unendlich weit läge. Mit Rücksicht hierauf erhält man also aus (13., 12. und 6.):

$$14.\quad v = \sum_0^\infty {}^n \sum_0^n {}^m \{f_{n.m} P_{n.m}(\sigma) + h_{n.m} Q_{n.m}(\sigma)\} Q_{n.m}(\sigma_1) P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu_1) \cos m(\varphi - \varphi').$$

Ich werde nachweisen, dafs auch $h_{n.m} = 0$ ist, das gegebene Ellipsoïd in (1.) mag ein abgeplattetes oder ein verlängertes sein. Für ein verlängertes Ellipsoïd erhellet dies sofort daraus, dafs σ, welches hier reell ist, der Einheit gleich werden kann, wenn nemlich der innere Punct in der Brennlinie liegt; und dafs nach (18. und 19. §. 1.) $Q_{n.m}(\sigma)$ für $\sigma = 1$ unendlich grofs wird. Es bedarf also nur noch der Nachweisung, dafs auch bei abgeplatteten Ellipsoïden $h_{n.m} = 0$ ist. Die entsprechende Betrachtung bei diesen hat den innern Punct in die Brenn-Ebene zu legen; sie entscheidet über $h_{n.m}$ aber Nichts, weil $Q_{n.m}(s\sqrt{-1})$ bei verschwindendem s nach (29. und 30. §. 1.) einen endlichen Werth behält. Die Anwendung der obigen zweiten Bedingung entscheidet über den Werth dieser Gröfse. Um nachzuweisen, dafs der Differentialquotient von v, nach einer beliebigen Richtung, in Bezug auf den innern Punct einen endlichen Werth habe, ist es hinreichend, es für drei auf einander rechtwinklige Richtungen zu thun. Ich wähle zu diesen Richtungen die durch den innern Punct gelegte Normale desjenigen Ellipsoïds, welches durch ihn confocal mit dem gegebenen Ellipsoïd gelegt ist, seinen Meridian und seinen Parallelkreis, und nenne die in dem Puncte sich rechtwinklig schneidenden Elemente dieser drei Richtungen respective dn, dm, dp. Man erhält für die partiellen Differentialquotienten von v nach diesen Richtungen:

$$\frac{dv}{dn} = \frac{\sqrt{r^2-\lambda^2)}}{\sqrt{(r^2-\lambda^2\sin\vartheta)}}\cdot\frac{dv}{dr},\quad \frac{dv}{dm} = \frac{1}{\sqrt{(r^2-\lambda^2\sin\vartheta)}}\cdot\frac{dv}{d\vartheta},\quad \frac{dv}{dp} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\cdot\frac{dv}{d\varphi}$$

oder

$$\frac{dv}{dn} = -\frac{\sqrt{-1}}{\lambda}\cdot\frac{\sqrt{(1-\sigma^2)}}{\sqrt{(\mu^2-\sigma^2)}}\cdot\frac{dv}{d\sigma},\quad \frac{dv}{dm} = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\sqrt{(\mu^2-\sigma^2)}}\cdot\frac{dv}{d\mu},\quad \frac{dv}{dp} = \frac{1}{\lambda\sqrt{(1-\sigma^2)}\sqrt{(1-\mu^2)}}\cdot\frac{dv}{d\varphi}.$$

Ich betrachte zuerst den Differentialquotienten $\frac{dv}{dn}$. Derselbe wird, wenn man darin $\sigma = 0$ setzt:

$$\left(\frac{dv}{dn}\right)_{\sigma=0} = -\frac{\sqrt{-1}}{\lambda\mu}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)_{\sigma=0}.$$

Hierin ist auf der rechten Seite für v sein Werth aus (14.) zu substituiren.

Vor dieser Substitution bemerke man, dafs aus

$$\frac{dQ_{n.m}(\sigma)}{d\sigma} = -m\sigma(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m-1}\frac{d^m Q_{n.0}(\sigma)}{d\sigma} + (1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^{m+1}Q_{n.0}(\sigma)}{d\sigma}$$
$$= -\frac{m\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)}}Q_{n.m}(\sigma) + \frac{1}{\sqrt{(1-\sigma^2)}}Q_{n.m+1}(\sigma)$$

folgt:

$$\left(\frac{dQ_{n.m}(\sigma)}{d\sigma}\right)_{\sigma=0} = (Q_{n.m+1}(\sigma))_{\sigma=0}$$

und eben so ergiebt sich

$$\left(\frac{dP_{n.m}(\sigma)}{d\sigma}\right)_{\sigma=0} = (P_{n.m+1}(\sigma))_{\sigma=0},$$

so dafs

$$\left(\frac{dv}{dn}\right)_{\sigma=0} = -\sqrt{-1}\sum_0^\infty{}_n\sum_0^n{}_m\{f_{n.m}(P_{n.m+1}(\sigma))_{\sigma=0} + h_{n.m}(Q_{n.m+1}(\sigma))_{\sigma=0}\}$$
$$\times Q_{n.m}(\sigma_1)\frac{P_{n.m}(\mu)}{\mu}P_{n.m}(\mu_1)\cos m(\varphi-\varphi')$$

wird.

Dieser Ausdruck wird, wenn $n-m$ eine *gerade* Zahl ist, für $\mu=0$ unendlich grofs, wenn nicht die in der Parenthese befindliche Gröfse allgemein gleich Null ist. Wenn $n-m$ eine gerade Zahl ist, verschwindet $(P_{n.m+1}(\sigma))_{\sigma=0}$; es ist also hinreichend und nothwendig, dafs $h_{n.m}$ gleich Null sei, wenn $n-m$ *gerade* ist. Aus der Discussion von

$$\left(\frac{dv}{dm}\right)_{\sigma=0} = \frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\lambda\mu}\left(\frac{dv}{d\mu}\right)_{\sigma=0}$$

folgt eben so, dafs, da $\left(\frac{dv}{dm}\right)_{\sigma=0}$ nicht für $\mu=0$ unendlich grofs werden darf, $h_{n.m}$ verschwinden mufs, wenn $n-m$ *ungerade* ist. Diese Gröfse ist also in *allen* Fällen gleich Null. Der dritte Differentialquotient $\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\sigma=0}$ hat immer einen endlichen Werth, welches auch die Lage des innern Punctes sei.

Demnach verwandelt sich (14.), wenn statt v sein Werth aus (3.) gesetzt wird, in

15. $$\frac{1}{e} = \frac{1}{\lambda}\sum_0^\infty{}_n\sum_0^n{}_m f_{n.m}P_{n.m}\sigma\, Q_{n.m}(\sigma_1)P_{n.m}(\mu)P_{n.m}(\mu_1)\cos m(\varphi-\varphi'),$$

wo nur noch die Zahlencoëfficienten $f_{n.m}$ zu bestimmen sind. Diese Bestimmung findet sich, wenn in dem vorstehenden Ausdruck $\lambda=0$ gesetzt wird, wodurch er in den Ausdruck übergehn mufs, welchen *Laplace* in der „Mec. cel." für die Entwicklung von $\frac{1}{e}$ nach den $Y^{(n)}$ in sphärischen Coordinaten gege-

ben hat. Dieser ist folgender:

$$16.\quad \frac{1}{e} = \Sigma\Sigma 2 b_{n.m} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu_1) \cos m(\varphi - \varphi'),$$

wo

$$16.b.\quad b_{n.m} = \frac{1}{(n-m+1.n-m+2....n)(n+1.n+2....n+m)}.$$

Für $m=0$ ist $b_{n.0}=1$; in diesem Falle ist aber nur sein halber Werth zu nehmen.

Aus der Vergleichung von (16.) mit (15.) folgt, dafs

$$17.\quad \left(\frac{1}{\lambda} f_{n.m} P_{n.m}(\sigma) Q_{n.m}(\sigma_1)\right)_{\lambda=0} = 2 b_{n.m} \frac{r^n}{r_1^{n+1}}$$

sein mufs; wodurch $f_{n.m}$ seine Werthbestimmung erhält. Wenn λ der Null sich nähert, wird $\sigma = \sqrt{-1}\frac{r}{\lambda}$ und $\sigma_1 = \sqrt{-1}\frac{r_1}{\lambda}$. Setzt man in (16. §. 1.) $\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{\lambda}$, so erhält man

$$\left(\frac{1}{\lambda} P_{n.m}(\sigma) Q_{n.m}(\sigma_1)\right)_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{2}{2n+1} (n-m+1.n-m+2....n)(n+1.n+2....n+m)$$

$$= \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{b_{n.m}}{\sqrt{-1}}.$$

Dieser Werth, in (17.) gesetzt, giebt

$$f_{n.m} = \sqrt{-1}(2n+1)(b_{n.m})^2$$

und in Rücksicht auf die obige Bemerkung in Bezug auf $b_{n.0}$:

$$f_{n.0} = \sqrt{-1}.\tfrac{1}{2}(2n+1).$$

Die verlangte Entwicklung von $\frac{1}{e}$ ist hierdurch vollständig ausgeführt, und hat folgendes Resultat gegeben:

$$18.\quad \frac{1}{e} = \frac{\sqrt{-1}}{\lambda} \sum_0^{\infty}{}_n \sum_0^{n}{}_m (2n+1)(b_{n.m})^2 P_{n.m}(\sigma) Q_{n.m}(\sigma_1) P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu_1) \cos m(\varphi - \varphi');$$

wo $b_{n.m}$ durch (16. *b.*) gegeben ist, und wobei zu bemerken, dafs in den Gliedern, für welche $m=0$ ist, $b_{n.0}=1$ ist, und dafs diese Glieder noch mit $\frac{1}{2}$ zu multipliciren sind.

Aus der vorstehenden Reihen-Entwicklung von $\frac{1}{e}$ folgt der allgemeine Ausdruck in elliptischen Coordinaten von der Function, welcher *Gaufs* den Namen *Potential* gegeben hat. Bezeichnet k ein Massentheilchen und e dessen Entfernung von dem Puncte P, auf welchen das Potential bezogen

werden soll, so wird diese Function der Coordinaten des Puncts P, die durch V bezeichnet werden möge, definirt durch

$$19. \quad V = S\frac{k}{\varepsilon},$$

wenn die durch S bezeichnete Summation auf alle k ausgedehnt wird.

Wir unterscheiden drei Fälle. Entweder liegen sämmtliche Massentheile innerhalb eines durch den Punct P beschriebenen Rotations-Ellipsoïds, oder sie liegen sämmtlich aufserhalb, oder sie liegen zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb. Im ersten Falle werde das Potential durch V_a, im zweiten durch V_i bezeichnet, und für den dritten Fall bleibe V ohne Index. Ich werde zuerst V_a darstellen. Es seien r_1 und $\sqrt{(r_1^2 - \lambda^2)}$ die Axen des durch P gelegten Ellipsoïds, deren Werth und Lage beliebig durch anderweitige Rücksichten zweckmäfsig bestimmt werden wird. Durch μ_1 und φ_1 werde die Lage von P auf dieser Oberfläche bestimmt. Das Massentheilchen k werde seiner Lage nach durch das confocale Ellipsoïd mit den Axen r und $\sqrt{(r^2 - \lambda^2)}$ und durch μ und φ bestimmt. Substituirt man in (19.) statt $\frac{1}{\varepsilon}$ seinen Werth aus (18.) und setzt

$$20. \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{-1}}{\lambda} 2n+1\,(b_{n.m})^2 Sk P_{n.m}(\sigma) P_{n.m}(\mu) \cos m\varphi = A_{n.m}, \\ \frac{\sqrt{-1}}{\lambda} 2n+1\,(b_{n.m})^2 Sk P_{n.m}(\sigma) P_{n.m}(\mu) \sin m\varphi = B_{n.m}, \end{cases}$$

so lange m nicht $=0$ ist, in welchem Falle für $A_{n.0}$ und $B_{n.0}$ nur die halben vorstehenden Werthe zu nehmen sind: so erhält man

$$21. \quad V_a = \sum_0^{\infty}{}^n \sum_0^{n}{}^m Q_{n.m}(\sigma_1) P_{n.m}(\mu_1) \{A_{n.m} \cos m\varphi_1 + B_{n.m} \sin m\varphi_1\}.$$

Ebenso erhält man

$$22. \quad V_i = \Sigma\Sigma P_{n.m}(\sigma) P_{n.m}(\mu) \{C_{n.m} \cos\varphi + D_{n.m} \sin m\varphi\},$$

wenn in diesem Falle σ, μ, φ die Coordinaten des Puncts P sind, und σ_1, μ_1, φ_1 die des Massentheilchen k und

$$23. \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{-1}}{\lambda} 2n+1\,(b_{n.m})^2 Sk Q_{n.m}(\sigma_1) P_{n.m}(\mu_1) \cos m\varphi_1 = C_{n.m}, \\ \frac{\sqrt{-1}}{\lambda} 2n+1\,(b_{n.m})^2 Sk Q_{n.m}(\sigma_1) P_{n.m}(\mu_1) \sin m\varphi_1 = D_{n.m} \end{cases}$$

gesetzt wird.

Das Potential von Massen, welche zum Theil innerhalb des durch P gelegten Ellipsoïds, zum Theil aufserhalb liegen, also irgendwie im Raume

vertheilt sind, ist, wenn σ, μ, φ die Coordinaten des Puncts P bezeichnen,

$$24.\quad V = \sum_0^{\infty}{}^n \sum_0^{n}{}^m P_{n.m}(\mu)\{(A_{n.m}Q_{n.m}(\sigma)+C_{n.m}P_{n.m}(\sigma))\cos m\varphi$$
$$+(B_{n.m}Q_{n.m}(\sigma)+D_{n.m}P_{n.m}(\sigma))\sin m\varphi\};$$

wo die Constanten A, B, C und D durch (20. und 23.) zu bestimmen sind, mit der Maafsgabe, dafs in (20.) die Summation auf alle innerhalb des durch P gelegten Ellipsoïds liegende Massen auszudehnen ist, in (23.) auf alle aufserhalb liegende Massen.

Ich werde beispielsweise die Formel (21.) zur Bestimmung des Potentials eines homogenen Rotations-Ellipsoïds in Bezug auf einen äufsern Punct P anwenden. Ich nenne r_0 und $\sqrt{(r_0^2-\lambda^2)}$ die Axen des gegebenen Ellipsoïds, und mache das durch P zu legende mit ihm confocal; ich bezeichne wieder die Coordinaten dieses Punctes durch σ_1, μ_1, φ_1, während die eines Massentheilchens k in dem gegebenen Ellipsoïd σ, μ, φ sein sollen. Ich nehme die Dichtigkeit der Masse dieses Ellipsoïds der Einheit gleich an, so dafs k ein räumliches Element desselben ist; dazu wähle ich das kleine Prisma, dessen Basis das Element der Oberfläche des durch k gelegten confocalen Ellipsoïds und dessen Höhe die Entfernung desselben von einem unendlich nahen confocalen Ellipsoïd ist. Es ist also

$$25.\quad k = \frac{\lambda^3\varrho(\varrho^2-1+\mu^2)}{\sqrt{(\varrho^2-1}}\partial\varrho\,\partial\mu\,\partial\varphi = \frac{\lambda^3}{\sqrt{-1}}(\sigma^2-\mu^2)\partial\sigma\,\partial\mu\,\partial\varphi,$$

und dafür kann man schreiben:

$$k = \tfrac{2}{3}\frac{\lambda^3}{\sqrt{-1}}(P_{2.0}(\sigma)-P_{2.0}(\mu)\,\partial\sigma\,\partial\mu\,\partial\varphi.$$

Dieser Werth von k, in (20.) gesetzt, verwandelt die Summen in Integrale, und zeigt, dafs alle A und B verschwinden; ausgenommen $A_{0.0}$ und $A_{2.0}$. Für diese erhält man aus (20.)

$$A_{0.0} = +\tfrac{2}{3}\pi\lambda^2\sigma_0(\sigma_0^2-1),$$
$$A_{2.0} = -\tfrac{2}{3}\pi\lambda^2\sigma_0(\sigma_0^2-1);$$

wo $\sigma_0 = \sqrt{\left(1-\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2\right)}$ ist. Dies, in (21.) gesetzt, giebt

$$V_a = \tfrac{2}{3}\pi\lambda^2\sigma_0(\sigma_0^2-1)\{Q_{0.0}(\sigma_1)-Q_{2.0}(\sigma_1)P_{2.0}(\mu_1)\},$$

oder, wenn für Q und P ihre Werthe aus (9. und 10 *b*. und 4. §. 1.) gesetzt werden:

$$26.\quad V_a = \tfrac{2}{3}\pi\lambda^2\sigma_0(\sigma_0^2-1)\left\{\log\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1-1}-\tfrac{9}{4}\left((\sigma_1^2-\tfrac{1}{3})\log\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1-1}-2\sigma_1\right)(\mu_1^2-\tfrac{1}{3})\right\};$$

woraus man durch partielle Differentiation die Componenten der Anziehung erhält, welche das Ellipsoïd auf den Punct P ausübt. Nennt man X, Y, Z diese Componenten, parallel mit den x, y, z Axen der Gleichung (1.), und a, b, c die mit ihnen parallelen Coordinaten des Puncts P, so wird

$$X = -\frac{\sqrt{(1-\sigma_1^2)}\sqrt{(1-\mu_1^2)}\cos\varphi_1}{\lambda(\sigma_1^2-\mu_1^2)}\left\{\sigma_1\frac{dV_a}{d\sigma_1}-\mu_1\frac{dV_a}{d\mu_1}\right\},$$

$$Y = -\frac{\sqrt{(1-\sigma_1^2)}\sqrt{(1-\mu_1^2)}\sin\varphi_1}{\lambda(\sigma_1^2-\mu_1^2)}\left\{\sigma_1\frac{dV_a}{d\sigma_1}-\mu_1\frac{dV_a}{d\mu_1}\right\},$$

$$Z = +\frac{\sigma_1\sqrt{-1}\,.\,\mu_1}{\lambda(\sigma_1^2-\mu_1^2)}\left\{\frac{1-\sigma_1^2}{\sigma_1}\cdot\frac{dV}{d\sigma_1}-\frac{1-\mu_1^2}{\mu_1}\cdot\frac{dV_a}{d\mu_1}\right\};$$

und dies giebt die bekannten Ausdrücke

$$27.\quad \begin{cases} X = -2\pi\sigma_0(\sigma_0^2-1)a\left\{\tfrac{1}{2}\log\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1-1}-\frac{\sigma_1}{\sigma_1^2-1}\right\}, \\ Y = -2\pi\sigma_0(\sigma_0^2-1)b\left\{\tfrac{1}{2}\log\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1-1}-\frac{\sigma_1}{\sigma_1^2-1}\right\}, \\ Z = +4\pi\sigma_0(\sigma_0^2-1)c\left\{\tfrac{1}{2}\log\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1-1}-\frac{1}{\sigma_1}\right\}. \end{cases}$$

Wenn das Ellipsoïd, dessen Potential bestimmt werden soll, nicht homogen ist, so ist der Ausdruck für k in (25.) noch mit einer Function von σ, μ und φ zu multipliciren, durch welche die Dichtigkeit der Masse des Ellipsoïds ausgedrückt wird. Wenn das Product dieser Function mit $\sigma^2-\mu^2$ eine ganze rationale Function von σ, μ, $\sqrt{(1-\mu^2)}\cos\varphi$, $\sqrt{(1-\mu^2)}\sin\varphi$ ist, so erhält man immer einen geschlossenen logarithmischen oder trigonometrischen Ausdruck für den Werth des Potentials des nicht homogenen Ellipsoïds in Bezug auf einen aufserhalb desselben liegenden Punct.

§. 3.

In diesem Paragraph sollen die vorstehenden Resultate auf die Bestimmung des magnetischen Zustandes angewendet werden, der durch Vertheilung in einem Rotations-Ellipsoïd erregt ist. Dabei wird vorausgesetzt, dafs die vertheilenden Kräfte von der Art sind, dafs sie sich durch die partiellen Differentialquotienten eines Potentials darstellen lassen; wie z. B. die magnetischen und galvanischen Kräfte.

Bezeichnet man die magnetischen Momente eines magnetisirte Theile enthaltenden Volumens v in Bezug auf die drei Coordinaten-Axen x, y, z respective durch αv, βv, γv, so werden die mit den Coordinaten parallelen Componenten der Wirkung, welche v auf einen Punct P ausübt, der in Beziehung

auf die Dimensionen des Volumens v als unendlich weit entfernt betrachtet werden kann, durch die nach den Coordinaten genommenen partiellen Differentialquotienten von u ausgedrückt, wenn

$$u = v\left\{\alpha\frac{d\frac{1}{\varepsilon}}{dx}+\beta\frac{d\frac{1}{\varepsilon}}{dy}+\gamma\frac{d\frac{1}{\varepsilon}}{dz}\right\},$$

hierin

$$\varepsilon^2 = (a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2$$

ist, und a, b, c und x, y, z die Coordinaten des Puncts P und eines Puncts des Volumens v sind. Die Gröfse u ist das magnetische Potential des Volumens v. Hieraus ergiebt sich, wenn man unter v das räumliche Element eines magnetischen Körpers versteht und durch $\partial x\,\partial y\,\partial z$ ausdrückt, dafs das magnetische Potential dieses Körpers in Bezug auf einen aufserhalb desselben liegenden Punct (welches mit U_a bezeichnet werden soll),

$$1.\quad U_a = \int\partial x\,\partial y\,\partial z\left\{\alpha\frac{d\frac{1}{\varepsilon}}{dx}+\beta\frac{d\frac{1}{\varepsilon}}{dy}+\gamma\frac{d\frac{1}{\varepsilon}}{dz}\right\}$$

ist; die Integration über den ganzen Raum des Körpers ausgedehnt. Hierin sind α, β, γ Functionen der Coordinaten x, y, z des Elements $\partial x\,\partial y\,\partial z$.

Poisson hat gezeigt (Mém. de l'Acad. d. sc. de l'Inst. T. V. und T. VI.), dafs, wenn der magnetische Zustand durch vertheilende Kräfte, welche sich durch ein Potential darstellen lassen, hervorgerufen ist, die Gröfsen α, β, γ durch die partiellen Differentialquotienten nach x, y, z einer Function φ sich darstellen lassen, welche der Gleichung

$$2.\quad \frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

genügt. Man hat alsdann

$$3.\quad \alpha = \varkappa\frac{d\varphi}{dx},\quad \beta = \varkappa\frac{d\varphi}{dy},\quad \gamma = \varkappa\frac{d\varphi}{dz}.$$

Diese Werthe, in den Ausdruck (1.) eingeführt, verwandeln denselben mittelst partieller Integrationen in

$$4.\quad U_a = \varkappa\int\frac{\partial w}{\varepsilon}\left[\frac{d\varphi}{dn}\right];$$

wo ∂w das Element der Oberfläche des Körpers darstellt, ε die Entfernung des Elements vom Puncte P, und $\left[\frac{d\varphi}{dn}\right]$ den Werth, welchen der nach der

Normale von ∂w genommene Differentialquotient von φ in ∂w hat. Die Integration ist über die ganze Oberfläche auszudehnen.

Die magnetischen Momente des Körpers in Bezug auf die Coordinaten-Axen x, y, z, welche ich durch M, N, P bezeichne, sind

$$M = \varkappa\int \partial x\,\partial y\,\partial z\,\frac{d\varphi}{dx},\quad N = \varkappa\int \partial x\,\partial y\,\partial z\,\frac{d\varphi}{dy},\quad P = \varkappa\int \partial x\,\partial y\,\partial z\,\frac{d\varphi}{dz},$$

woraus man durch partielle Integration, mit Rücksicht auf (2.),

$$5.\quad M = \varkappa\int \partial w\left[x\frac{d\varphi}{dn}\right],\quad N = \varkappa\int \partial w\left[y\frac{d\varphi}{dn}\right],\quad P = \varkappa\int \partial w\left[z\frac{d\varphi}{dn}\right]$$

ableitet; wo x, y, z die Coordinaten des Oberflächen-Elements ∂w sind und die Integration über die ganze Oberfläche ausgedehnt werden mufs.

Aus (2.) ergiebt sich, wenn diese Gleichung mit $dx\,dy\,dz$ multiplicirt und partiell integrirt wird, $\int \partial w\left[\frac{d\varphi}{dn}\right] = 0$, und mit Rücksicht hierauf erhält man aus (4.), wenn der Punct P, auf welchen U_a bezogen wird, sehr weit in Bezug auf die Dimensionen des Körpers von ihm entfernt ist:

$$6.\quad U_a = \frac{Ma + Nb + Pc}{\{a^2 + b^2 + c^2\}^{\frac{3}{2}}};$$

wo a, b, c die Coordinaten von P sind, die ihren Anfangspunct in dem magnetischen Körper haben.

Für die Ermittelung der Function φ hat *Poisson* a. a. O. die Gleichung

$$7.\quad \varphi + U_i + V_i = 0$$

gegeben, welche für jeden Punct im Innern des Ellipsoïds gilt. Hierin bezeichnet V_i das Potential der Kräfte, durch welche die Vertheilung des Magnetismus hervorgerufen wird, und U_i ist durch die Gleichung

$$8.\quad U_i = \varkappa\int \frac{\partial w}{\varepsilon_1}\left[\frac{d\varphi}{dn}\right]$$

bestimmt; wo die Integration über die ganze Oberfläche des Körpers auszudehnen ist, und wo ε_1 die Entfernung des Elements ∂w von einem Punct im Innern des Körpers vorstellt. Bezeichnet man die Coordinaten dieses Puncts durch x, y, z, so ist U_i und V eine Function dieser Gröfsen, und demnach auch φ.

Poisson hat für den Fall, wo der durch Vertheilung magnetisirte Körper eine Kugel ist, eine vollständige Auflösung der Gleichungen (7. und 8.) gegeben. Aufser diesem allgemeinen Falle hat er noch den besondern Fall behandelt, wo der magnetisirte Körper ein Rotations-Ellipsoïd ist und die vertheilenden Kräfte in Beziehung auf jeden Punct desselben constant sind.

Ich werde hier die allgemeine Auflösung der Gleichungen (7. und 8.) für den Fall eines Rotations-Ellipsoïds geben.

Die Axen des magnetisirten Ellipsoïds seien r_0 und $\sqrt{(r_0^2-\lambda^2)}$; die Lage des Elements ∂w seiner Oberfläche werde durch μ_0 und φ_0 bestimmt. Es sei ferner $\sigma_0=\sqrt{\left(1-\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2\right)}$. Die Lage eines Puncts im Innern des Ellipsoïds werde durch σ, μ, φ bestimmt, die eines Puncts aufserhalb durch σ_1, μ_1 und φ_1. Das Potential V_i hat, da dasselbe von Massen aufserhalb des Ellipsoïds herrührt, seinen allgemeinsten Ausdruck in (22.) des vorigen Paragraphs: es ist also

$$9.\quad V_i=\sum_0^\infty{}^n\sum_0^n{}^m P_{n.m}(\sigma)P_{n.m}(\mu)\{C_{n.m}\cos m\varphi+D_{n.m}\sin m\varphi\}.$$

Die Gröfse U_i ist zufolge (81.) das Potential der mit der Masse $\varkappa\left[\frac{d\varphi}{dn}\right]$ belegten Oberfläche des Ellipsoïds in Bezug auf einen Punct im Innern desselben. Hieraus folgt, da nach (7.) $\varphi=-U_i-V_i$ ist, dafs φ angesehen werden kann als ein Potential in Bezug auf einen Punct im Innern des Ellipsoïds, welches von Massen aufserhalb desselben herrührt, und dafs demnach in (22. §. 2.) seine allgemeinste Form gegeben ist, und man

$$10.\quad \varphi=\sum_0^\infty{}^n\sum_0^n{}^m P_{n.m}(\sigma)P_{n.m}(\mu)\{\gamma_{n.m}\cos m\varphi+\delta_{n.m}\sin m\varphi\}$$

setzen kann, wo die Constanten $\gamma_{n.m}$ und $\delta_{n.m}$ durch die gegebenen Werthe von $C_{n.m}$ und $D_{n.m}$ mittelst (7. und 8.) zu bestimmen sind.

Um den Werth von U_i zu bilden, mufs man bemerken, dafs

$$\left[\frac{d\varphi}{dn}\right]\partial w=-r_0\sqrt{(r_0^2-\lambda^2)}\left[\frac{d\varphi}{dr}\right]\partial\mu_0\partial\varphi_0=\lambda\sqrt{-1}\,(1-\sigma_0^2)\left[\frac{d\varphi}{d\sigma}\right]\partial\mu_0\partial\varphi_0$$

ist, also, wenn statt $\left[\frac{d\varphi}{d\sigma}\right]$ sein Werth aus (10.) gesetzt wird:

$$11.\quad \left[\frac{d\varphi}{dn}\right]\partial w$$

$$=\lambda\sqrt{-1}\,(1-\sigma_0^2)\,\partial\mu_0\partial\varphi_0\sum\sum\frac{dP_{n.m}(\sigma_0)}{d\sigma_0}P_{n.m}(\mu_0)\{\gamma_{n.m}\cos m\varphi_0+\delta_{n.m}\sin m\varphi_0\}.$$

Nach (18.) im vorigen Paragraph ist

$$12.\quad \frac{1}{\varepsilon_1}=\frac{\sqrt{-1}}{\lambda}\sum\sum 2n+1\,(b_{n.m})^2P_{n.m}(\sigma)Q_{n.m}(\sigma_0)P_{n.m}(\mu)P_{n.m}(\mu_0)\cos m(\varphi-\varphi_0),$$

wobei zu bemerken, dafs die Glieder mit $m=0$, für welche $b_{n0}=1$ ist, noch mit $\frac{1}{2}$ zu multipliciren sind.

Setzt man die Reihen (11. und 12.) in (8.) und bemerkt, dafs

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}(P_{n.0}(\mu_0))^2\,\partial\mu_0\,\partial\varphi_0=\frac{4\pi}{2n+1} \text{ und}$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}P_{n.m}(\mu_0)P_{n.m}(\mu_0)\cos^2 m\varphi_0\partial\mu_0\partial\varphi_0=\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}P_{n.m}(\mu_0)P_{n.m}(\mu_0)\sin^2 m\varphi_0\,\partial\mu_0\,\partial\varphi_0$$
$$=\frac{2\pi}{2n+1.b_{n.m}},$$

während

$$\int_{-1}^{+1}P_{n.m}(\mu_0)\,P_{n_1.m}(\mu_0)\,\partial\mu_0 = 0$$

ist, wenn n und n_1 verschieden sind: so erhält man

13. $$U_i = -2\pi k(1-\sigma_0^2)\Sigma\Sigma b_{n.m}\frac{d.P_{n.m}(\sigma_0)}{d\sigma_0}Q_{n.m}(\sigma_0)P_{n.m}(\sigma)P_{n.m}(\mu)$$
$$\times\{\gamma_{n.m}\cos m\varphi+\delta_{n.m}\sin m\varphi\};$$

wo die Glieder mit $m=0$ nicht mehr mit $\frac{1}{2}$ zu multipliciren sind.

Setzt man die Reihen (9., 10. und 13.) in die Gleichung (7.), so ergiebt sich

$$\frac{\gamma_{n.m}}{C_{n.m}}=\frac{\delta_{n.m}}{D_{n.m}}=\frac{1}{1-2\pi k(1-\sigma_0^2)\,b_{n.m}\dfrac{dP_{n.m}(\sigma_0)}{d\sigma_0}Q_{n.m}(\sigma_0)},$$

und also

14. $$\varphi=-\Sigma\Sigma P_{n.m}(\sigma)P_{n.m}(\mu)\frac{\{C_{n.m}\cos m\varphi+D_{n.m}\sin m\varphi\}}{1-2\pi k(1-\sigma_0^2)\,b_{n.m}\dfrac{dP_{n.m}(\sigma_0)}{d\sigma_0}Q_{n.m}(\sigma_0)};$$

welches die vollständige Auflösung der Gleichung (7. und 8.) für den Fall eines Rotations-Ellipsoïd ist. Diesem Werthe von φ kann man, wenn man

$$P_{n.m}(\sigma)P_{n.m}(\mu)\{C_{n.m}\cos m\varphi+D_{n.m}\sin m\varphi\} = V_{n.m}$$

setzt, also statt (9.)

$$V_i=\sum_0^\infty{}_n\sum_0^n{}_m V_{n.m}$$

schreibt, folgende Form geben:

$$\varphi=\sum_0^\infty{}_n\sum_0^n{}_m\frac{V_{n.m}}{1-2\pi\varkappa b_{n.m}\dfrac{dP_{n.m}(\sigma_0)}{d\sigma_0}Q_{n.m}(\sigma_0)}.$$

Um den Ausdruck des Potentials des magnetisirten Ellipsoïds in Bezug auf den aufserhalb desselben liegenden Punct σ_1, μ_1, φ_1 zu bilden, hat man in (4.)

$$\frac{1}{\varepsilon}=\frac{\sqrt{-1}}{\lambda}\Sigma\Sigma\,2n+1\,(b_{n.m})^2P_{n.m}(\sigma_0)Q_{n.m}(\sigma_1)P_{n.m}(\mu_0)P_{n.m}(\mu_1)\cos m(\varphi-\varphi_1)$$

und statt $\left[\frac{d\varphi}{dr}\right]\partial w$ seinen Werth aus (14.) zu setzen. Dies giebt

$$15. \quad U_a = 2\pi\varkappa(1-\sigma_0^2)\sum_0^\infty\sum_0^n b_{n.m}P_{n.m}(\sigma_0)\frac{dP_{n.m}(\sigma_0)}{d\sigma_0}Q_{n.m}(\sigma_1)P_{n.m}(\mu_1) \times \frac{\{C_{n.m}\cos m\varphi_1+D_{n.m}\sin m\varphi_1\}}{1-2\pi\varkappa(1-\sigma_0^2)b_{n.m}\frac{dP_{n.m}(\sigma_0)}{d\sigma_0}Q_{n.m}(\sigma_0)}.$$

Ich werde diese Formel auf den von *Poisson* behandelten Fall anwenden, in welchem die Vertheilung durch den Erd-Magnetismus hervorgebracht ist. Wenn A, B, C die mit den x, y, z Axen des Ellipsoïds parallelen Componenten des Erd-Magnetismus vorstellen, so ist

$$V_i = -\{Ax+By+Cz\},$$

oder, wenn statt der rechtwinkligen die elliptischen Coordinaten gesetzt werden,

$$V_i = -\lambda\{A\sqrt{(1-\sigma^2)}\sqrt{(1-\mu^2)}\cos\varphi+B\sqrt{(1-\sigma^2)}\sqrt{(1-\mu^2)}\sin\varphi+\sqrt{-1}.C\sigma\mu\}.$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks von V_i mit dem allgemeinen in (9.) zeigt, dafs alle $C_{n.m}$ und $D_{n.m}$ gleich Null sind, mit Ausnahme von $C_{1.0}$, $C_{1.1}$ und $D_{1.1}$, und dafs

$$16.a. \quad C_{1.0} = -\lambda\sqrt{-1}.C, \quad C_{1.1} = -\lambda A, \quad D_{1.1} = -\lambda B$$

ist. Man erhält hiernach aus (15.), wenn man zugleich berücksichtigt, dafs

$$P_{1.0}(\sigma) = \sigma, \qquad P_{1.1}(\sigma) = \sqrt{(1-\sigma^2)} \text{ und}$$

$$Q_{1.0}(\sigma) = -\left(2+\sigma\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right), \qquad Q_{1.1}(\sigma) = -\sqrt{(1-\sigma^2)}\left\{\frac{2\sigma}{\sigma^2-1}+\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right\}$$

ist, folgenden Ausdruck:

$$16.b. \quad U_a = -4\pi\varkappa\sigma_0(\sigma_0^2-1) \times \left\{\frac{C\left(\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_1-1}{\sigma_1+1}\right)z}{1-4\pi\varkappa(\sigma_0^2-1)\left(1+\frac{1}{2}\sigma_0\log\frac{\sigma_0-1}{\sigma_0+1}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1^2-1}+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_1-1}{\sigma_1+1}\right)(Ax+By)}{1+2\pi\varkappa\sigma_0(\sigma_0^2-1)\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0^2-1}+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_0-1}{\sigma_0+1}\right)}\right\},$$

der mit dem Resultate, welches *Poisson* auf einem andern Wege erhalten hat, übereinstimmt.

Für die Vergleichung der im Vorstehenden enthaltenen Resultate mit Beobachtungen der Wirkung nach Aufsen eines durch Vertheilung magnetisirten Ellipsoïds ist die Kenntnifs seiner magnetischen Momente wichtig. Man erhält dafür aus (5.), wenn darin für φ sein allgemeinster Werth aus (14.)

und für x, y, z respective

$$\lambda\sqrt{(1-\sigma_0^2)}\sqrt{(1-\mu_0^2)}\cos\varphi_0, \quad \lambda\sqrt{(1-\sigma_0^2)}\sqrt{(1-\mu_0^2)}\sin\varphi_0, \quad \lambda\sqrt{-1}\,.\,\sigma\mu$$

gesetzt und die Integration nach der Oberfläche des Ellipsoïds ausgeführt wird:

$$17. \quad \left\{\begin{aligned} M &= +\frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa\lambda^2\sqrt{(-1)}\,\sigma_0(1-\sigma_0^2)\,C_{1.1}}{1+2\pi\varkappa\sigma_0(1-\sigma_0^2)\left(\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0^2}-\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_0-1}{\sigma_0+1}\right)}, \\ N &= +\frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa\lambda^2\sqrt{(-1)}\,\sigma_0(1-\sigma_0^2)\,D_{1.1}}{1+2\pi\varkappa\sigma_0(1-\sigma_0^2)\left(\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0^2}-\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_0-1}{\sigma_0+1}\right)}, \\ P &= -\frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa\lambda^2\sigma_0(1-\sigma_0^2)\,C_{1.0}}{1+4\pi\varkappa\sigma_0(1-\sigma_0^2)\left(\frac{1}{\sigma_0}+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_0-1}{\sigma_0+1}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Um diese Formeln auf den Fall anzuwenden, wo die Vertheilung vom Erdmagnetismus herrührt, hat man darin statt $C_{1.1}$, $D_{1.1}$, $C_{1.0}$ ihre Werthe aus (16. *a.*) zu setzen.

Anhang. Über die magnetischen Momente der durch Vertheilung magnetisirten Ellipsoïde.

Die magnetischen Momente eines durch Vertheilung magnetisirten Ellipsoïds lassen sich direct, ohne Reihen-Entwicklung seines Potentials bestimmen, und diese Bestimmung erstreckt sich zugleich auf die dreiaxigen Ellipsoïde.

Aus der Gleichung (7.) erhält man

$$18. \quad \int\partial v\frac{d\varphi}{dx}+\int\partial v\frac{dU_i}{dx}+\int\partial v\frac{dV_i}{dx} = 0;$$

wo ∂v ein Raum-Element bezeichnen und die Integration über das ganze Ellipsoïd ausgedehnt werden soll. Nach (8.) ist

$$\int\partial v\frac{dU_i}{dx} = \varkappa\int\partial v\frac{d.}{dx}\int\frac{\partial w}{\varepsilon}\left[\frac{d\varphi}{dn}\right].$$

Geht man nun mit dem Differentiationszeichen unter das Integralzeichen und kehrt die Ordnung der Integrationen um, so erhält man

$$\int\partial v\frac{dU_i}{dx} = \varkappa\int\partial w\left\{\left[\frac{d\varphi}{dn}\right]\int\partial v\frac{d\frac{1}{\varepsilon}}{dx}\right\},$$

worin die Integration nach ∂v über das ganze Ellipsoïd, und die nach ∂w über seine ganze Oberfläche auszudehnen ist. Durch ε ist die Entfernung eines Puncts x, y, z im Innern des Ellipsoïds von dem Element ∂w seiner

Oberfläche bezeichnet. Dieses Element habe die Coordinaten a, b, c. Man kann $-\frac{d\cdot\frac{1}{e}}{da}$ statt $\frac{d\cdot\frac{1}{e}}{dx}$ setzen, und also $\int\partial v\frac{d\cdot\frac{1}{e}}{dx}=-\frac{d\cdot}{da}\int\frac{\partial v}{e}$. Nun ist aber $-\frac{d\cdot}{da}\int\frac{\partial v}{e}$ die mit der x Axe parallele Componente der Wirkung, welche das mit homogener Masse von der Dichtigkeit 1 angefüllte Ellipsoïd in dem Puncte a, b, c seiner Oberfläche ausübt. Diese Componente ist proportional mit a; ich bezeichne sie durch das Product $A_0.a$, wo A_0 eine durch die Dimensionen des Ellipsoïds bestimmte Constante ist. Hiernach hat man

$$\int dv\frac{dU_i}{dx} = \varkappa A_0\int\partial w\, a\left[\frac{d\varphi}{dn}\right].$$

Setzt man diesen Werth von $\int\partial v\frac{dU_i}{dx}$ in (18.), und berücksichtigt zugleich, daſs, da φ der Gleichung $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0$ genügt,

$$\int\partial v\frac{d\varphi}{dx} = \int\partial w\, a\left[\frac{d\varphi}{dn}\right]$$

ist, so erhält man:

$$(1+\varkappa A)\int\partial w\, a\left[\frac{d\varphi}{dn}\right]+\int\partial v\frac{dV_i}{dx} = 0.$$

Nach den Gleichungen (6.) ist aber das magnetische Moment in Bezug auf die x Axe: $A=\varkappa\int\partial w\, a\left[\frac{d\varphi}{dn}\right]$, und demnach ist

$$M = -\frac{\varkappa}{1+\varkappa A_0}\int\partial v\frac{dV_i}{dx}.$$

Hierin ist $-\int\partial v\frac{d\cdot V_i}{dx}$ die Summe der mit x parallelen Componenten der Wirkung, welche die vertheilenden Kräfte auf das ganze Ellipsoïd ausüben, dies als homogen und von der Einheit der Dichtigkeit angenommen. Wird diese Summe durch A bezeichnet, so ist

$$19. \quad M = \frac{\varkappa A}{1+\varkappa A_0},$$

und ebenso erhält man

$$20. \quad N = \frac{\varkappa B}{1+\varkappa B_0}, \quad P = \frac{\varkappa \Gamma}{1+\varkappa C_0},$$

worin B und Γ die Summe der respective mit y und z parallelen Componenten der vertheilenden Kräfte in Bezug auf das ganze Ellipsoïd sind, und $B_0 b$, $C_0 c$ die mit y und z parallellen Componenten der Wirkung, welche

das homogene Ellipsoid mit der Einheit der Dichtigkeit auf den Punct a, b, c seiner Oberfläche ausübt.

Wenn der Mittelpunct der vertheilenden Kräfte in Bezug auf die Dimensionen des Ellipsoids als unendlich entfernt betrachtet werden kann, wie z. B. dies der Fall ist, wenn der Erdmagnetismus die vertheilende Kraft ist: so erhält man, wenn J die Resultante der vertheilenden Kräfte ist, und mit den Axen des Ellipsoids die Winkel m, n, p bildet:

$$21.\quad M = \frac{\varkappa v J \cos m}{1+\varkappa A_0},\quad N = \frac{\varkappa v J \cos n}{1+\varkappa B_0},\quad P = \frac{\varkappa v J \cos p}{1+\varkappa C_0},$$

wo v das Volumen des Ellipsoids bezeichnet. Ist das Ellipsoid ein Rotations-Ellipsoid, so erhält man die Werthe A_0, B_0, C_0 aus (27. §. 2.), wenn man X, Y, Z respective durch a, b, c dividirt und $\sigma_1 = \sigma_0$ setzt. Dies giebt die Formeln

$$22.\quad \begin{cases} M = \dfrac{\varkappa v J \cos m}{1-2\pi\varkappa\sigma_0(\sigma_0^2-1)\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_0+1}{\sigma_0-1}-\frac{\sigma_0}{\sigma_0^2-1}\right\}}, \\ N = \dfrac{\varkappa v J \cos n}{1-2\pi\varkappa\sigma_0(\sigma_0^2-1)\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_0+1}{\sigma_0-1}-\frac{\sigma_0}{\sigma_0^2-1}\right\}}, \\ P = \dfrac{\varkappa v J \cos p}{1+4\pi\varkappa\sigma_0(\sigma_0^2-1)\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_0+1}{\sigma_0-1}-\frac{1}{\sigma_0}\right\}}, \end{cases}$$

welche mit denen in (17.) übereinstimmen, wenn darin statt $C_{1.1}$, $D_{1.1}$ und $C_{1.0}$ ihre Werthe in (16. a.) gesetzt werden.

Für die Berechnung der Gröfsen A, B, Γ ist es oft vortheilhafter, sie als die negativen, mit den Axen des Ellipsoids parallelen Componenten der Wirkung anzusehn, welche das als homogen und von der Einheit der Dichtigkeit angenommene Ellipsoid auf das Massensystem ausübt, von welchem die vertheilenden Kräfte herrühren. Man kann diese Gröfsen auch als partielle Differentialquotienten des Potentials des homogenen Ellipsoids von der Einheit der Dichtigkeit in Bezug auf dieses Massensystem definiren. Es sei U dieses Potential, und es werde dasselbe als Function der mit den Axen des Ellipsoids parallelen Coordinaten a, b, c eines Puncts des vertheilenden Massensystems betrachtet, so sind A, B, Γ die partiellen Differentialquotienten von U in Bezug auf a, b, c und man hat

$$23.\quad M = \frac{\varkappa\frac{dU}{da}}{1+\varkappa A_0},\quad N = \frac{\varkappa\frac{dU}{db}}{1+\varkappa B_0},\quad P = \frac{\varkappa\frac{dU}{dc}}{1+\varkappa C_0}$$

Ich werde die Formeln (19. und 20.) auf die Bestimmung der magnetischen Momente eines Rotations-Ellipsoids anwenden, wenn die vertheilenden Kräfte von einer cylindrischen, electrischen Spirale herrühren, deren Axe mit der Rotations-Axe des Ellipsoids zusammenfällt.

Die Wirkung einer solchen Spirale kann in Bezug auf jeden aufserhalb derselben liegenden Punct als von ihren Grundflächen ausgehend angesehen werden, von denen man sich die eine mit positiver, die andere mit negativer magnetischer Flüssigkeit gleichförmig bedeckt vorzustellen hat. Die Dicke der magnetischen Schicht auf diesen Grundflächen ist $\frac{j\eta}{\sqrt{2}}$, wenn j die Stromstärke in der Spirale und η die Anzahl ihrer Windungen auf die Längen-Einheit bezeichnet. Der Kürze wegen werde ich $\frac{j\eta}{\sqrt{2}} = \vartheta$ setzen. Wenn der Punct, auf welchen die Wirkung der Spirale bezogen wird, innerhalb der Spirale liegt, und man dieselbe in drei rechtwinklige Componenten zerlegt, parallel mit ihrer Axe und senkrecht darauf, so sind die letztern dieselben, welche den mit der magnetischen Schicht ϑ belegten Grundflächen der Spirale zukommen; die erste aber, die parallel mit der Axe der Spirale ist, erhält man, wenn man zu der entsprechenden Componente der Grundflächen noch das Product aus $4\pi\vartheta$ in die Masse des Puncts, auf welchen die Wirkung gerichtet ist, addirt. Hieraus folgt, dafs, wenn die Wirkung einer Spirale auf einen mit magnetischer Masse gleichförmig erfüllten Raum bezogen werden soll, zu der mit der Axe der Spirale parallelen Componente der Wirkung der magnetischen Grundflächen noch das Product aus $4\pi\vartheta$ in die innerhalb des von der Spirale und ihren Grundflächen begrenzten Raumes liegende Masse addirt werden mufs, wenn diese Grundflächen statt der Spirale bei der Berechnung ihrer Wirkung substituirt werden sollen. Die Grundflächen der Spirale sind Kreis-Ebenen, durch deren Mittelpunct, senkrecht gegen ihre Ebenen, die Rotations-Axe des Ellipsoids geht. Ich werde die Componenten der Wirkung des gegebenen Ellipsoids (dasselbe homogen und von der Einheit der Dichtigkeit angenommen) auf eine so gelegene Kreis-Ebene bestimmen. Ich nenne das Element dieser Ebene ∂w und seine Coordinaten α, β, γ, von denen γ parallel mit der Rotations-Axe ist und also für alle Elemente denselben Werth hat. Die Componenten des Ellipsoids in dem Puncte α, β, γ seien $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$; alsdann haben die negativen Componenten der Wirkung des Ellipsoids auf die Kreis-Ebene folgende Ausdrücke:

$$-\vartheta\int A\alpha\,\partial w, \quad -\vartheta\int B\beta\,\partial w, \quad -\vartheta\gamma\int C\,\partial w;$$

wo die Integrationen über die ganze Kreisfläche auszudehnen sind. Nennt man $\gamma_{\prime\prime}$ und $\gamma_{\prime}$ die Entfernung der positiven Grundfläche der Spirale (d. i. der mit positiver magnetischer Flüssigkeit belegten) und der negativen vom Mittelpuncte des Ellipsoïds, so hat man in vorstehende Ausdrücke einmal $\gamma_{\prime\prime}$ statt γ zu setzen, und dann $\gamma_{\prime}$, und von dem Resultat der ersten Substitution das der zweiten abzuziehen. Dann erhält man, wenn kein Theil des Ellipsoïds innerhalb der Spirale liegt, die Werthe von A, B und Γ; es ist aber zu der Differenz, welche Γ giebt, wenn das Ellipsoïd theilweise oder ganz innerhalb des von der Spirale und ihren Grundflächen begrenzten Raumes liegt, noch das Product aus $4\pi\vartheta$ in den innerhalb des bezeichneten Raumes liegenden Theil des Ellipsoïds zu addiren. Nun ist aber, wie leicht erhellet, $\int \alpha A\, \partial w = 0$ und $\int \beta B\, \partial w = 0$, also $A = 0 = B$, und demnach auch $M = 0 = N$. Es bleibt also nur das magnetische Moment P in Bezug auf die Rotations-Axe zu bestimmen, welches, wenn durch $C_{\gamma_{\prime\prime}}$ und $C_{\gamma_{\prime}}$ die Werthe von C in Bezug auf die beiden Grundflächen der Spirale bezeichnet werden, durch

$$24. \quad P = \frac{-\varkappa\vartheta}{1+\varkappa C_0}\left\{\int(\gamma_{\prime\prime} C_{\gamma_{\prime\prime}} - \gamma_{\prime} C_{\gamma_{\prime}})\,\partial w - 4\pi\vartheta\int\partial v\right\}$$

ausgedrückt wird, wo $\gamma_{\prime\prime}$ und $\gamma_{\prime}$ constant sind und die erste Integration über die ganzen Grundflächen auszudehnen ist. In dem zweiten Integral ist ∂v das räumliche Element des Ellipsoïds und $\int \partial v$ mufs auf den Theil desselben beschränkt werden, welcher innerhalb der Spirale liegt. Ich werde zuerst den Werth des Integrals $\int C\,\partial w$ entwickeln. Hiebei mufs unterschieden werden, ob die Kreisfläche, auf welche sich dies Integral bezieht, die Rotations-Axe des Ellipsoïds aufserhalb desselben schneide, oder innerhalb. Im ersten Fall erhält man den Werth von C aus (27. §. 2.), wenn man Z durch c daselbst dividirt und σ_1, wofür ich jetzt σ setzen werde, als eine Ordinate von ∂w betrachtet; in dem zweiten Fall hat C für alle Elemente ∂w, welche innerhalb des Ellipsoïds liegen, einen constanten Werth, den man aus (27. §. 2.) erhält, wenn man σ_0 in dem Ausdruck $\frac{1}{c}Z$ statt σ_1 setzt, wo σ_0 sich auf das gegebene Ellipsoïd bezieht; für die Elemente ∂w aufserhalb des Ellipsoïds gelten in diesem Falle dieselben Werthe von C, wie im erstern. Ich setze $\partial w = \pi\,\partial.(\alpha^2+\beta^2)$ und

$$\alpha^2+\beta^2 = \lambda^2(1-\sigma^2)(1-\mu^2), \quad \gamma^2 = -\lambda^2\sigma^2\mu^2,$$

woraus sich

$$\partial w = -2\pi\left(\lambda^2\sigma+\frac{\gamma^2}{\sigma^3}\right)\partial\sigma$$

ergiebt. Wenn die Kreis-Ebene die Axe aufserhalb des Ellipsoids schneidet, ist demnach

$$25.\quad \int C\partial w = -8\pi^2\sigma_0(\sigma_0^2-1)\int\partial\sigma\left(\lambda^2\sigma+\frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}-\frac{1}{\sigma}\right) = J_a;$$

wo die untere Grenze der Integration $\frac{\gamma}{\lambda\sqrt{-1}}$ ist, die obere σ, wenn σ die negative Wurzel der quadratischen Gleichung

$$26.\quad \frac{R^2}{1-\sigma^2}-\frac{\gamma^2}{\sigma^2} = \lambda^2$$

ist, in welcher R den Halbmesser der Kreis-Ebene, nach welcher integrirt wird, bezeichnet.

Schneidet die Kreis-Ebene die Axe innerhalb des Ellipsoids, so hat man

$$27.\quad \int C\partial w = -\left\{\begin{matrix} 8\pi^2\sigma_0(\sigma_0^2-1)\left\{\tfrac{1}{2}\log\frac{\sigma_0+1}{\sigma_0-1}-\frac{1}{\sigma_0}\right\}\int_{\frac{\gamma}{\lambda}\sqrt{-1}}^{\sigma_0}\left(\lambda^2\sigma+\frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right)\partial\sigma \\ 8\pi^2\sigma_0(\sigma_0^2-1)\int_{\sigma_0}^{\sigma}\partial\sigma\left(\lambda^2\sigma+\frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}-\frac{1}{\sigma}\right)\end{matrix}\right\} = J_i.$$

Aus (25.) erhält man

$$J_a = 4\pi^2\sigma_0(\sigma_0^2-1)\left\{(\sigma^2-1)\left(\lambda^2+\frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{\sigma}-\tfrac{1}{2}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sigma}\left(\lambda^2+\tfrac{1}{3}\frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right)-\tfrac{2}{3}\lambda^3\sqrt{\frac{-1}{\gamma^2}}\right\}$$

und aus (27.)

$$J_i = 4\pi^2\sigma_0(\sigma_0^2-1)\left\{(\sigma^2-1)\left(\lambda^2+\frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{\sigma}-\tfrac{1}{2}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sigma}\left(\lambda^2+\tfrac{1}{3}\frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right)-\frac{1}{\sigma_0}\left(\lambda^2+\tfrac{1}{3}\frac{\gamma^2}{\sigma_0^2}\right)\right\},$$

wo σ^2 die negative Wurzel der quadratischen Gleichung dieser Gröfse in (26.) ist. Durch die Form, in welcher das letzte Glied in J_a geschrieben ist, ist angegeben, dafs dasselbe sein Vorzeichen mit γ nicht ändert.

Mittelst dieser Ausdrücke ist es nun leicht, die Werthe von P in (24.) zu bilden, wenn man berücksichtigt, dafs das Integral $\int\partial v$, wenn nur die untere Grundfläche der Spirale das Ellipsoïd schneidet, den Werth

$$\int\partial v = -\pi\sigma_0(\sigma_0^2-1)\left\{\tfrac{2}{3}\lambda^3\sqrt{-1}-\frac{\gamma_I}{\sigma_0}\left(\lambda^2+\tfrac{1}{3}\frac{\gamma_I^2}{\sigma_0^2}\right)\right\},$$

hat; wenn beide Grundflächen dasselbe schneiden, den Werth

$$\int\partial v = -\pi\sigma_0(\sigma_0^2-1)\left\{\frac{\gamma_{II}}{\sigma_0}\left(1+\tfrac{1}{3}\frac{\gamma_{II}^2}{\sigma_0^2}\right)-\frac{\gamma_I}{\sigma_0}\left(1+\tfrac{1}{3}\frac{\gamma_I^2}{\sigma_0^2}\right)\right\},$$

und endlich, wenn das Ellipsoïd ganz innerhalb der Spirale liegt, den Werth

$$\int \partial v = -\tfrac{4}{3}\pi\sigma_0(\sigma_0^2-1)\lambda^3\sqrt{-1}.$$

Man erhält allgemein, wie auch die Grundflächen der Spirale liegen mögen, wenn für ϑ wieder sein Werth $\frac{i\eta}{\sqrt{2}}$ eingeführt wird:

$$28.\quad P = \frac{-\frac{4}{\sqrt{2}}\pi^2 \varkappa j \eta \sigma_0(\sigma_0^2-1)}{1+4\pi\varkappa\sigma_0(\sigma_0^2-1)\left(\frac{1}{\sigma_0}-\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_0+1}{\sigma_0-1}\right)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l} \gamma_{\prime\prime}\left((\sigma_{\prime\prime}^2-1)\left(\lambda^2+\frac{\gamma_{\prime\prime}^2}{\sigma_{\prime\prime}^2}\right)\left(\frac{1}{\sigma_{\prime\prime}}-\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_{\prime\prime}+1}{\sigma_{\prime\prime}-1}\right)+\frac{1}{\sigma_{\prime\prime}}\left(\lambda^2+\frac{1}{3}\frac{\gamma_{\prime\prime}^2}{\sigma_{\prime\prime}^2}\right)\right) \\ -\gamma_{\prime}\left((\sigma_{\prime}^2-1)\left(\lambda^2+\frac{\gamma_{\prime}^2}{\sigma_{\prime}^2}\right)\left(\frac{1}{\sigma_{\prime}}-\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_{\prime}+1}{\sigma_{\prime}-1}\right)+\frac{1}{\sigma_{\prime}}\left(\lambda^2+\frac{1}{3}\frac{\gamma_{\prime}^2}{\sigma_{\prime}^2}\right)\right) \end{array}\right\},$$

wo $\sigma_{\prime\prime}^2$ und $\sigma_{\prime}^2$ die negativen Wurzeln der beiden quadratischen Gleichungen sind, welche man aus (26.) erhält, wenn darin respective $\gamma_{\prime\prime}$ und $\gamma_{\prime}$ gesetzt wird.

Königsberg im August 1847.

3.

De la sphère tangente à quatre sphères données.

(Par Mr. *J. A. Serret* à Paris.)

I.

Soit

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2 = 0$$

l'équation d'une sphère, que je représenterai, aussi pour abréger, par $S=0$. J'appellerai avec Mr. *Steiner*, *Puissance d'un point par rapport à une sphère*, le carré de sa distance au centre moins le carré du rayon; ensorte que S représente la puissance du point (x, y, z) par rapport à la sphère dont $S=0$ est l'équation. Je représenterai par p la puissance de l'origine, et l'on aura toujours

$$a^2+b^2+c^2-r^2 = p.$$

II.

Soient $S=0$, $S'=0$, les équations de deux sphères; l'équation

$$S = S'$$

est celle d'un plan qu'on appelle *plan radical* des deux sphères; ce plan est évidemment d'après la définition précédente, le lieu géométrique des points d'égale puissance par rapport aux deux sphères; il est aussi le lieu géométrique des points communs aux deux sphères lorsqu'elles se coupent, et dans tous les cas le lieu des points d'où l'on peut leur mener deux tangentes égales.

La position de ce plan par rapport aux deux sphères, ne dépend évidemment pas des axes coordonnées; et comme en prennant pour axe des z la droite qui joint leurs centres, l'équation $S=S'$ se réduit à la forme $z=h$; on voit que le plan radical des deux sphères est perpendiculaire à la ligne des centres.

III.

Soient $S=0$, $S'=0$, $S''=0$, les équations de trois sphères; les plans radicaux de ces trois sphères considérées deux à deux, auront pour équations

$$S=S', \quad S=S'', \quad S'=S''.$$

Ces trois plans se coupent suivant une même droite dont les équations sont

$$S=S'=S''$$

et qu'on appelle *axe radical* des trois sphères. Cet axe radical est le lieu des points d'égale puissance par rapport aux trois sphères; il est d'ailleurs évidemment perpendiculaire au plan de leurs centres.

Ce qui précède exige que les centres des trois sphères ne soient pas en ligne droite; car si cela était, les trois plans radicaux des sphères prises deux à deux seraient parallèles, et l'axe radical serait situé à l'infini, ou pour mieux dire n'existerait plus; néanmoins il pourrait arriver que ces trois plans coïncidassent, et dans ce cas les trois sphères auraient un plan radical au lieu d'un axe radical.

On peut aisément à l'aide des principes de la géométrie descriptive construire le plan radical de deux sphères et l'axe radical de trois sphères, mais je n'insisterai pas sur ces opérations graphiques.

IV.

Soient $S=0$, $S'=0$, $S''=0$, $S'''=0$; les équations de quatre sphères. Les plans radicaux de ces sphères prises deux à deux auront pour équations

$$S=S',\quad S=S'',\quad S=S''',\quad S'=S'',\quad S'=S'''.\quad S''=S''';$$

ces six plans se couperont en un même point qui aura pour équations

$$S=S'=S''=S'''.$$

C'est le point d'égale puissance par rapport aux quatre sphères, et qu'on appelle *centre radical* de ces sphères.

Ce point sera toujours unique, à moins que les quatre sphères n'aient leurs centres dans un même plan; dans ce cas il pourra arriver que le centre radical soit à l'infini, ce qui signifie qu'il n'existe plus; ou bien ce centre sera remplacé par un axe radical, ou même par un plan radical, si les centres des quatre sphères sont en ligne droite.

Dans le problème dont nous allons nous occuper, nous supposerons d'abord que les quatre centres ne sont pas dans un même plan, et alors les sphères auront toujours un centre radical unique.

V.

Soit toujours $S=0$ l'équation d'une sphère, et x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de l'espace; on sait que le *plan polaire* de ce point par rapport à la sphère, aura pour équation

$$(x'-a)(x-a)+(y'-b)(y-b)+(z'-c)(z-c)-r^2=0.$$

On sait d'ailleurs que ce plan n'est autre que le lieu géométrique des sommets

des cônes circonscrits à la sphère e, dont les plans de contact avec cette dernière passent par le point.

Cette définition est applicable à tous les cas; on en déduit aisément que si le point est hors de la sphère, son plan polaire est celui des contacts de la sphère et des tangentes issues de ce point, et que si le point est sur la sphère, il est aussi sur son plan polaire qui est lui même tangent à la sphère.

VI.

Soient $S=0$, $S'=0$, les équations de deux sphères; les centres de similitude direct et inverse de ces sphères, auront respectivement pour équations

Centre direct.	Centre inverse.
$x-a = \frac{r}{r-r'}(a'-a)$,	$x-a = \frac{r}{r+r'}(a'-a)$,
$y-b = \frac{r}{r-r'}(b'-b)$,	$y-b = \frac{r}{r+r'}(b'-b)$,
$z-c = \frac{r}{r-r'}(c'-c)$,	$z-c = \frac{r}{r+r'}(c'-c)$.

Les plans polaires de ces deux centres de similitude relativement à la sphère S, auront respectivement pour équations:

$$2(a-a')x+2(b-b')y+2(c-c')z-(p-p')$$
$$= (a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2-(r-r')^2,$$
$$2(a-a')x+2(b-b')y+2(c-c')z-(p-p')$$
$$= (a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2-(r+r')^2;$$

ou simplement

$$S'-S = \Delta(r,r'), \qquad S'-S = \delta(r,r'),$$

en posant pour abréger

$$\Delta(r,r') = (a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2-(r-r')^2,$$
$$\delta(r,r') = (a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2-(r+r')^2.$$

Les plans polaires des deux mêmes centres de similitude, relativement à la sphère S', auront évidemment pour équations

$$S-S' = \Delta(r,r'), \qquad S-S' = \delta(r,r').$$

Si les deux sphères étaient extérieures l'une à l'autre, les deux centres de similitude seraient les sommets de deux cônes circonscrits à la fois aux deux sphères, et les quantités désignées par $\Delta(r,r')$, $\delta(r,r')$ seraient les carrées des parties des arètes de ces cônes, comprises entre les deux sphères.

VII.
Théorème.

Le lieu géométrique des points de contact de l'une quelconque de trois sphères données avec toutes les sphères qui les touchent toutes trois, est un petit cercle de cette sphère, dont le plan est perpendiculaire au plan des centres des sphères données.

Il est bien entendu dans cet énoncé, que l'une quelconque des trois sphères données doit être touchée *de la même manière* par toutes les sphères que l'on considère.

Considérons, pour fixer les idées, la série des sphères qui touchent extérieurement trois sphères données dont les équations seront comme d'habitude

$$S = 0, \quad S' = 0, \quad S'' = 0,$$

et désignons par α, β, γ les coordonnées du centre de l'une des sphères tangentes Σ, par ϱ son rayon, et par x, y, z les coordonnées du point ou elle touche la sphère S; on aura d'abord

$$1. \quad \alpha = \frac{\varrho+r}{r}x - \frac{\varrho}{r}a, \quad \beta = \frac{\varrho+r}{r}y - \frac{\varrho}{r}b, \quad \gamma = \frac{\varrho+r}{r}z - \frac{\varrho}{r}c;$$

puis comme la sphère Σ touche les trois proposées:

$$\begin{aligned}(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2-(r+\varrho)^2 &= 0,\\ (a'-\alpha)^2+(b'-\beta)^2+(c'-\gamma)^2-(r'+\varrho)^2 &= 0,\\ (a''-\alpha)^2+(b''-\beta)^2+(c''-\gamma)^2-(r''+\varrho)^2 &= 0.\end{aligned}$$

De ces dernières on déduit par la soustraction:

$$2. \quad \begin{cases}2(a-a')\alpha+2(b-b')\beta+2(c-c')\gamma+2(r-r')\varrho-(p-p') = 0,\\ 2(a-a'')\alpha+2(b-b'')\beta+2(c-c'')\gamma+2(r-r'')\varrho-(p-p'') = 0.\end{cases}$$

Si maintenant on porte dans les équations (2.) les valeurs de α, β, γ trouvées plus haut, on aura

$$\begin{aligned}(\varrho+r)\{2(a-a')x+2(b-b')y+2(c-c')z-(p-p')\} &= \varrho\Delta(r,r'),\\ (\varrho+r)\{2(a-a'')x+2(b-b'')y+2(c-c'')z-(p-p'')\} &= \varrho\Delta(r,r'').\end{aligned}$$

L'élimination de ϱ entre ces équations, conduit à la suivante:

$$3. \quad \frac{S'-S}{\Delta(r,r')} = \frac{S''-S}{\Delta(r,r'')},$$

qui est bien l'équation d'un plan.

Il suit de là que les points de contact des trois sphères données avec la série des sphères qui les touchent extérieurement toutes trois, seront sur trois plans ayant pour équations:

$$4.\quad \frac{S'-S}{\Delta(r,r')}=\frac{S''-S}{\Delta(r,r'')},\quad \frac{S''-S'}{\Delta(r',r'')}=\frac{S-S'}{\Delta(r,r')},\quad \frac{S-S''}{\Delta(r,r'')}=\frac{S'-S''}{\Delta(r',r'')}.$$

Ces trois plans se coupent évidemment suivant la droite

$$S=S'=S''$$

qui est l'axe radical des trois sphères; et comme cette droite est perpendiculaire au plan des centres des trois sphères, il s'ensuit que ces trois plans le seront pareillement.

Si l'une des sphères proposées, la sphère S par exemple, devait être enveloppée par la série des sphères tangentes, il suffirait de changer le signe de r dans les équations (1.) et (2.), et par suite dans toutes celles que l'on en déduit; ce qui revient évidemment à remplacer dans les équations (4.)

$$\Delta(r,r')\quad\text{et}\quad\Delta(r,r'')\quad\text{par}\quad\delta(r,r')\quad\text{et}\quad\delta(r,r'').$$

Si les trois sphères devaient être enveloppées par la série des sphères tangentes, il faudrait changer les signes de r, r', r''; ce qui ne produirait aucun changement dans les équations (4.).

Il résulte de là que les équations (4.) s'appliqueront à tous les cas, si l'on convient de remplacer la caractéristique Δ par δ, lorsque les sphères dont les rayons suivent cette caractéristique, doivent être touchées de manières différentes.

Dans tous les cas les plans ainsi déterminés, passent toujours par l'axe radical des trois sphères.

VIII.

Problème.

Construire une sphère tangente à quatre sphères données.

Soient

$$S=0,\quad S'=0,\quad S''=0,\quad S'''=0$$

les équations des quatre sphères données, et supposons pour fixer les idées que la sphère cherchée doive toucher les proposées toutes extérieurement, ou toutes intérieurement.

Les lieux des points de contact de la sphère S et des séries de sphères qui touchent extérieurement ou intérieurement cette sphère et deux des trois autres, ont pour équations:

$$\frac{S'-S}{\Delta(r,r')}=\frac{S''-S}{\Delta(r,r'')},\quad \frac{S'-S}{\Delta(r,r')}=\frac{S'''-S}{\Delta(r,r''')},\quad \frac{S''-S}{\Delta(r,r'')}=\frac{S'''-S}{\Delta(r,r''')}.$$

Ces trois plans se couperont suivant une même droite ayant pour équations:

$$(a.)\quad \frac{S'-S}{\Delta(r,r')}=\frac{S''-S}{\Delta(r,r'')}=\frac{S'''-S}{\Delta(r,r''')}.$$

Cette droite perçera la sphère, généralement en deux points; l'un d'eux sera le point de contact avec la sphère qui touche extérieurement les quatre proposées; l'autre le point de contact avec la sphère qui les enveloppe toutes quatre.

La droite (*a.*) semble assez difficile à construire à priori; mais on peut trouver trois points fort remarquables de cette droite; ce qui est plus que suffisant pour la déterminer.

1°. La droite (1.) passe évidemment par le point

$$S = S' = S'' = S'''$$

qui est le centre radical des quatre sphères données.

2°. Elle passe aussi par le point dont les équations sont

$$S' - S = \Delta(r, r'), \quad S'' - S = \Delta(r, r''), \quad S''' - S = \Delta(r, r'''),$$

et qui, ainsi que nous l'avons vu précedemment, représentent les plans polaires relativement à la sphère S, du centre de similitude direct de cette sphère prise avec chacune des trois autres.

L'intersection de ces trois plans faciles à construire, donne donc un second point de la droite (1.).

3°. Enfin la même droite passe par le point dont les équations sont

$$S - S' = \Delta(r, r'), \quad S - S'' = \Delta(r, r''), \quad S - S''' = \Delta(r, r'''),$$

et qui représentent les plans polaires par rapport aux sphères S', S'', S''' des centres de similitude directs de ces sphères considerées séparement avec la sphère S.

Si la sphère S, étant toujours touchée extérieurement, quelques unes des trois autres devaient être enveloppées, nous avons vu que pour ces dernières, il fallait remplacer la caractéristique Δ par δ; ce qui revient, comme on voit, à prendre le centre de similitude direct, si les deux sphères doivent être touchées de la même manière, et le centre de similitude inverse, si elles doivent être touchées différemment.

De ce qui précède on déduit aisément la construction suivante.

IX.

Construction.

Pour constuire une sphère tangente à quatre sphères données, dont les centres ne sont pas dans un même plan, on cherchera les centres de similitude de chacune des quatre sphères avec chacune des trois autres, et on prendra chaque centre de similitude direct ou inverse, suivant que les deux sphères correspondantes devront être touchées de la même manière, ou de manière

différentes; on construira les plans polaires des trois centres de similitude ainsi déterminés correspondants à chaque sphère par rapport à cette sphère, et l'on obtiendra ainsi dans chacune d'elles, un point que l'on joindra à leur centre radical. Les quatre droites ainsi obtenues couperont les quatre sphères en huit points; quatre de ces points constitueront une solution du problème, et les quatre autres une solution semblable ou inverse.

La solution précédente subsiste, quels que soient les rayons des sphères données; et par conséquent lorsque les rayons de quelques unes sont nuls. On peut donc regarder comme résolu le problème qui consiste à construire une sphère tangente à n sphères données et passant par $4-n$ points donnés. Il faut seulement remarquer que les centres de similitude direct et inverse de deux sphères S et S' se confondent avec le centre de l'une d'elles lorsque le rayon de celle-ci s'annulle.

X.

Si les centres des quatre sphères étaient dans un même plan, on ne pourrait plus appliquer la construction précédente; mais dans ce cas la droite (1.) est perpendiculaire au plan des centres des sphères et rien n'est plus facile que de déterminer sa trace sur ce plan.

Soit pris pour plan xy celui qui renferme les quatres centres, et soient

$$C=0,\quad C'=0,\quad C''=0,\quad C'''=0$$

les équations des grands cercles suivant lesquels le plan xy coupe les sphères. Comme les coordonnées c, c', c'', c''', sont nulles, les équations de la droite (1.) ou de sa trace sur le plan des centres, seront

$$\frac{C'-C}{\Delta(r,r')} = \frac{C''-C}{\Delta(r,r'')} = \frac{C'''-C}{\Delta(r,r''')}.$$

Ces équations sont sur le plan xy, celles du point ou se coupent les droites ayant pour équations:

$$\frac{C'-C}{\Delta(r,r)} = \frac{C''-C}{\Delta(r,r'')},\quad \frac{C'-C}{\Delta(r,r')} = \frac{C'''-C}{\Delta(r,r''')},\quad \frac{C''-C}{\Delta(r,r'')} = \frac{C'''-C}{\Delta(r,r''')}.$$

Il est facile de construire ces droites qui ne sont autres que celles qui déterminent sur la circonférence C les points de contact de cette circonférence avec le cercle qui touche en même tems deux des trois autres cercles C', C'', C'''. L'intersection de ces trois droites donne immédiatement la trace de la droite (1.).

Les opérations graphiques relatives à ce cas particulier s'effectuent sans difficulté.

Paris, Octobre 1847.

4.

Note sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. *A. Cayley* à Cambridge.)

Soit $x = \sqrt{k} \sin \mathrm{am}\, u$ et $\alpha = k + \frac{1}{k}$: la fonction $\sqrt{k} \sin \mathrm{am}\, n u$ (où n est un entier), peut être exprimée sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une fonction rationnelle et entière par rapport à x et α. En exprimant ce dénominateur par z, on aura

$$(1.)\quad n^2(n^2-1)x^2 z + (n^2-1)(\alpha x - 2x^3)\frac{dz}{dx} + (1 - \alpha x^2 + x^4)\frac{d^2 z}{dx^2} - 2n^2(\alpha^2-4)\frac{dz}{d\alpha} = 0.$$

Cette équation est dûe à M. ***Jacobi.*** (Voyez les deux mémoires „Suite des notices sur les fonctions elliptiques" t. III p. 306 et t. IV p. 185.)

En essayant d'intégrer cette équation comme une seule, ordonnée suivant les puissances de x, et en considérant en particulier les cas $n = 2, 3, 4$ et 5: j'ai trouvé que les différentes puissances de α se présentent et disparaissent d'une manière assez bizarre. (Voyez mon mémoire „On the theory of elliptic functions" Cambridge et Dublin Math. Journal t. II p. 256.) J'ai reconnu depuis que cela vient de ce que la valeur de z est composée de plusieurs séries indépendantes; une quelconque de ces séries ordonnée selon les puissances descendantes de α, va à l'infini; mais en combinant les différentes séries, les termes qui contiennent les puissances négatives de α, se détruisent. Par rapport à x chacune de ces séries ne contient que des puissances paires et positives, car les puissances négatives qui y entrent apparemment, se réduisent toujours à zéro. En effet, on satisfait à l'équation (1.) en supposant pour z une expression de la forme

$$(2.)\quad z_s = 2^{2s(n-2s)}.\alpha^{s(n-2s)}.Z_0 \ldots + (-1)^q.2^{2s(n-2s)-2q}.\alpha^{s(n-2s)-q}.Z_q \ldots$$

(où s est arbitraire). Cela donne pour Z_q l'équation aux différences melées:

$$\left[x^2\cdot\frac{d^2}{dx^2} - (n^2-1)x\cdot\frac{d}{dx} + 2n^2 s(n-2s) - 2n^2 q\right]Z_q$$
$$+\left[\left\{n^2(n^2-1)x^2 + x^4\cdot\frac{d^2}{dx^2} - (2n^2-2)x^3\cdot\frac{d}{dx}\right\} + \frac{d^2}{dx^2}\right]4Z_{q-1}$$
$$-128n^2[s(n-2s) - q + 2]Z_{q-2} = 0.$$

Pour intégrer cette équation, supposons

$$Z_q = \Sigma \frac{Z_q^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)\Gamma(q-\sigma+1)} x^{2ns+2q-4\sigma}$$

où la sommation se rapporte à σ et s'étend depuis $\sigma = 0$ jusqu'à $\sigma = q$. Toute réduction faite, et ayant mis pour plus de simplicité $n^2 - 2ns = \lambda$, $2ns = \mu$, on obtient pour Z_q^σ l'expression

$$\begin{aligned}
4.\quad & [-(q-\sigma)\lambda - \sigma\mu + (q-2\sigma)^2] Z_q^\sigma \\
& + (q-\sigma)(\lambda - 2q + 4\sigma + 2)(\lambda - 2q + 4\sigma + 1) Z_{q-1}^\sigma \\
& + \sigma(\mu + 2q - 4\sigma + 2)(\mu + 2q - 4\sigma + 1) Z_{q-1}^{\sigma-1} \\
& - 16\sigma(q-\sigma)[\lambda\mu - 2(q-2)(\lambda+\mu)] Z_{q-2}^{\sigma-1} = 0.
\end{aligned}$$

En supposant la valeur de Z_0^0 égale à l'unité, les valeurs de Z_q^σ se trouvent complétement déterminées; malheureusement la loi des coëfficients n'est pas en évidence, excepté dans le cas de $\sigma = 0$, ou $\sigma = q$. En calculant les termes successifs, on obtient

$$\begin{aligned}
z_s = \; & (4\alpha)^{s(n-2s)} . x^{2ns} \\
& -(4\alpha)^{s(n-2s)-1} \left\{ \begin{aligned} & \tfrac{1}{1} \lambda . x^{2ns+2} \\ & + \tfrac{1}{1} \mu . x^{2ns-2} \end{aligned} \right. \\
& +(4\alpha)^{s(n-2s)-2} \left\{ \begin{aligned} & \tfrac{1}{1.2} \lambda(\lambda-3) x^{2ns+4} \\ & + \tfrac{1}{1.1} \left(\lambda\mu + 2 - \tfrac{10\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right) x^{2ns} \\ & + \tfrac{1}{1.2} \mu(\mu-8) x^{2ns-4} \end{aligned} \right. \\
& -(4\alpha)^{s(n-2s)-3} \left\{ \begin{aligned} & \tfrac{1}{1.2.3} \lambda(\lambda-4)(\lambda-5) x^{2ns+6} \\ & + \tfrac{1}{1.2.1} \lambda \left(\mu(\lambda-3) + 40 - \tfrac{20\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right) x^{2ns+2} \\ & + \tfrac{1}{1.1.2} \mu \left(\lambda(\mu-8) + 40 - \tfrac{20\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right) x^{2ns-2} \\ & + \tfrac{1}{1.2.3} \mu(\mu-4)(\mu-5) x^{2ns-6} \end{aligned} \right. \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

On aurait une valeur assez générale de z en multipliant les différentes fonctions z_s chacune par une constante arbitraire, et en sommant les produits; mais dans le cas actuel où z dénote le dénominateur de $\sqrt{k}\,\sin\text{am}\, nu$, la valeur

convenable de z se réduit à

$$z = z_0 \pm z_1 \ldots \pm z_s, \ldots,$$

où s est un nombre entier et positif, entre zéro et $\frac{1}{2}n$ ou $\frac{1}{2}(n-1)$. On aura par exemple dans le cas $n=5$ (les signes étant tous positifs si n est impair, et alternativement positifs et négatifs si n est pair), en supprimant les puissances négatives de α (lesquelles s'entredétruisent):

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \\ z_1 &= 64\alpha^3 x^{10} - \alpha^2(160x^8 + 240x^{12}) + \alpha(140x^6 + 368x^{10} + 360x^{14}) \\ &\quad - (50x^4 + 125x^8 + 300x^{12} + 275x^{16}), \\ z_2 &= 16\alpha^2 x^{20} - \alpha(80x^{18} + 20x^{22}) + (170x^{16} + 62x^{20} + 5x^{24}), \end{aligned}$$

et delà:

$$\begin{aligned} z = {} & 1 - 50x^4 + 140\alpha x^6 - (125 + 160\alpha^2)x^8 + (368\alpha + 64\alpha^3)x^{10} \\ & - (300 + 240\alpha^2)x^{12} + 360\alpha x^{14} - 105x^{16} - 80\alpha x^{18} + (62 + 16\alpha^2)x^{20} \\ & - 20\alpha x^{22} + 5x^{24}; \end{aligned}$$

ce qui est effectivement la valeur de z que j'ai trouvée dans le mémoire cité pour ce cas particulier.

Chancery-Lane, 27 Dec. 1847.

5.

Über unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiednen quadratischen Formen enthalten sind.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi.*)

Einleitung.

Zwischen der Analysis und Zahlentheorie, welche man lange für völlig getrennte Disciplinen hielt, sind in neuerer Zeit immer häufigere, oft unerwartete Verbindungen und Übergänge entdeckt worden. Eine reichhaltige Quelle gegenseitiger Beziehungen beider, welche noch lange unerschöpft bleiben wird, ist die Analysis der elliptischen Functionen. Ich will im Folgenden eine Anzahl Formeln mittheilen, welche eine neue Anwendung dieser Analysis auf die Arithmetik gewähren, die Anwendung nämlich auf die Simultanformen des zweiten Grades, in denen gewisse Zahlenclassen immer enthalten sind.

Das erste Beispiel von tiefer liegenden Sätzen über die Eigenschaften solcher Simultanformen ergab sich aus der ersten *Gaufs*ischen Abhandlung über die biquadratischen Reste, welche von dem biquadratischen Character der Zahl 2 handelt. Aus den in dieser Abhandlung gefundnen Resultaten folgt eine Beziehung zwischen den beiden quadratischen Formen

$$aa+2bb \quad \text{und} \quad cc+dd,$$

in welchen jede Primzahl von der Form $8i+1$ gleichzeitig enthalten ist. *Gaufs* beweist nämlich daselbst durch rein arithmetische Betrachtungen,

> dafs die Zahl 2, welche quadratischer Rest jeder Primzahl von der Form $8i+1$ ist, auch ihr biquadratischer Rest ist oder nicht, je nachdem bei der Darstellung der Primzahl durch die Form $aa+2bb$ die Wurzel des ungeraden Quadrates a die Form $8i\pm1$ oder die Form $8i\pm3$ hat.

Durch andere von diesen ganz unabhängige, aus seiner Theorie der Kreistheilung geschöpfte Betrachtungen, denen er jedoch ebenfalls eine arithmetische Einkleidung gab, beweist dann *Gaufs* an demselben Orte ferner auch,

> dafs die Zahl 2 biquadratischer Rest einer Primzahl von der Form $8i+1$ ist oder nicht, je nachdem bei Zerfällung der Primzahl in zwei Quadrate

die Wurzel des geraden Quadrates durch 8 dividirt aufgeht oder den Rest 4 läfst.

Die Vergleichung dieser beiden Criterien ergiebt den Satz,

dafs bei der Darstellung einer Primzahl von der Form $8i+1$ durch die beiden quadratischen Formen $aa+2bb$ und $cc+dd$, wo d die Wurzel des geraden Quadrates sein mag, immer gleichzeitig a die Form $8i\pm1$ und d die Form $8i$ oder a die Form $8i\pm3$ und d die Form $8i+4$ hat.

Es war zu wünschen, dafs dieser Satz unabhängig von der Theorie der biquadratischen Reste durch unmittelbare Betrachtung der Gleichung

$$aa+2bb = cc+dd$$

bewiesen, und dadurch das eine *Gaufs*ische Criterium auf das andere zurückgeführt würde. Dies hat *Dirichlet* in einer Abhandlung des 3ten Bandes des *Crelle*schen Journals gethan, wo er zugleich Untersuchungen über die allgemeinere Gleichung

$$aa+nbb = cc+dd$$

angestellt hat.

Der zuletzt erwähnte Satz kann auch noch auf eine andere Art ausgedrückt werden. Da entweder $+a$ oder $-a$, $+c$ oder $-c$ die Form $4m+1$ hat, ferner aus der Gleichung

$$p = aa+2bb = cc+dd,$$

wenn p die Form $8i+1$ hat, folgt, dafs b durch 2, d durch 4 aufgeht: so erhält man aus diesen beiden Zerfällungen der Primzahl p immer eine Gleichung,

$$(4m'+1)^2+8n'n' = (4m+1)^2+16nn = p,$$

wo die Zahlen m und m' positiv oder negativ sind. Der obige Satz besagt, dafs in dieser Gleichung m' und n gleichzeitig gerade oder ungerade sind, oder *dafs die Zahl $m'+n$ immer gerade ist.* Aus derselben Gleichung folgt aber auch unmittelbar, dafs m und $m'+n'$ gerade sind, wenn p die Form $16n+1$ hat, und dafs m und $m'+n'$ ungerade sind, wenn p die Form $16n+9$ hat, oder *dafs die Zahl $m+m'+n'$ immer gerade ist.* Es wird daher zufolge des obigen Satzes auch $m+n+n'$ immer gerade sein, oder dieser Satz folgendermafsen ausgesprochen werden können,

wenn eine Primzahl p von der Form $8i+1$ durch die beiden quadratischen Formen $(4m+1)^2+16nn$ und $(4m'+1)^2+8n'n'$ dargestellt wird, so sind die beiden Zahlen $m+n$ und n' immer gleichzeitig gerade oder ungerade.

In dieser Gestalt findet man den Satz auch als ein Corollar einer analytischen Formel, welche sich aus den Reihenentwicklungen der Theorie der elliptischen Functionen ergiebt, und in welcher eine Reihe, deren Exponenten die eine quadratische Form haben, einer Reihe gleich wird, deren Exponenten in der andern quadratischen Form enthalten sind. Aus derselben Quelle fliefst eine grofse Anzahl ähnlicher Gleichungen, die Sätze über die Eigenschaften quadratischer Simultanformen ergeben, und in denen die Exponenten der Reihen in den quadratischen Formen x^2+y^2, x^2+2y^2, x^2+3y^2, x^2+6y^2, $2x^2+3y^2$ enthalten sind. Einige solcher Gleichungen lassen sich auch aufstellen, in denen die Exponenten der Reihen in höheren quadratischen Formen, wie x^2+5y^2, x^2+7y^2 enthalten sind. Die folgenden Untersuchungen sollen sich mit diesen analytischen Formeln und den daraus folgenden arithmetischen Sätzen beschäftigen. Da die Anzahl dieser Formeln begränzt scheint, so kann es Interesse haben, dieselben zu erschöpfen.

Die sämmtlichen diesen Untersuchungen zum Grunde gelegten Entwicklungen sind particuläre Fälle einer Fundamentalformel der Theorie der elliptischen Functionen, welche in der Gleichung

$$\begin{aligned}&(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\,..\\ &\times(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)(1-q^7z)\,..\\ &\times(1-qz^{-1})(1-q^3z^{-1})(1-q^5z^{-1})(1-q^7z^{-1})\,..\\ &=1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\,..\end{aligned}$$

enthalten ist. Diese Gleichung gilt für alle Werthe von z und für die Werthe von q, deren Modul kleiner als 1 ist. Man kann derselben verschiedne Formen geben. Setzt man q^m für q, wo m eine beliebige positive Gröfse ist, und gleichzeitig $+q^{\pm n}$ oder $-q^{\pm n}$ für z, so erhält man aus ihr die folgenden beiden Formeln:

$$\begin{aligned}1.\quad &(1-q^{m-n})(1-q^{m+n})(1-q^{2m})(1-q^{3m-n})(1-q^{3m+n})(1-q^{4m})\,..\\ &=1-q^{m-n}-q^{m+n}+q^{4m-2n}+q^{4m+2n}-q^{9m-3n}-q^{9m+3n}+\,..,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2.\quad &(1+q^{m-n})(1+q^{m+n})(1-q^{2m})(1+q^{3m-n})(1+q^{3m-n})(1-q^{4m})\,..\\ &=1+q^{m-n}+q^{m+n}+q^{4m-2n}+q^{4m+2n}+q^{9m-3n}+q^{9m+3n}+\,...\end{aligned}$$

Setzt man $m-n=a$, $2n=b$, so werden diese Formeln,

$$\begin{aligned}3.\quad &(1-q^{a})(1-q^{a+b})(1-q^{2a+b})(1-q^{3a+b})(1-q^{3a+2b})(1-q^{4a+2b})\,..\\ &=1-q^{a}-q^{a+b}+q^{4a+b}+q^{4a+3b}-q^{9a+3b}-q^{9a+6b}+\,..,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4.\quad &(1+q^{a})(1+q^{a+b})(1-q^{2a+b})(1+q^{3a+b})(1+q^{3a+2b})(1-q^{4a+2b})\,..\\ &=1+q^{a}+q^{a+b}+q^{4a+b}+q^{4a+3b}+q^{9a+3b}+q^{9a+6b}+\,..,\end{aligned}$$

wo die Exponenten in den unendlichen Producten eine Reihe bilden, deren

erstes Glied a ist und deren Differenzen

$$b,\ a,\ a,\ b,\ a,\ a,\ b \text{ etc.}$$

sind, die Exponenten in den Entwicklungen dagegen eine Reihe bilden, deren erstes Glied 0 ist, und deren Differenzen

$$a,\ b,\ 3a,\ 2b,\ 5a,\ 3b,\ 7a \text{ etc.}$$

sind. Bezeichnet man die unendlichen Producte und Reihen durch die ihren allgemeinen Gliedern vorgesetzten Zeichen Π und Σ, so kann man die Formeln (1.) und (2.) folgendermafsen darstellen,

$$5.\quad \Pi\{(1-q^{2mi+m-n})(1-q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\} = \Sigma(-1)^i q^{mi^2+ni},$$

$$6.\quad \Pi\{(1+q^{2mi+m-n})(1+q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\} = \Sigma q^{mi^2+ni}.$$

Hier sind dem Index i unter dem Zeichen Π die Werthe $0, 1, 2, \ldots \infty$, unter dem Zeichen Σ dagegen die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\infty$ beizulegen, wie auch im Folgenden immer angenommen werden wird. Setzt man in diesen Formeln m^2 für m, $2mn$ für n, und multiplicirt auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit q^{n^2}, so erhalten sie folgende Form:

$$7.\quad q^{n^2}\Pi\{(1-q^{2m^2i+m^2-2mn})(1-q^{2m^2i+m^2+2mn})(1-q^{2m^2i+2m^2})\} = \Sigma(-1)^i q^{(mi+n)^2},$$

$$8.\quad q^{n^2}\Pi\{(1+q^{2m^2i+m^2-2mn})(1+q^{2m^2i+m^2+2mn})(1-q^{2m^2i+2m^2})\} = \Sigma q^{(mi+n)^2}$$

Von den drei einfachen unendlichen Producten, welche mit einander zu multipliciren sind, werden zwei einander gleich, wenn $b=0$; es können die drei in zwei zusammengezogen werden, wenn $b=2a$, oder in ein einziges, wenn $b=a$. Setzt man in diesen Fällen $a=1$, wie es unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann, und daher

1. $m=1$, $n=0$; 2. $m=2$, $n=1$; 3. $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{1}{2}$:

so erhält man aus (5.) und (6.) die *fünf* particulären Formeln:

$$9.\quad \begin{cases} \Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\} = \Sigma(-1)^i q^{i^2}, \\ \Pi\{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\} = \Sigma q^{i^2}, \\ \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\} = \Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}, \\ \Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\} = \Sigma q^{2i^2+i}, \\ \Pi(1-q^{i+1}) = \Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}i^2+\frac{1}{2}i}. \end{cases}$$

Die Zahlen $2i^2+i$ bilden, wenn man dem i alle positiven und negativen Werthe giebt, die Reihe der *dreieckigen* Zahlen.

Wenn von den unendlichen Producten, welche aus (5.) und (6.) für specielle Werthe von m und n hervorgehen, irgend welche *zwei* mit einander

multiplicirt werden, so erhält man dadurch ein neues unendliches Product, in dessen Reihenentwicklung nur solche Glieder vorkommen, deren Exponenten in einer bestimmten quadratischen Form zweier Variabeln enthalten sind, welche Anzahl der Variabeln der quadratischen Formen ich immer stillschweigend voraussetzen werde, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist. So oft daher, was in einer grofsen Anzahl von Fällen geschieht, ein solches unendliche Product noch durch die Multiplication zweier anderer in den obigen Ausdrücken (5.) und (6.) enthaltner unendlicher Producte entstehen kann, werden durch die Entwicklung desselben Reihen erhalten, in denen die Exponenten der Glieder *in zwei bestimmten quadratischen Functionen zugleich* enthalten sind.

Zufolge ihrer Entstehungsart können diese Reihen durch zwei verschiedne Doppelsummen ausgedrückt, und daher nach zwei verschiedenen Gesetzen gebildet werden. Nach dem einen erhalten die Exponenten der einzelnen Glieder eine andere quadratische Form als nach dem andern; wenn man aber in jeder Doppelsumme alle Glieder, in deren Exponenten die quadratische Form denselben Werth erhält, zusammenfafst, müssen beide Bildungsgesetze zu demselben Resultate führen, und daher sowohl nach dem einen als nach dem andern die Coëfficienten aller Glieder, in welchen die Exponenten nicht zugleich in den beiden quadratischen Formen enthalten sind, verschwinden. Wenn man hingegen die Coëfficienten der Glieder, deren Exponenten in den beiden quadratischen Formen enthalten sind, wie sie aus den beiden verschiednen Bildungsweisen hervorgehen, mit einander vergleicht, erhält man jedesmal einen ähnlichen arithmetischen Satz, wie oben für die beiden Zerfällungen der Primzahlen von der Form $8i+1$ aufgestellt worden ist.

Durch die Herleitung dieser arithmetischen Sätze aus den analytischen Entwicklungen wird aber nicht allein der Vorrath der arithmetischen Beweismittel vermehrt, sondern es werden dadurch auch die Sätze selbst in einer neuen bemerkenswerthen Form gefunden. Schon in einem früheren Falle, in welchen sich ein arithmetischer Fundamentalsatz als Corollar einer elliptischen Formel ergab, erhielt zugleich dieser Satz eine wesentlich verschiedene Fassung, die ihm einen allgemeineren Character und eine erhöhte Wichtigkeit gab. Der Satz nämlich,

> dafs für jede Zahl P, *die nur Primzahlen von der Form* $4i+1$ *zu Theilern hat,* die Gleichung $xx+yy=P$ so viel Lösungen in ganzen positiven oder negativen Werthen von x und y verstattet, als die vierfache Anzahl der ungeraden Factoren von P beträgt,

ergiebt sich aus der Theorie der elliptischen Functionen in der allgemeinern Form,

> dafs für *jede beliebige* Zahl P die Gleichung $xx+yy=P$ so viel Lösungen in ganzen positiven oder negativen Werthen von x und y verstattet, als der vierfache *Überschufs* der Anzahl der Factoren der Zahl P von der Form $4i+1$ über die Anzahl ihrer Factoren von der Form $4i+3$ beträgt *).

Diese verallgemeinerte Form des Satzes über die Anzahl der Zusammensetzungen der Zahlen aus *zwei* Quadraten verstattet es, von ihm aus zu Sätzen über die Anzahl der Zusammensetzungen der Zahlen aus *vier* Quadraten aufzusteigen. S. *Crelle's* Journal 12ter Theil S. 167. Anwendungen ähnlicher Umformungen auf tiefere arithmetische Sätze findet man in der berühmten Abhandlung: *Sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, im 21ten Bande desselben Journals S. 3.

Als Beispiel der allgemeineren Fassung, in welcher die Sätze über Simultanformen durch die Analysis der elliptischen Functionen gefunden werden, will ich die Erweiterung anführen, welche der oben aufgestellte Satz erfährt,

> dafs in den Simultanformen $(4m+1)^2+16nn$ und $(4m'+1)^2+8n'n'$, durch welche man jede Primzahl von der Form $8i+1$ darstellen kann, die Zahlen $m+n$ und n' gleichzeitig gerade und ungerade sind.

In der Form, wie er aus der analytischen Formel hervorgeht, heifst dieser Satz:

> *für jede beliebige Zahl P beträgt der Überschufs der Anzahl der Lösungen der Gleichung*
>
> $$P=(4m+1)^2+16nn,$$
>
> *in welchen $m+n$ gerade, über die Anzahl der Lösungen, in welchen $m+n$ ungerade ist, eben so viel als der Überschufs der Anzahl der Lösungen der Gleichung*
>
> $$P=(4m'+1)^2+8n'n',$$
>
> *in welchen n' gerade, über die Anzahl der Lösungen, in welchen n' ungerade ist.*

Der wesentliche Character dieser Erweiterungen besteht darin, dafs die nur für eine besondere Classe von Zahlen geltenden Sätze durch andere ersetzt werden, welche *auf alle Zahlen* Anwendung finden, für jene besondern Classen von Zahlen die tiefer liegenden Eigenschaften, welche man bemerken will, herausstellen, für alle andern Zahlen aber sich auf einen elementaren Inhalt

---

*) S. Fund. N. Th. F. Ell. pag. 107.

reduciren. Wenn gewisse Zahlenclassen gewisse Zerfällungen verstatten, so ersetzt man die Zahlen, welche die Anzahl dieser Zerfällungen bestimmen, durch Überschüsse, welche sich für die besondern Classen von Zahlen auf die Anzahl ihrer Zerfällungen reduciren, und für alle andern Classen *verschwinden*.

Ich habe im Folgenden die sich aus den analytischen Entwicklungen ergebenden Eigenschaften der Zahlen auch aus bekannten arithmetischen Sätzen abzuleiten gesucht, wodurch man jedesmal für die analytische Formel einen rein arithmetischen Beweis erhält. Wenn diese arithmetischen Beweise der auf analytischem Wege gewonnenen Resultate keine wesentlichen Schwierigkeiten darbieten, so sind sie doch bisweilen complicirter Natur, und erfordern eigenthümliche Classificationen der Zahlen, welche vielleicht auch in andern Untersuchungen von Nutzen sein können. Es verstatten diese Beweise oft eine gewisse Willkür in der Wahl der Methoden der Behandlung, so dafs sie leicht variirt werden können.

Ich bemerke noch, dafs bei mehreren der hier behandelten Entwicklungen elliptischer Reihen für die Vorzeichen der Glieder solche Gesetze gefunden werden, dafs man sie durch Gröfsen ausdrücken kann, welche von den biquadratischen Characteren der Zahlen abhängen. Man gelangt so *a posteriori* zu den ersten merkwürdigen Beispielen der Einführung der biquadratischen Reste in die Entwicklungsgesetze elliptischer Reihen mit beliebigem Modul. Die Gröfsen, durch welche sich die Vorzeichen dieser elliptischen Reihen unmittelbar ausdrücken lassen, sind die nämlichen, welche durch ein von mir in die Theorie der Potenzreste eingeführtes besonderes Symbol bezeichnet werden, wodurch die Darstellung dieser Reihen an Einfachheit gewinnt.

Zusammenstellung der analytischen Formeln.

In dem 16ten Capitel der Einleitung in die Analysis des Unendlichen, welches *von der Theilung der Zahlen* handelt, hat *Euler* das unendliche Product

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots},$$

dessen Entwicklungscoëfficienten bestimmen, wie oft eine gegebene Zahl in beliebige ungleiche Zahlen oder in gleiche und ungleiche ungerade Zahlen ge-

theilt werden kann, Behufs der Erforschung dieser Coëfficienten untersucht, und dasselbe bei dieser Gelegenheit dem Bruche

$$\frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-q^{30}+q^{44}+q^{52}-\dots}{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+q^{22}+q^{26}-\dots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}$$

gleich gefunden. *Euler* ersetzt nämlich das unendliche Product durch den Bruch

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\dots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots},$$

dessen Zähler aus dem Nenner durch die Verwandlung von q in q^2 erhalten wird; für den Nenner aber findet er die in dem Nenner des vorstehenden Bruchs befindliche Reihe, deren Glieder zu Exponenten die *fünfeckigen* Zahlen, vor- und rückwärts ins Unendliche fortgesetzt, und abwechselnd die Coëfficienten $+1$ und -1 haben. Die eben angegebenen elliptischen Formeln lehren aber, dafs man für dasselbe unendliche Product noch *sechs* ähnliche Brüche, wie der von *Euler* gefundene, hat. Um diese demselben unendlichen Product gleichen Brüche zu erhalten, stelle ich dasselbe auf verschiedene Arten als Quotienten zweier anderer dar, welche in den allgemeinen unendlichen Producten (1.) und (2.) enthalten sind. Dies geschieht mittelst der folgenden Formeln:

I.

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\dots$$

$$= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\dots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots}$$

$$= \frac{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)(1+q^7)(1-q^8)\dots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)(1-q^{10})(1-q^{12})\dots}$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)\dots}{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3)^2(1-q^4)(1-q^5)^2(1-q^6)\dots}$$

$$= \frac{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)(1-q^6)\dots}{(1-q^2)^2(1-q^4)(1-q^6)^2(1-q^8)(1-q^{10})^2(1-q^{12})\dots}$$

$$= \frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})(1-q^{16})(1-q^{20})(1-q^{24})\dots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^7)(1-q^8)\dots}$$

$$= \frac{(1+q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)(1+q^5)(1-q^6)\dots}{(1-q^3)^2(1-q^6)(1-q^9)^2(1-q^{12})(1-q^{15})^2(1-q^{18})\dots}$$

$$= \frac{(1+q^3)(1+q^9)(1-q^{12})(1+q^{15})(1+q^{21})(1-q^{24})\dots}{(1-q)(1-q^5)(1-q^6)(1-q^7)(1-q^{11})(1-q^{12})\dots}.$$

Wegen der einfachen Reihenentwicklung, deren die elliptischen unendlichen Producte

$$(1\pm q^{m-n})(1\pm q^{m+n})(1-q^{2m})(1\pm q^{3m-n})(1\pm q^{3m+n})(1-q^{4m})\,..$$
$$= \Pi\{1\pm q^{2mi+m-n})(1\pm q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\}$$

zufolge der Formeln (1.) und (2.) oder (3.) und (4.) fähig sind, kann man sie gleichsam als Elementarfunctionen betrachten, und andere unendliche Producte aus ihnen zusammenzusetzen suchen. Die vorstehenden Formeln lösen die Aufgabe, das von *Euler* betrachtete unendliche Product

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\,..$$

durch diese elliptischen unendlichen Producte darzustellen. Man sieht, dafs diese Aufgabe mehrere Lösungen hat, indem man das vorgelegte unendliche Product durch die Formeln (I.) auf *sieben* verschiedne Arten als Quotienten zweier solcher elliptischen unendlichen Producte findet.

Die Factoren der elliptischen unendlichen Producte, welche die Zähler und Nenner der Formeln (I.) bilden, sind so geordnet, dafs die Exponenten der Potenzen von q fortwährend wachsen. Die Vorzeichen dieser Potenzen sind in den Nennern immer $-$, wie in der Formel (1.); in den Zählern dagegen entweder ebenfalls alle $-$ oder abwechselnd in zweien Factoren $+$ und im dritten $-$, wie in der Formel (2.). Nur der Zähler des vierten Bruchs macht eine Ausnahme, indem derselbe aus (1.) oder (2.) durch Annahme specieller Werthe für m und n nicht unmittelbar hervorgeht, sondern aus dem den Werthen $m = \frac{3}{2}$, $n = \frac{1}{2}$ entsprechenden Product $\Pi(1-q^{i+1})$ durch Änderung von q in $-q$ erhalten wird. Durch diese Änderung wird die letzte der Gleichungen (9.),

$$\Pi(1-q^{i+1}) = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)},$$

in

$$10. \qquad \Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i})\} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)} q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}$$

verwandelt, oder in

$$11. \qquad (1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)\,..$$
$$= 1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+q^{15}+q^{22}+q^{26}+q^{35}-\,..,$$

in welcher Reihe nach den beiden ersten positiven Gliedern abwechselnd *vier* negative und *vier* positive folgen.

Wenn man die beiden ersten Factoren der elliptischen unendlichen Producte mit

$$(1\pm q^a)(1\pm q^{a+b})$$

bezeichnet, so werden die Werthe von a und b oder von $m = a + \frac{1}{2}b$, $n = \frac{1}{2}b$ für die Zähler und Nenner der Formeln I. durch folgendes Tableau gegeben:

II.

Zähler:	a	2	$\overset{*}{1}$	1	$\overset{*}{1}$	4	$\overset{*}{1}$	$\overset{*}{3}$	m	3	$\overset{*}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\overset{**}{\frac{3}{2}}$	6	$\overset{*}{\frac{3}{2}}$	$\overset{*}{6}$
	b	2	2	1	1	4	1	6	n	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	3
Nenner:	a	1	2	1	2	1	3	1	m	$\frac{3}{2}$	3	1	2	2	3	3
	b	1	2	0	0	2	0	4	n	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1	0	2.

Die Fälle, in welchen immer zwei Vorzeichen $+$, das dritte $-$ sind, habe ich bei den Zählern von den Fällen, in welchen alle Vorzeichen $-$ sind, durch übergesetzte Sternchen unterschieden. Das doppelte Sternchen bezieht sich auf den besondern Fall des Zählers des vierten Bruches, wo die Vorzeichen der Potenzen von q in den einzelnen Factoren abwechselnd $+$ und $-$ sind. Man erhält aus den angegebnen Werthen von a und b die Reihe der Exponenten durch ihre ersten Differenzen b, a, a, b, a, a etc.

Bezeichnet man die elliptischen unendlichen Producte durch die ***allgemeinen*** Ausdrücke ihrer Factoren, wie in den Formeln (5.) und (6.), so erhält man aus I. die folgenden Gleichungen, deren Richtigkeit ganz von selbst in die Augen fällt, wenn man nur die eine Hülfsgleichung

$$\Pi\{(1+q^{i+1})(1-q^{2i+1})\} = \frac{\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})\}}{\Pi(1-q^{i+1})} = 1$$

benutzt:

III.

$$\Pi(1+q^{i+1}) = \frac{\Pi(1-q^{2i+2})}{\Pi(1-q^{i+1})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

$$= \frac{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}}{\Pi(1-q^{2i+2})} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{i+1})}{\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3.$$

$$= \frac{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})\}}{\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4.$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{4i+4})}{\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5.$$

$$= \frac{\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})\}}{\Pi\{(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}} \quad \ldots \quad 6.$$

$$= \frac{\Pi\{(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+12})\}}{\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}} \quad \ldots \quad 7.$$

Man kann bemerken, dafs alle diese Brüche im Zähler oder Nenner oder in beiden einen der fünf in den Formeln (9.) angegebnen particulären Ausdrücke enthalten, in welchen von den drei einfachen unendlichen Producten von der Form $\Pi(1 \pm q^{\alpha i+\beta})$, durch deren Multiplication jedes der elliptischen unendlichen Producte (1.) oder (2.) gebildet wird, entweder zwei einander gleich sind, oder zwei oder auch alle drei in ein solches einfaches unendliches Product zusammengezogen werden können.

Wenn man von diesen Zusammenziehungen keinen Gebrauch macht, so kann man die unter dem Zeichen Π befindlichen *allgemeinen* Ausdrücke der Factoren der elliptischen unendlichen Producte *aus ihren drei ersten Factoren* erhalten, indem man in diesen drei Factoren zu den Exponenten von q das Product des Index i mit dem im *dritten* Factor befindlichen Exponenten hinzufügt, wie dies die Vergleichung der Formeln (I.) und (III.) vor Augen legt. Nur in dem Zähler des vierten Bruchs müssen wegen der besondern Beschaffenheit desselben die Potenzen von q in den einzelnen Factoren noch mit (-1) multiplicirt werden. Man erhält dann zufolge der angegebenen Regel aus den drei ersten Factoren $(1+q)(1-q^2)(1+q^3)$ das unendliche Product

$$\Pi\{(1+(-1)^i q^{3i+1})(1-(-1)^i q^{3i+2})(1+(-1)^i q^{3i+3})\},$$

oder wenn man für i einmal alle geraden und dann alle ungeraden Zahlen setzt.

$$\Pi\{(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+2})(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}$$
$$= \Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})\},$$

wie in (III.).

Die Reihenentwicklungen der elliptischen unendlichen Producte der hier betrachteten Art erhält man ebenfalls leicht aus ihren *beiden* ersten Factoren

$$(1+q^a)(1+q^{a+b}) \quad \text{oder} \quad (1-q^a)(1-q^{a+b}).$$

Aus den Formeln (3.) und (4.) der Einleitung erhellt nämlich, dafs die Exponenten der Potenzen von q in diesen Entwicklungen eine Reihe bilden, deren erstes Glied 0 ist, und deren erste Differenzen

$$a, \; b, \; 3a, \; 2b, \; 5a, \; 3b \text{ etc.}$$

sind. Zufolge der Formeln (5.) und (6.) wird das allgemeine Glied dieser Entwicklungen

$$q^{\frac{1}{2}(a+b)i^2+\frac{1}{2}bi} \quad \text{oder} \quad (-1)^i q^{\frac{1}{2}(a+b)i^2+\frac{1}{2}bi},$$

und man erhält aus demselben die einzelnen Glieder in der Ordnung, wie die Exponenten von q der Gröfse nach auf einander folgen, wenn man dem In-

dex i nach einander die Werthe

$$0, \quad -1, \quad +1, \quad -2, \quad +2, \quad -3 \text{ etc.}$$

beilegt. Die Coëfficienten der Potenzen von q vom zweiten Gliede an werden, wenn die beiden ersten Factoren des unendlichen Products $(1-q^a)(1-q^{a+b})$ sind, abwechselnd -1, -1 und $+1$, $+1$, oder, wenn dieselben $(1+q)(1+q^{a+b})$ sind, alle $+1$. Wenn $b=0$, werden vom zweiten Gliede an immer zwei aufeinander folgende Glieder der Entwicklung einander gleich, und können daher in ein Glied, das den Coëfficienten -2 oder $+2$ erhält, zusammengezogen werden.

Es ist im Vorhergehenden immer angenommen, was unbeschadet der Allgemeinheit verstattet ist, dafs a und b positiv sind. Betrachtet man nämlich die allgemeine Form der elliptischen unendlichen Producte (1.) und (2.),

$$\Pi\{(1\pm q^{2mi+m-n})(1\pm q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\},$$

in welcher m immer positiv sein mufs, weil sonst die Factoren nicht convergiren, so kann man darin auch n immer positiv annehmen, da das Product ungeändert bleibt, wenn man n in $-n$ verändert; es wird daher auch $b=2n$ positiv. Es kann endlich auch $n<m$ oder $m-n=a$ positiv angenommen werden. Denn setzt man in dem vorstehenden unendlichen Producte $n+2km$ statt n, so erleidet dasselbe keine weitere Veränderung, als dafs es mit einem Factor

$$\frac{1\pm q^{m-n-2km}}{1\pm q^{-m+n+2km}}\cdot\frac{1\pm q^{3m-n-2km}}{1\pm q^{-3m+n+2km}}\cdots\frac{1\pm q^{(2k-1)m-n-2km}}{1\pm q^{-(2k-1)m+n+2km}}=(\pm 1)^k q^{-(k^2m+kn)}$$

multiplicirt wird. Man kann daher n immer kleiner als $2m$ annehmen. Ist n kleiner als $2m$, aber gröfser als m, so kann man $n+m$ für n setzen, wo $n<m$. Hierdurch aber verwandeln sich die unendlichen Producte

$$\Pi(1\pm q^{2mi+m-n}), \qquad \Pi(1\pm q^{2mi+m+n})$$

in

$$(1\pm q^{-n})\Pi(1\pm q^{2mi+m+m-n}), \qquad (1\pm q^{n})^{-1}\Pi(1\pm q^{2mi+m-(m-n)}),$$

und daher die elliptischen unendlichen Producte (1.) und (2.) in andere, in welchen blofs $m-n$ für n gesetzt ist, abgesehen von einem Factor $\pm q^{-n}$, mit welchem man noch zu multipliciren hat; die Gröfse $m-n$ ist aber positiv und kleiner als m. Es können daher in allen Fällen die elliptischen unendlichen Producte (1.) und (2.) auf solche zurückgeführt werden, in welchen n positiv und kleiner als m ist, und daher $a=m-n$, $b=2n$ positiv sind.

Vermittelst der obigen Regeln ist es leicht, die Reihenentwicklungen der Zähler und Nenner der Brüche anzugeben, durch welche in den For-

meln (I.) das *Euler*sche unendliche Product ausgedrückt worden ist. Es genügt hiezu, die beiden ersten Factoren jedes Zählers und Nenners, oder auch, wenn man will, das Tableau der Werthe von a und b in (II.) zu betrachten. Nur für den Zähler des vierten Bruches, der von etwas abweichender Beschaffenheit ist, und noch die Änderung von q in $-q$ erfordert, hat man sich der Formeln (10.) und (11.) zu bedienen. Man erhält hiernach die folgenden Ausdrücke des *Euler*schen Products, von denen der erste der von *Euler* selbst gefundene ist:

IV.

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\dots$$

$$= \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-\dots}{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-\dots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}} \quad \dots 1.$$

$$= \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+q^{15}+\dots}{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-\dots} = \frac{\Sigma q^{2ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}} \quad \dots 2.$$

$$= \frac{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+\dots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\dots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^i q^{ii}} \quad \dots 3.$$

$$= \frac{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+q^{15}+\dots}{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\dots} = \frac{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)} q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^i q^{2ii}} \quad \dots 4.$$

$$= \frac{1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-q^{48}-q^{60}-\dots}{1-q-q^3+q^6+q^{10}-q^{15}-q^{21}+\dots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{6ii+2i}}{\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}} \quad \dots 5.$$

$$= \frac{1+q+q^2+q^5+q^7+q^{12}+q^{15}+\dots}{1-2q^3+2q^{12}-2q^{27}+2q^{48}-\dots} = \frac{\Sigma q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^i q^{3ii}} \quad \dots 6.$$

$$= \frac{1+q^3+q^9+q^{18}+q^{30}+q^{45}+\dots}{1-q-q^5+q^8+q^{16}-q^{21}-q^{33}+\dots} = \frac{\Sigma q^{6ii+3i}}{\Sigma(-1)^i q^{3ii+2i}} \quad \dots 7.$$

Euler benutzt am angeführten Orte die von ihm gegebne Formel

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots = \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\dots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\dots}$$
$$= 1+C_1 q+C_2 q^2+C_3 q^3+C_4 q^4+\dots,$$

um für die Coëfficienten C_i ein recurrirendes Gesetz zu erhalten. Solcher recurrirender Gesetze für die Gröſsen C_i findet man durch die Formeln (IV.) *sieben* verschiedne. Das bequemste gewährt der vorletzte der Brüche (IV.). Derselbe giebt den Satz:

Wenn C_i die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl i in beliebige ungleiche Zahlen oder in gleiche und ungleiche ungerade Zahlen bedeutet, so wird

$$C_i = 2\{C_{i-3}-C_{i-12}+C_{i-27}-C_{i-48}+C_{i-75}-\dots\},$$

wo man, wenn i die Form $\frac{1}{2}\{3nn \pm n\}$ hat, rechts vom Gleichheitszeichen noch $+1$ hinzufügen mufs.

Nach der *Euler*schen Recursionsformel wird jeder Coëfficient C_i durch ungefähr $\sqrt{\frac{8i}{3}}$, nach der vorstehenden Recursionsformel durch ungefähr $\sqrt{\frac{i}{3}}$ vorhergehende Coëfficienten gefunden, so dafs man nach der letztern jeden Coëfficienten aus ungefähr $\sqrt{8}$ mal oder nur aus beinahe *dreimal* so wenigen vorhergehenden durch Addition und Subtraction zusammenzusetzen hat.

Wenn man die beiden ersten oder den ersten und dritten von den sieben Brüchen (IV.) mit einander multiplicirt, so erhält man zwei Brüche ähnlicher Art auch für das *Quadrat* des *Euler*schen Productes:

V.

$$\{(1+q)(1+q^2)(1+q^2)(1+q^4)\dots\}^2 = \Pi(1+q^{i+1})^2$$

$$= \frac{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)\dots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots} = \frac{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}}{\Pi(1-q^{i+1})}$$

$$= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\dots}{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3)^2(1-q^4)\dots} = \frac{\Pi(1-q^{2i+2})}{\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}}$$

$$= \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\dots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\dots} = \frac{\Sigma q^{2ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}$$

$$= \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\dots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\dots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{ii}}.$$

Wenn man die *drei* ersten von den Brüchen (IV.) mit einander multiplicirt, erhält man einen ähnlichen Bruch auch noch für den *Cubus* desselben Productes. Man kann aber für diesen Cubus auch eine Darstellung durch einen Bruch anderer Art finden, dessen Zähler und Nenner zwar ebenfalls unendliche Reihen sind, in denen die Exponenten von q eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, die Coëfficienten aber nicht mehr der positiven oder negativen Einheit gleich, sondern, abgesehen vom Zeichen, die Glieder einer arithmetischen Reihe der *ersten* Ordnung sind. Man erhält diese Darstellung mit Hülfe der in den Fund. pag. 185 (5.) gegebenen Formel,

$$\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots\}^3$$
$$= 1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-\dots = \Sigma(4i+1)q^{2ii+i},$$

und der daraus durch Verwandlung von q in q^2 abgeleiteten. Hiernach werden die beiden Ausdrücke für den *Cubus* des *Euler*schen Productes:

VI.

$$\{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots\}^3 = \Pi(1+q^{i+1})^3$$

$$= \frac{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)\ldots}{(1-q)^3(1-q^2)(1-q^3)^3(1-q^4)\ldots} = \frac{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}}{\Pi\{(1-q^{2i+1})^3(1-q^{2i+2})\}}$$

$$= \left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}\right\}^3 = \frac{\Pi(1-q^{2i+2})^3}{\Pi(1-q^{i+1})^3}$$

$$= \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\ldots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}\ldots} = \frac{\Sigma q^{2ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{ii}}$$

$$= \frac{1-3q^2+5q^6-7q^{12}+9q^{20}-\ldots}{1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-\ldots} = \frac{\Sigma(4i+1)q^{4ii+2i}}{\Sigma(4i+1)q^{2ii+i}}.$$

Wenn man in dieser und den vorhergehenden Formeln die Zähler und Nenner mit einander vertauscht, so erhält man die Ausdrücke für das unendliche Product

$$(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots,$$

so wie für sein Quadrat und seinen Cubus.

Ich will jetzt das unendliche Product, durch welches Fund. S. 83 die 4te Wurzel des Complements des Moduls der elliptischen Functionen ausgedrückt wird,

$$\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\ldots} = \sqrt[4]{k'}$$

als Quotienten zweier elliptischen unendlichen Producte von der hier betrachteten Art darstellen. Es kann auch dies auf mehrere Arten geschehen, wie aus den folgenden leicht zu beweisenden Formeln erhellt:

VII.

$$\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots} = \frac{\Pi(1-q^{2i+1})}{\Pi(1+q^{2i+1})}$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)\ldots} = \frac{\Pi(1-q^{i+1})}{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})\}} \quad \ldots 1.$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)\ldots} = \frac{\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}}{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}} \quad \ldots 2.$$

$$= \frac{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3)^2\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)(1-q^6)^2\ldots} = \frac{\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}}{\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}} \quad \ldots 3.$$

$$= \frac{(1-q^2)^2(1-q^4)(1-q^6)^2\ldots}{(1+q)^2(1-q^2)(1+q^3)^2\ldots} = \frac{\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}}{\Pi\{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}} \quad \ldots 4.$$

Die Zähler und Nenner der vorstehenden vier Brüche, durch welche das vorgelegte unendliche Product ausgedrückt werden kann, gehören sämmtlich zu den elliptischen unendlichen Producten, welche in den Formeln (9.) entwickelt sind, außer dem Nenner des ersten, der noch die Verwandlung von q in $-q$ erfordert, und in der Formel (10.) oder (11.) entwickelt ist. Substituirt man

diese Reihenentwicklungen, die man auch mittelst der oben gegebnen Regeln aus den beiden ersten Factoren der unendlichen Producte ableiten kann, so erhält man die folgenden Formeln:

VIII.

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-..}{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+..} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)} q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}} \quad . \; . \; . \quad 1.$$

$$= \frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}+..}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+..} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}}{\Sigma q^{2ii+i}} \quad . \; . \; . \quad 2.$$

$$= \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-..}{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-..} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{ii}}{\Sigma(-1)^i q^{2ii}} \quad . \; . \; . \quad 3.$$

$$= \frac{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-..}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+..} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{2ii}}{\Sigma q^{ii}} \quad . \; . \; . \quad 4.$$

Die beiden letzten Brüche können aus einander durch die Betrachtung abgeleitet werden, dafs das vorgelegte Product, wenn man q in $-q$ verändert, den reciproken Werth annimmt. Wenn man diese beiden Brüche mit einander multiplicirt, so heben der Nenner des ersten und der Zähler des zweiten einander auf, und man erhält für das *Quadrat* des vorgelegten Products oder für $\sqrt{k'}$ den in den Fund. S. 184 angegebnen Ausdruck.

Die 4te Wurzel des Moduls selbst wird zufolge Fund. S. 89 (7.),

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{(1-q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)\ldots}{(1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})(1-q^{14})\ldots}.$$

Wenn man wieder das in $\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}$ multiplicirte unendliche Product durch einen Bruch auszudrücken sucht, dessen Zähler und Nenner zu den elliptischen unendlichen Producten (1.) oder (2.) oder den daraus durch Verwandlung von q in $-q$ abgeleiteten gehören, so kann dies durch die folgenden *vier* Formeln geschehn:

IX.

$$\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)..}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)..} = \frac{\Pi(1+q^{2i+2})}{\Pi(1+q^{2i+1})}$$

$$= \frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})..}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)..} = \frac{\Pi(1-q^{4i+4})}{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})\}} \quad . \; . \; . \quad 1.$$

$$= \frac{(1+q^2)(1+q^6)(1-q^8)..}{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)..} = \frac{\Pi\{(1+q^{4i+2})(1-q^{8i+8})\}}{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}} \quad . \; . \; . \quad 2.$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^4)..}{(1-q^2)^2(1-q^4)..} = \frac{\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}}{\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}} \quad . \; . \; . \quad 3.$$

$$= \frac{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)..}{(1+q)^2(1-q^2)..} = \frac{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}}{\Pi\{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}} \quad . \; . \; . \quad 4.$$

Hieraus ergeben sich mit Hülfe der Formeln (9 — 11.) die folgenden vier Ausdrücke von $\sqrt[4]{k}$:

X.

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1-q^4-q^8+q^{20}+\dots}{1+q-q^2-q^5-\dots} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{6i^2+2i}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)} q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}} \quad \dots \quad 1.$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\dots}{1+q+q^3+q^6+\dots} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{4i^2+2i}}{\Sigma q^{2i^2+i}} \quad \dots \quad 2.$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1-q-q^3+q^6+\dots}{1-2q^2+2q^8-\dots} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}}{\Sigma(-1)^i q^{2i^2}} \quad \dots \quad 3.$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1+q+q^3+q^6+\dots}{1+2q+2q^4+\dots} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{2i^2+i}}{\Sigma q^{i^2}} \quad \dots \quad 4.$$

Wenn man den zweiten und vierten Bruch mit einander multiplicirt, so hebt sich der Nenner des zweiten mit dem Zähler des vierten, und man erhält die Fund. S. 184 für $\sqrt{k}$ gegebne Formel. Man sieht, dafs die für $\sqrt[4]{k}$ und die für $\sqrt[4]{k'}$ gefundnen vier Brüche respective *dieselben Nenner* haben, was in den Anwendungen dieser Formeln von Wichtigkeit ist.

Von besonderm Interesse sind in diesen Formeln diejenigen Brüche, in welchen der Zähler aus dem Nenner, wie in IV (1.), X. (2.), oder der Nenner aus dem Zähler, wie in VIII. (3.), durch Verwandlung von q in q^2 erhalten wird. Wenn man nämlich in solchem Bruche wiederholt q^2 für q substituirt, und die dadurch erhaltenen Resultate mit einander multiplicirt, so giebt die unendliche Multiplication den Zähler oder Nenner des Bruchs. Zugleich wird durch dieses Verfahren aus jedem Factor $1+q^a$ ein Factor $\frac{1}{1-q^a}$. Wenn daher, wie in den angeführten Fällen, diese Brüche unendlichen Producten gleich sind, welche aus Factoren $(1+q^a)^{\pm a}$ gebildet werden können, so kann man aus denselben sogleich auch diejenigen unendlichen Producte ableiten, welchen die Zähler und die Nenner der Brüche für sich besonders gleich werden. Diese Methode ist in der Theorie der elliptischen Functionen von grofser Wichtigkeit, indem sie dazu dient, aus den leichter zu findenden Formeln für den Modul die Factoren- und Reihenentwicklung des ganzen elliptischen Integrals abzuleiten.

Die im Vorhergehenden aufgestellten Formeln geben eine Gleichung zwischen je zwei Brüchen, durch welche man dasselbe unendliche Product ausgedrückt hat. Aus jeder dieser Gleichungen geht durch Multipliciren über Kreuz eine andere zwischen zwei Producten hervor, von denen jedes durch Multiplica-

tion zweier elliptischer unendlicher Producte oder elliptischer unendlicher Reihen gebildet wird, welche aus (1.) oder (2.) für specielle Werthe von m und n erhalten werden. Solcher Gleichungen wird es überhaupt so viele geben, als es unendliche Producte giebt, die man auf verschiedne Art in zwei elliptische unendliche Producte von der Form der unendlichen Producte (1.) oder (2.) zerfällen kann. Man wird 21 Gleichungen dieser Art aus (IV.), *zwei* neue aus (VIII.) und *zwei* andere aus (X.), ferner *eine* Gleichung aus (VI.) erhalten. Die übrigen Gleichungen, welche man noch aus (VIII.), (X.) und (V.) ableiten kann, sind in diesen enthalten.

Die Producte von der Form

$$\Sigma \pm q^{mi^2+ni} . \Sigma \pm q^{m'i^2+n'i},$$

welche sich auf jeder Seite des Gleichheitszeichens der auf die angegebene Art erhaltenen Gleichungen befinden, können durch *Doppelsummen* von der Form

$$\Sigma \pm q^{mi^2+m'k^2+ni+n'k}$$

dargestellt werden, in welchen jedem der Indices i und k die Werthe 0, ± 1, ± 2, ± 3, etc. zukommen. In den hier und weiter unten betrachteten Doppelsummen dieser Art sind $2m$ und $2n$ und eben so $2m'$ und $2n'$ ganze positive Zahlen, und zwar gleichzeitig gerade oder ungerade. Das Zeichen $\pm$ erhält in den verschiedenen Fällen Werthe von der Form

$$(-1)^i, \quad (-1)^{i+k}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k}.$$

Nur in der einen Gleichung, welche aus den Brüchen X. (2. 4.) entspringt, haben alle Glieder in beiden Doppelsummen das Vorzeichen $+$; in diesem Falle werden die *einzelnen* Glieder der Doppelsummen identisch, wodurch die Gleichung einen ganz elementaren Character erhält. In allen übrigen sind die quadratischen Formen, in denen die Exponenten der beiden einander gleichen Doppelsummen enthalten sind, nicht äquivalent, so dafs nicht jede in der einen enthaltene Zahl nothwendig auch in der andern enthalten ist. Es müssen daher die Vorzeichen der Glieder in beiden Doppelsummen abwechselnd positiv und negativ sein, damit sich in jeder derselben alle Glieder, deren Exponenten nicht in beiden quadratischen Formen zugleich enthalten sind, gegenseitig zerstören können.

Zu den auf die angegebne Art aus den obigen Formeln abgeleiteten Gleichungen können noch *drei* andere etwas mehr verborgene hinzugefügt werden, zu welchen man durch folgende Betrachtungen gelangt.

Aus der Formel (5.) der Einleitung folgt für $m = \frac{5}{2}$, $n = \frac{3}{2}$ und für $m = \frac{5}{2}$, $n = \frac{1}{2}$,

$$\Pi\{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})\} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i^2+3i)},$$
$$\Pi\{(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+5})\} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i^2+i)}.$$

Die Multiplication dieser beiden Formeln ergiebt, wenn man die letzte der Gleichungen (9.) benutzt,

$$12.\quad \Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{5i+5})\} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5i^2+5k^2+3i+k)}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3i^2+15k^2+i+5k)}.$$

Es ist ferner

$$\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{8i+8})^2\}$$
$$= \Pi\{(1-q^{8i+1})(1-q^{8i+7})(1-q^{8i+8})\} . \Pi\{(1-q^{8i+3})(1-q^{8i+5})(1-q^{8i+8})\}$$
$$= \Pi\{(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})\} . \Pi\{(1+q^{16i+4})(1+q^{16i+12})(1-q^{16i+16})\},$$

und daher, wenn man nach einander in (5.) $m=4$, $n=3$; $m=4$, $n=1$; $m=2$, $n=1$, und in (6.) $m=8$, $n=4$ setzt:

$$13.\quad \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{8i+8})^2\} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{4i^2+4k^2+3i+k}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{2i^2+8k^2+i+4k}$$

Ferner ist

$$\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+12})^2\}$$
$$= \Pi\{(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})\} . \Pi\{(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+12})\}$$
$$= \Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\} . \Pi\{(1+q^{24i+6})(1+q^{24i+18})(1-q^{24i+24})\},$$

und daher, wenn man nach einander in (5.) $m=6$, $n=5$; $m=6$, $n=1$; $m=3$, $n=2$, und in (6.) $m=12$, $n=6$ setzt,

$$14.\quad \Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+12})^2\} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{6i^2+6k^2+5i+k}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{3i^2+12k^2+2i+6k}$$

Diese drei Formeln sind auf analoge Art gebildet, und entsprechen respective den Zahlen 5, 8, 12. Es scheint nicht, dafs es noch mehrere ähnlich gebildete giebt.

Die hier betrachteten Doppelsummen

$$\Sigma \pm q^{mi^2+m'k^2+ni+n'k}$$

werden durch das Gesetz der Vorzeichen ihrer Glieder und durch die quadratischen Formen definirt, in welchen die Exponenten derselben enthalten sind. Der Character dieser Formen, in welchen $2m$ und $2m'$ ganze positive Zahlen sind, wird hauptsächlich von dem Producte $4mm'$ abhängen, welches man von einem quadratischen Factor, wenn es solchen hat, befreit. Ich will daher die Gleichungen, welche man zwischen zwei Doppelsummen der angegebnen Art findet, nach den Werthen, welche die von ihren quadratischen Factoren be-

freiten Zahlen $4mm'$ in der einen und der andern Doppelsumme annehmen, in verschiedne Classen theilen. Es soll hiebei mit

$$(\mu, \nu)$$

die Classe bezeichnet werden, welche alle diejenigen Gleichungen umfaſst, in denen der Werth von $4mm'$ für die eine Doppelsumme μ, für die andere ν ist, oder sich von diesen Zahlen nur durch einen quadratischen Factor unterscheidet.

Unter den zwischen Doppelsummen der angegebnen Art gefundenen Gleichungen können diejenigen als von mehr elementarer Natur angesehen werden, in welchen $\mu = \nu$, oder in welchen $4mm'$ für die beiden einander gleichen Doppelsummen entweder denselben Werth oder zwei nur durch einen quadratischen Factor unterschiedene annimmt. Von dieser Art Gleichungen enthält die hier unten folgende Formelntabelle drei Classen (1, 1), (2, 2), (3, 3). Eine zu einer Classe (6, 6) gehörige Gleichung geht aus den im Vorhergehenden gefundnen Formeln nicht hervor. Die Gleichungen dieser drei Classen lassen sich alle unmittelbar beweisen, d. h. ohne daſs hiezu ein besonderer Satz der Analysis oder Arithmetik zu Hülfe genommen zu werden braucht. Wenn solche unmittelbare Verification keine neuen merkwürdigen Resultate giebt, so gewährt sie das Mittel, zu Resultaten, welche auf einem sogenannten indirecten Wege, wie hier durch die Zerfällung der unendlichen Reihen in unendliche Producte, in einem allgemeinern Zusammenhange gefunden sind, auf einem elementaren und directen Wege zu gelangen. Man bewerkstelligt solche Verification durch eine Art von Synthesis, durch welche die auf indirectem Wege gefundnen Resultate auf reine Identitäten zurückgeführt werden. Diese Synthesis ist in allen Fällen, in welchen sie möglich ist, von Interesse. Die gefundnen Identitäten geben nämlich entweder verborgne Eigenschaften der Gröſsen, die oft einem heterogenen Gebiet angehören, oder, wenn sie evident sind, einfache und directe Beweise und bisweilen neue Methoden. Übrigens sind gerade diese elementareren Gleichungen, welche den Classen (μ, μ) angehören, wichtiger Verallgemeinerungen fähig.

Die Classen, in denen μ und ν von einander verschieden sind, oder in denen die Werthe, die $4mm'$ für die beiden einander gleichen Doppelsummen annimmt, weder die nämlichen sind, noch sich bloſs durch einen quadratischen Factor unterscheiden, sind auf den Fall bezüglich, wenn die Entwicklung der unendlichen Producte nur solche Glieder giebt, deren Exponenten in zwei wesentlich verschiedenen quadratischen Formen zugleich enthalten sind. Man findet aus den obigen Formeln *sechs* Classen dieser Art, welche den Com-

binationen je zweier von den Zahlen 1, 2, 3, 6 entsprechen, und aufserdem noch eine Classe, welche der Combination der Zahlen 1 und 5 entspricht, aber nur *eine* Gleichung enthält. Die hier folgende Formelntabelle wird daher *zehn* Classen Gleichungen enthalten, deren Character durch die Symbole

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3),
(1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 6), (1, 5)

bezeichnet wird. Bei jeder Formel habe ich die Gleichung angemerkt, aus der sie erhalten worden ist.

[*In den unendlichen Producten sind dem Index i die Werthe* 0, 1, 2, 3 *etc., in den Doppelsummen den Indices i und k die Werthe* 0, ±1, ±2, ±3 *etc. beizulegen.*]

A. (1, 1).

1. $\Pi\{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma q^{2i^2+2k^2+i+k} = \Sigma q^{i^2+4k^2+2k}$ . . . . X. 2. 4.

2. $\Pi\{(1-q^{6i+2})(1-q^{3i+3})^2(1-q^{6i+4})\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+3kk+i} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+kk+i+k)}$ . . . . IV. 1. 6.

3. $\Pi\{(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+2})(1-q^{6i+6})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+3kk+i+2k} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+12kk+i+6k)}$ . . . . . IV. 1. 7.

4. $\Pi\{(1-q^{4i+2})^4(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{2ii+2kk} = \Sigma(-1)^i q^{ii+kk}$ . . . . VIII. 3. 4.

5. $\Pi\{(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{4ii+4kk+2i} = \Sigma(-1)^k q^{2ii+2kk+i+k}$ *) . . . . B. D.

6. $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{8i+8})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{4ii+4kk+i+3k} = \Sigma(-1)^i q^{2ii+8kk+i+4k}$ . . . . 13.

7. $\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+12})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+6kk+i+5k} = \Sigma(-1)^i q^{3ii+12kk+2i+6k}$ . . . . 14.

8. $\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})^4\}$

$= \Sigma(4k+1) q^{2ii+2kk+i+k} = \Sigma(-1)^i (4k+1) q^{ii+4kk+2k}$ . . . . . . VI.

---

*) Die Formel (A. 5.) ergiebt sich aus der Combination der Formeln (B.) und (D.).

B. (2, 2).

1. $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+2k)} = \Sigma(-1)^i q^{ii+2kk+k}$ . . . . . IV. 2. 3. V.

2. $\Pi\{(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+6})^2\}$

$= \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+4k)} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+3kk+3i}$ . . . . IV. 6. 7.

C. (3, 3).

$\Pi(1-q^{2i+2})^2$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+2kk+2i} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)}$

$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)}$ . . . . IV. 4. 5.

D. (1, 2).

1. $\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2\}$

$= \Sigma(-1)^k q^{2ii+2kk+i} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+2k)}$

$= \Sigma(-1)^k q^{ii+2kk+k}$ . . . . VIII. 2. 4. IV. 2. 4. X. 3. 4.

2. $\Pi\{(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^k q^{2ii+2kk+i+k} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+6kk+i+2k}$

$= \Sigma(-1)^i q^{2ii+4kk+2k}$ . . . . IV. 2. 5. X. 2. 3.

3. $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{2ii+2kk+k} = \Sigma(-1)^i q^{ii+2kk+k}$ . . . . VIII. 2. 3.

E. (1, 3).

1. $\Pi(1-q^{\ +1})^2$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+3kk+i+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+kk+i}$ . . . . . . IV. 1. 3.

2. $\Pi(1-q^{2i+2})^2$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+3kk+i+k} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)}$ . . . . . . IV. 1. 2.

F. (1, 6).

1. $\Pi\{(1-q^{4i+2})^3(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+3kk+i+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+2kk+i}$ . . . . IV. 1. 4.

2. $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+12kk+i+4k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+2kk+i+k}$ . . . . IV. 1. 5.

G. (2, 3).

1. $\Pi\{(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1+q^{6i+5})(1-q^{12i+6})^3(1-q^{12i+12})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i)} = \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i)}$ . . . . IV. 4. 6.

2. $\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+4k)} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+2kk+3i}$ . . . . IV. 4. 7.

3. $\Pi\{(1-q^{6i+3})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+3kk+2i} = \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)}$ . . . . IV. 5. 6.

4. $\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{12i+4})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+3kk+2i+k} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+2kk+3i+k}$ . . . . IV. 5. 7.

H. (2, 6).

1. $\Pi\{(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+2})(1-q^{6i+3})^3(1-q^{6i+6})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i)} = \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+2kk+i)}$ . . . . IV. 3. 6.

2. $\Pi\{(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})^2(1-q^{6i+6})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+4k)} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+kk+3i}$. . . . . IV. 3. 7.

3. $\Pi\{(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+4})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+8})\}$

$= \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+2k)} = \Sigma(-1)^k q^{2ii+3kk+i}$ . . . . IV. 2. 6.

4. $\Pi\{(1-q^{6i+2})(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+12})^2\}$

$= \Sigma(-1)^k q^{6ii+3kk+3i+k} = \Sigma(-1)^k q^{2ii+3kk+i+2k}$ . . . . IV. 2. 7.

I. (3, 6).

1. $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+2})^3(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i)} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+2kk+i)}$ VIII. 1. 3; 1. 4; IV. 3. 4.

2. $\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+kk+2i}$ . . . . . X, 1. 4; IV. 3. 5.

3. $\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^k q^{2i^2+6k^2+i+2k} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)} q^{\frac{1}{2}(3i^2+3k^2+4i+k)}$ . . . . X. 1. 2.

K. (1, 5).

$\Pi\{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5ii+5kk+3i+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+15kk+i+5k)}$ . . . . 12.

Anmerkung. Die *drei* Formeln A. (2), A. (4), A. (5) sind particuläre Fälle einer *allgemeinern* Formel. Man hat nämlich, wie sich auf den ersten Anblick ergiebt, die folgende Gleichung,

$$\Pi\{(1+q^{2mi+m-n})(1+q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\}.\Pi\{(1-q^{2mi+m-n})(1-q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\}$$
$$=\Pi\{(1-q^{4mi+2m-2n})(1-q^{4mi+2m+2n})(1-q^{4mi+4m})\}.\Pi\{(1-q^{4mi+2m})^2(1-q^{4mi+4m})\},$$

woraus sich vermöge der Formeln (5.) und (6.) der Einleitung die folgende Gleichung zwischen zwei Doppelsummen ergiebt,

$$15. \qquad \Sigma(-1)^k q^{m(i^2+k^2)+n(i+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{2m(i^2+k^2)+2ni^2}.$$

Die drei Formeln A. (2), A. (4), A. (5) werden hieraus erhalten, wenn man respective $m=\frac{1}{2}$, $n=1$; $m=1$, $n=0$; $m=2$, $n=1$ setzt.

Ich will noch einiges über die Art bemerken, wie in der vorstehenden Formentabelle die unendlichen Producte ausgedrückt worden sind. Diese unendlichen Producte können nämlich auf mannichfache Art dargestellt werden, wie alle, welche durch Multiplication einfacher unendlicher Producte von der Form $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})$ oder ihrer Potenzen gebildet werden. Man bewerkstelligt ihre Transformationen, indem man die einfachen unendlichen Producte $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})$, welche ihre Factoren bilden, in mehrere ähnliche unendliche Producte zerfällt. Dies geschieht mittelst der Formel

$$16. \qquad \Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta}) = \Pi(1\pm q^{p\alpha i+\beta})\Pi(1\pm q^{p\alpha i+\alpha+\beta})\Pi(1\pm q^{p\alpha i+2\alpha+\beta})\ldots$$
$$\ldots\Pi(1\pm q^{p\alpha i+(p-1)\alpha+\beta}),$$

in welcher p eine beliebige positive ganze Zahl bedeuten kann, und immer das obere oder immer das untere Zeichen zu nehmen ist. Mehrere von den unendlichen Producten, welche aus solchen Zerfällungen von von einander verschiedenen unendlichen Producten $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})$, $\Pi(1\pm q^{\alpha' i+\beta'})$, etc. hervorgehen, kann man dann bisweilen wieder umgekehrt mittelst derselben Formel in ein einziges einfaches unendliches Product zusammenziehen. Wenn aus den vorgenommnen Zerfällungen zwei Factoren $\Pi(1+q^{\alpha i+\beta})$, $\Pi(1-q^{\alpha i+\beta})$ entstehen, wird man dieselben ebenfalls in ein einziges einfaches unendliches Product $\Pi(1-q^{2\alpha i+2\beta})$ zusammenziehen können. Endlich wird man das Product $\Pi(1+q^{\alpha i+\alpha})\Pi(1-q^{2\alpha i+\alpha})$, welches der Einheit gleich ist, so oft dasselbe nach den geschehnen Zerfällungen angetroffen wird, fortwerfen können. Durch diese Verfahrungsarten kann man demselben Ausdruck unendlich viele Formen geben, und es werden bisweilen selbst die einfachsten Formen, welche derselbe annehmen kann, noch so verschieden unter einander sein können, dafs ihre Identität nicht sogleich in die Augen springt.

Unter den verschiednen Formen, welche die hier betrachteten unendlichen Producte durch die im Vorigen angedeuteten Zerfällungen und Zusammenziehungen erhalten, kann man einige als *Normalformen* ansehen. *Es soll ein Ausdruck*

$$\Pi\{(1\pm q^{\alpha i+\beta})^{r}(1\pm q^{\alpha' i+\beta'})^{r'}(1\pm q^{\alpha'' i+\beta''})^{r''}\ldots\}$$

eine Normalform haben, wenn die unendlichen Producte $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})$, $\Pi(1\pm q^{\alpha' i+\beta'})$, *etc. keine gemeinschaftlichen Factoren oder nicht solche Factoren haben, die sich nur durch die Vorzeichen der gleichnamigen Potenzen von q unterscheiden.* Es werden daher die arithmetischen Reihen, welche die Exponenten $\alpha i+\beta$, $\alpha' i+\beta'$, etc. bilden, wenn man der Gröfse i die Werthe 0, 1, 2, 3, etc. in inf. giebt, lauter von einander verschiedene Zahlen enthalten müssen. Hiezu ist erforderlich, *dafs keine zwei von den Zahlen* α, α', α'', *etc. relative Primzahlen sind, und, wenn f den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen* α *und* α' *bedeutet, die entsprechenden Zahlen* β *und* β', *durch f dividirt, nicht denselben Rest lassen.*

Wenn mehrere von den einfachen unendlichen Producten, deren Potenzen, mit einander multiplicirt, eine Normalform bilden, in dieselbe Potenz erhoben sind, und es möglich ist, dieselben mittelst der obigen Formel (16.) in ein einziges einfaches unendliches Product zusammenzuziehen, so wird durch diese Zusammenziehung die Normalform nicht aufhören eine solche zu sein, zugleich aber eine einfachere Gestalt gewinnen. Wenn keine solche Zusammenziehung einer Normalform mehr Statt finden kann, wird man sagen, dafs sie einen einfachsten Ausdruck hat. In solchen *einfachsten Normalformen* sind die in der Formelntabelle enthaltnen unendlichen Producte dargestellt worden. Es kann aber bisweilen *mehrere* einfachste Normalformen desselben unendlichen Productes geben, und es wird vorkommen können, dafs zwei einfachste Normalformen auch *dieselbe Anzahl* Factoren von der Form $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})^{r}$ haben. So wird z. B. das unendliche Product

$$\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+3})\},$$

welches bereits eine Normalform hat, in die beiden verschiednen Formen

$$\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})\},\qquad \Pi\{(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+2})(1-q^{6i+3})\}$$

zusammengezogen werden können, von denen jede eine einfachste Normalform ist, und aus derselben Anzahl einfacher unendlicher Producte gebildet wird. Es ist jedoch zu bemerken, dafs die unendlichen Producte der Formelntabelle alle nur die eine dort angegebne einfachste Normalform haben.

Schätzt man die Einfachheit der Formen desselben unendlichen Products nach der Anzahl der Factoren $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})^{r}$, welche in einander multi-

plicirt werden, so werden die einfachsten Normalformen gewöhnlich nicht die an sich einfachsten Formen sein, welche das unendliche Product überhaupt annehmen kann. Solcher an sich einfachster Formen wird es für dasselbe unendliche Product in der Regel mehrere geben. Um eine an sich einfachste Form, welche keine Normalform ist, in eine Normalform zu verwandeln, sind Zerfällungen nöthig, durch welche die Anzahl der Factoren $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})^r$ gewöhnlich sehr vermehrt wird. Es treten zwar auch anderseits wieder Vereinfachungen dadurch ein, dafs die durch die Zerfällungen ermittelten gleichen Factoren eine Potenz bilden; ferner wenn je zwei $1+q^{\alpha i+\beta}$, $1-q^{\alpha i+\beta}$ in den einen $1-q^{2\alpha i+2\beta}$ vereinigt und Producte $\Pi(1+q^{\alpha i+\alpha})\Pi(1-q^{2\alpha i+\alpha})$ fortgeworfen werden können; endlich, wenn man mittelst der oben aufgestellten Formel mehrere Factoren $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})^r$, in denen der Exponent r derselbe ist, in einen einzigen zusammenziehen kann. Aber die Anzahl der Factoren $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})^r$ pflegt hiedurch nicht so verringert zu werden, dafs dadurch ihre durch die erforderten Zerfällungen entstandene Vermehrung aufgewogen würde. Dessenungeachtet habe ich den unendlichen Producten der Formelntabelle die *Normalform* gegeben, weil sich aus derselben durch die blofse Substitution der Werthe von i die wirkliche Darstellung der unendlichen Producte in der Form

$$(1\pm q^{a})^{r}(1\pm q^{a'})^{r'}(1\pm q^{a''})^{r''}\ldots,$$

in welcher die Exponenten a, a', a'', etc. lauter verschiedene Werthe haben, ohne weitere Reductionen ergiebt. Ich habe es nicht für nöthig gehalten, die hiezu erforderlichen Transformationen näher auseinanderzusetzen, da sich dieselben in den einzelnen Fällen leicht ergeben. Es wird genügen, das Verfahren an einem Beispiel zu erläutern, wozu ich das unendliche Product H. (3) wählen will.

Die beiden Doppelsummen, welche in der Formel H. (3) einander gleich werden, wurden durch die Reihenentwicklung der vier elliptischen unendlichen Producte

$$\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})\},\qquad \Pi(1-q^{2i+2}),$$
$$\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\},\qquad \Pi\{(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}$$

gefunden, von denen das Product der beiden ersten gleich dem Product der beiden letzten ist. Um von diesen beiden einander gleichen Ausdrücken

$$\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})(1-q^{2i+2})\},$$
$$\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}$$

den ersten auf eine Normalform zu bringen, zerfällt man mittelst der Formel (16.) jeden seiner drei ersten unter dem Zeichen Π enthaltnen Factoren in *zwei*, den

vierten in *drei* Factoren. Hierdurch erhält man

$$\Pi\left\{\begin{array}{l}(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+4})(1+q^{6i+2})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+6})\\ \qquad\cdot(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+6})\end{array}\right\},$$

oder, wenn man die Gleichungen

$$(1+q^{6i+2})(1-q^{6i+2}) = 1-q^{12i+4}, \qquad (1+q^{6i+4})(1-q^{6i+4}) = (1-q^{12i+8})$$

substituirt,

$$\Pi\{(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+3})(1+q^{6i+5})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})(1-q^{6i+6})^2\},$$

welches die dem unendlichen Producte in der Formel H. (3) gegebne Normalform ist. Das andere unendliche Product entsteht durch Multiplication der beiden unendlichen Producte

$$\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{6i+3})^2\}, \qquad \Pi\{(1-q^{4i+4})(1-q^{6i+6})\},$$

welche ursprünglich keinen Factor mit einander gemeinschaftlich haben, und daher für sich besonders transformirt werden können. Es ist

$$\begin{aligned}\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{6i+3})^2\} &= \Pi\{(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+3})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+3})^2\}\\ &= \Pi\{(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+6})\},\end{aligned}$$

$$\Pi\{(1-q^{4i+4})(1-q^{6i+6})\} = \Pi\{(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2(1-q^{12i+6})\}.$$

In dieser transformirten Form erhalten die beiden unendlichen Producte den Factor $\Pi(1-q^{12i+6})$ gemeinschaftlich; ihr Product wird daher den Factor $\Pi(1-q^{12i+6})^2$ haben, welcher sich mit dem Factor $\Pi(1-q^{12i+12})^2$ in den einen $\Pi(1-q^{6i+6})^2$ vereinigen läfst. Nach dieser Reduction giebt die Multiplication der beiden vorstehenden unendlichen Producte wieder die obige Normalform. Diese Normalform hat unter dem Zeichen Π *sechs* Factoren von der Form $(1\pm q^{\alpha i+\beta})^\gamma$, während die beiden ursprünglich gegebnen unendlichen Producte, welche an sich einfachste sind, nur *vier* dergleichen enthielten. Andere einfachste Formen desselben unendlichen Products sind

$$\begin{aligned}&\Pi\{(1+q^{i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{3i+3})^2\}\\ =&\Pi\{(1+q^{i+1})(1-q^{2i+2})(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}\\ =&\Pi\{(1+q^{i+1})(1-q^{2i+2})(1-q^{3i+3})(1-q^{6i+3})\}\\ =&\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1-q^{3i+3})(1-q^{6i+3})\}.\end{aligned}$$

Verwandelt man q in $-q$, so wird die einfachste Normalform ein unendliches Product, das ebenfalls nur *vier* Factoren der angegebnen Art enthält,

$$\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})\}.$$

Ähnliche Vereinfachungen erhalten durch die Änderung von q in $-q$ mehrere in der Formelntabelle enthaltne unendliche Producte.

Wenn man in einer gegebnen Normalform

$$\Pi\{(1\pm q^{\alpha i+\beta})^r(1\pm q^{\alpha' i+\beta'})^{r'}(1\pm q^{\alpha'' i+\beta''})^{r''}\ldots\}$$

die Werthe von i substituirt, mufs man die einzelnen Factoren $(1\pm q^a)^r$ noch so ordnen, dafs die Exponenten a der Gröfse nach auf einander folgen. Um eine Normalform zu erhalten, in welcher diese Ordnung schon in dem allgemeinen Ausdruck selbst befolgt ist, so dafs es blofs der Substitution der Werthe von i bedarf, mufs man dem unendlichen Producte die Form

$$\Pi\{(1\pm q^{Ni+P})^{\varrho}(1\pm q^{Ni+P'})^{\varrho'}(1\pm q^{Ni+P''})^{\varrho''}\ldots\}$$

geben, in welcher der Coëfficient von i in allen unter dem Zeichen Π enthaltenen Factoren derselbe ist, und die Zahlen P, P', P'', etc. der Gröfse nach geordnet sind. Für den Coëfficienten von i oder N kann man die kleinste Zahl nehmen, welche durch alle Zahlen α, α', α'', etc. theilbar ist. Man erhält dann die gesuchte Form, indem man jeden der einzelnen Factoren der gegebnen Normalform,

$$\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta}),\quad \Pi(1\pm q^{\alpha' i+\beta'}),\quad \Pi(1\pm q^{\alpha'' i+\beta''}),\ \text{etc.}$$

mittelst der oben gegebnen Formel (16.) respective in $\frac{N}{\alpha}$, $\frac{N}{\alpha'}$, $\frac{N}{\alpha''}$, etc. ähnliche unendliche Producte zerfällt. Es wird daher die Anzahl aller gleichen oder verschiedenen Factoren $\Pi(1\pm q^{Ni+P})$ durch die Formel

$$\nu = N\left\{\frac{r}{\alpha}+\frac{r'}{\alpha'}+\frac{r''}{\alpha''}+\text{etc.}\right\}$$

ausgedrückt. Durch diesen Coëfficienten N des Index i und die Anzahl ν der einfachen unendlichen Producte $\Pi(1\pm q^{Ni+P})$, welche die gleichen oder verschiednen Factoren des unendlichen Products bilden, wird der allgemeine Character desselben am besten bestimmt. Für das obige Beispiel war die Normalform,

$$\Pi\{(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+4})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+8})\};$$

die *characteristische* Form wird

$$\Pi\left\{\begin{matrix}(1+q^{12i+1})(1-q^{12i+3})(1-q^{12i+4})(1+q^{12i+5})(1-q^{12i+6})^2\\ \ldots(1+q^{12i+7})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+9})(1+q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^2\end{matrix}\right\},$$

und man erhält aus ihr alle Factoren $(1\pm q^a)^r$ in der Ordnung, wie die Zahlen a aufeinander folgen, wenn man für i nach einander 0, 1, 2, etc. setzt.

Unter den verschiednen characteristischen Formen desselben unendlichen Productes ist diejenige die einfachste, in welcher der Coëfficient N den möglichst kleinsten Werth hat. Man erkennt dies leicht auf folgende Art. Es sei die gegebne characteristische Form

$$\Pi\{(1\pm q^{Ni+P'})(1\pm q^{Ni+Q'})(1\pm q^{Ni+R'})\,..\}^{s'}$$
$$.\Pi\{(1\pm q^{Ni+P''})(1\pm q^{Ni+Q''})(1\pm q^{Ni+R''})\,..\}^{s''}\ldots,$$

wo, wie man immer voraussetzen kann, in den Factoren jeder Horizontalreihe das Vorzeichen $\pm$ dasselbe sei, und in allen Horizontalreihen, in welchen dieses Vorzeichen dasselbe ist, die Exponenten s', s'', etc. von einander verschieden seien. Die Zahlen P', Q', R', etc., P'', Q'', etc. bedeuten hier von einander verschiedne ganze positive Zahlen, welche gröfser als 0 und gleich oder kleiner als N sind. Ist $\nu^{(k)}$ die Anzahl der Zahlen $P^{(k)}$, $Q^{(k)}$, $R^{(k)}$, etc., und bedeutet f einen sämmtlichen Zahlen N, ν', ν'', etc. gemeinschaftlichen Factor, so hat man von den Zahlen $P^{(k)}$, $Q^{(k)}$, $R^{(k)}$, etc. diejenigen auszuwählen, welche gleich oder kleiner als $\frac{N}{f}$ sind, und mufs dann aus ihnen die übrigen durch successive Addition von $\frac{N}{f}$, $\frac{2N}{f}$, .. $\frac{(f-1)N}{f}$ erhalten können. Trifft dies für jeden der Werthe des Index k zu, so kann man das unendliche Product in eine andere ähnliche Form bringen, in welcher der Coëfficient von i sich auf $\frac{N}{f}$ reducirt hat. Wenn dies aber für keinen der allen Zahlen N, ν, ν', ν'', etc. gemeinschaftlichen Factoren f gleichzeitig für alle Werthe von k gelingt, so ist die gegebne characteristische Form die einfachste. Solche *einfachste characteristische Form* giebt es immer nur eine.

Ich will im Folgenden die einfachsten characteristischen Formen der in der Formentabelle enthaltnen unendlichen Producte, nach dem Werthe des Coëfficienten N und der Anzahl ν der gleichen oder ungleichen einfachen unendlichen Producte $\Pi(1\pm q^{Ni+P})$ geordnet, zusammenstellen, und jedesmal ihren doppelten oder mehrfachen Ausdruck durch elliptische unendliche Producte der oben angegebnen Art hinzufügen. Ich habe gröfserer Einförmigkeit halber in allen Factoren der characteristischen Formen den Potenzen von q dasselbe Vorzeichen — zu geben gesucht, und deshalb in einigen unendlichen Producten q in $-q$ geändert. Nur bei zwei characteristischen Formen der nachstehenden Tabelle hat diese Einförmigkeit der Vorzeichen nicht erreicht werden können.

$$N = 1.$$

1. $\Pi(1-q^{i+1})^2$

$= \Pi(1-q^{2i+2})\,\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}$

$= \Pi(1-q^{\frac{1}{2}(i+1)})\,\Pi\{(1+q^{\frac{1}{2}(2i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(4i+4)})\}$

$= \Pi\{(1+q^{\frac{1}{2}(2i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(2i+2)})\}\,\Pi\{(1-q^{\frac{1}{2}(2i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(4i+4)})\}$ . . . . C. E.

$$N = 2.$$

2. $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2\}$

$= \Pi(1-q^{i+1})\,\Pi(1-q^{2i+2})$

$= \Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}\,\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}$

$= \Pi\{(1+q^{\frac{1}{2}(3i+1)})(1+q^{\frac{1}{2}(3i+2)})(1-q^{\frac{1}{2}(3i+3)})\}\,\Pi\{(1-q^{\frac{1}{2}(6i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(6i+5)})(1-q^{\frac{1}{2}(6i+6)})\}$,

$= \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}\,\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}$

$= \Pi\{(1+q^{\frac{1}{2}(2i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(4i+4)})\}\,\Pi\{(1-q^{\frac{1}{2}(2i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(4i+4)})\}$ . . . B. D. A. (5).

3. $\Pi\{(1-q^{2i+1})^3(1-q^{2i+2})^2\}$

$= \Pi(1-q^{i+1})\,\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}$

$= \Pi\{(1+q^{\frac{1}{2}(2i+1)})(1-q^{\frac{1}{2}(2i+2)})\}\,\Pi(1-q^{\frac{1}{2}(i+1)})$ . . . . F. (1).

4. $\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})^4\}$

$= \Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}\,\Pi(1-q^{2i+2})^3$

$= \Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}\,\Pi(1-q^{i+1})^3$ . . . . A. (8).

$$N = 4.$$

5. $\Pi\{(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}\,\Pi(1-q^{4i+4})$

$= \Pi\{(1+q^{4i+2})(1-q^{8i+8})\}\,\Pi(1-q^{i+1})$ . . . . I. (3).

6. $\Pi\{(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Pi(1-q^{i+1})\,\Pi(1-q^{4i+4})$

$= \Pi(1-q^{2i+2})\,\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}$ . . . . F. (2).

7. $\Pi\{(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})\}^2$

$= \Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}\,\Pi\{(1+q^{4i+2})(1-q^{8i+8})\}$ . . . . A. (1

8. $\Pi\{(1-q^{4i+1})^2(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+3})^2(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Pi(1-q^{i+1})\,\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}$

$= \Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}\,\Pi(1-q^{4i+4})$ . . . . I. (2).

9. $\Pi\{(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+2})^3(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})^2\}$
$=\Pi(1-q^{i+1})\,\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}$
$=\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})\}\,\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}$ . . . . I. (1).

$N = 8.$

10. $\Pi\{(1-q^{8i+1})(1-q^{8i+3})(1-q^{8i+5})(1-q^{8i+7})(1-q^{8i+8})^2\}$
$=\Pi\{(1-q^{8i+1})(1-q^{8i+7})(1-q^{8i+8})\}\,\Pi\{(1-q^{8i+3})(1-q^{8i+5})(1-q^{8i+8})\}$
$=\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}\,\Pi\{(1+q^{8i+4})(1-q^{16i+16})\}$ . . . . A. (6).

$N = 6.$

11. $\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2\}$
$=\Pi(1-q^{2i+2})\,\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}$
$=\Pi(1-q^{i+1})\,\Pi\{(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+12})\}$ . . . . A. (3).

12. $\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})^3(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2\}$
$=\Pi(1-q^{i+1})\,\Pi\{(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}$
$=\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})\}\,\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}$ . . . . H. (1).

13. $\Pi\{(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})^2(1-q^{6i+6})^2\}$
$=\Pi(1-q^{i+1})\,\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}$
$=\Pi\{(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+12})\}\,\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}$. . . . . H. (2).

$N = 12.$

14. $\Pi\{(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^2\}$
$=\Pi\{(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})\}\,\Pi\{(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+12})\}$
$=\Pi\{(1+q^{12i+6})(1-q^{24i+24})\}\,\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}$ . . . A. (7).

15. $\Pi\{(1-q^{12i+3})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+9})^2(1-q^{12i+12})^2\}$
$=\Pi(1-q^{4i+4})\,\Pi\{(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}$
$=\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})\}\,\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}$ . . . . G. (3).

16. $\Pi\{(1-q^{12i+2})(1-q^{12i+3})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+9})$
$\times(1-q^{12i+10})(1-q^{12i+12})^2\}$
$=\Pi(1-q^{2i+2})\,\Pi\{(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+12})\}$
$=\Pi\{(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}\,\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}$ . . . . H. (4).

17. $\Pi\{(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+8})$
$\times(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^2\}$
$=\Pi(1-q^{4i+4})\,\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}$
$=\Pi\{(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+12})\}\,\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}$ . . . . G. (4).

18. $\Pi\{(1-q^{12i+2})^2(1-q^{12i+3})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})^2(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+9})$
$\times(1-q^{12i+10})^2(1-q^{12i+12})^2\}$
$=\Pi(1-q^{i+1})\Pi\{(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}$
$=\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}\Pi\{(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+12})\}$ . . . . G. (2).

19. $\Pi\{(1+q^{12i+1})(1-q^{12i+3})(1-q^{12i+4})(1+q^{12i+5})(1-q^{12i+6})^2(1+q^{12i+7})$
$\times(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+9})(1+q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^2\}$
$=\Pi(1-q^{2i+2})\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})\}$
$=\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}\Pi\{(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}$ . . . . H. (3).

20. $\Pi\{(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+2})(1+q^{12i+3})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+6})^3(1-q^{12i+7})$
$\times(1-q^{12i+8})(1+q^{12i+9})(1-q^{12i+10})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^2\}$
$=\Pi(1-q^{i+1})\Pi\{(1+q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}$
$=\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}\Pi\{(1-q^{6i+1})(1+q^{6i+2})(1+q^{6i+3})(1+q^{6i+4})$
$\times(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}$ . . . . G. (1).

$N = 5.$

21. $\Pi\{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})^2\}$
$=\Pi(1-q^{i+1})\Pi(1-q^{5i+5})$
$=\Pi\{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})\}\Pi\{(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+5})\}$ . . K.

Aus der vorstehenden Tabelle sind die unendlichen Producte A. (2), (4) fortgelassen worden, da ihre doppelte Zerfällung in zwei elliptische unendliche Producte zufolge der oben gemachten Anmerkung in einer allgemeinen Formel enthalten ist.

Die Formeln (1.) und (2.) der Tabelle zeigen, dafs sich das unendliche Product $\Pi(1-q^{i+1})^2$ auf *vier*, das unendliche Product $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2\}$ auf *fünf* verschiedne Arten in zwei elliptische unendliche Producte der hier betrachteten Art zerfällen läfst, woraus folgt, dafs die Entwicklung des einen auf *vier*, des andern auf *fünf* verschiedne Arten durch Doppelsummen von der Form $\Sigma\pm q^{\alpha i^2+\beta k^2+\gamma i+\delta k}$ dargestellt werden kann. Setzt man nämlich in der ersten Formel q^2, in der zweiten q^6 für q, so erhält man mittelst der Formeln der Einleitung,

$$(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2(1-q^8)^2\dots$$
$$=\{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-\dots\}^2$$
$$=\{1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-\dots\}\{1-2q^2+2q^4-2q^{18}+2q^{32}-\dots\}$$
$$=\{1-q-q^2+q^5+q^7-\dots\}\{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\dots\}$$
$$=\{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+\dots\}\{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\dots\},$$

$$(1-q^{6})(1-q^{12})^2(1-q^{18})(1-q^{24})^2(1-q^{30})\,..$$
$$=\{1-q^6-q^{12}+q^{30}+q^{42}-..\}\{1-q^{12}-q^{24}+q^{60}+q^{84}-..\}$$
$$=\{1-2q^6+2q^{24}-2q^{54}+..\}\{1+q^6+q^{18}+q^{36}+q^{60}+..\}$$
$$=\{1+q^2+q^4+q^{10}+q^{14}+..\}\{1-q^2-q^{10}+q^{16}+q^{32}-..\}$$
$$=\{1-q^6-q^{18}+q^{36}+q^{60}-..\}\{1-2q^{12}+2q^{48}-2q^{108}+..\}$$
$$=\{1+q^{18}+q^{30}+q^{84}+..\}^2-\{q^3+q^9+q^{45}+q^{63}+..\}^2,$$

oder die folgenden beiden Formeln

$$\Pi(1-q^{2i+2})^2=\Sigma(-1)^{i+k}q^{3i^2+3k^2+i+k}=\Sigma(-1)^{i+k}q^{6i^2+2k^2+2i}$$
$$=\Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}i^2+2k^2+\frac{1}{2}i+k}=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k}q^{\frac{3}{2}i^2+2k^2+\frac{1}{2}i+k},$$

$$\Pi\{(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+12})^2\}=\Sigma(-1)^{i+k}q^{9i^2+18k^2+3i+6k}$$
$$=\Sigma(-1)^i q^{6i^2+12k^2+6k}=\Sigma(-1)^k q^{3i^2+6k^2+i+4k}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{12i^2+12k^2+6i}=\Sigma(-1)^k q^{6i^2+6k^2+3i+3k}.$$

In der ersten Formel unterscheiden sich die beiden letzten Doppelsummen nur durch die unter dem Summenzeichen befindlichen Vorzeichen $(-1)^i$ und $(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k}$. Es müssen sich daher alle Glieder gegenseitig aufheben, für welche diese beiden Vorzeichen von einander verschiedene Werthe annehmen, welches geschieht, wenn der Exponent von q ungerade ist. Hieraus folgt, dafs, wenn man

$$\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}=A-B,\qquad \Sigma q^{2i^2+i}=C+D$$

setzt, wo A und C gerade, B und D ungerade Functionen von q bedeuten, die beiden Gleichungen Statt finden,

$$\Pi(1-q^{2i+2})^2=AC-BD,\qquad AD=BC.$$

Die Gröfsen A, B, C, D bedeuten hier die unendlichen Reihen,

$$A=1-q^2-q^{12}+q^{22}+q^{26}-q^{40}-q^{70}+q^{92}+q^{100}-..,$$
$$B=q-q^5-q^7+q^{15}+q^{35}-q^{51}-q^{57}+q^{77}+q^{117}-..,$$
$$C=1+q^6+q^{10}+q^{28}+q^{36}+q^{66}+q^{78}+..,$$
$$D=q+q^3+q^{15}+q^{21}+q^{45}+q^{55}+q^{91}+..,$$

deren allgemeines Gesetz durch die folgenden Ausdrücke gegeben wird,

$$A=\Sigma q^{3i(12i+1)}-\Sigma q^{(6i+2)(4i+1)},\qquad B=\Sigma q^{(4i-1)(6i-1)}-\Sigma q^{(2i-1)(12i-5)},$$
$$C=\Sigma q^{2i(4i+1)},\qquad D=\Sigma q^{(2i-1)(4i-1)}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichungen, $AD-BC=0$ und $AC-BD=\Pi(1-q^{2i+2})^2$, so erhält man nach einigen Reductionen die Gleichung

$$17.\qquad 0=\Sigma q^{i(6i+1)+k(2k+1)}-\Sigma q^{(2i+1)(3i+2)+k(2k+1)},$$

in deren beiden Doppelsummen für i und k nur solche positive oder negative ganze Zahlen zu setzen sind, für welche $i+k$ ungerade ist; ferner die Gleichung

$$18.\qquad \Pi(1-q^{2i+2})^2 = \Sigma q^{i(6i+1)+k(2k+1)} - \Sigma q^{(2i+1)(3i+2)+k(2k+1)},$$

wo man in den beiden Doppelsummen für i und k nur solche positive oder negative ganze Zahlen zu setzen hat, für welche $i+k$ gerade ist. Diese letztre Formel gilt aber wegen (17.) auch, wenn man für i und k alle *beliebigen* positiven oder negativen ganzen Zahlen annimmt. Setzt man darin $-q$ für q, so erhält man

$$19.\qquad \Pi(1-q^{2i+2})^2 = \Sigma(-1)^{i+k} q^{i(6i+1)+k(2k+1)} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{(2i+1)(3i+2)+k(2k+1)}.$$

Die Formeln (18.) und (19.) geben eine *fünfte* und *sechste* Darstellung der Entwicklung von $\Pi(1-q^{2i+2})^2$ durch Doppelsummen.

Ähnliche Betrachtungen kann man in Bezug auf die *dritte* Darstellung der Entwicklung des unendlichen Products

$$\Pi\{(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+12})^2\} = \Sigma(-1)^k q^{3i^2+6k^2+i+4k}$$

anstellen, in welcher nur solche Potenzen von q vorkommen können, deren Exponent durch 3 theilbar ist, so dafs es hinreicht, die Doppelsumme nur auf solche Werthe von i und k auszudehnen, *für welche $i+k$ durch 3 theilbar ist*, und dieselbe Doppelsumme in den beiden Fällen *verschwinden mufs*, wenn man sie nur über solche Werthe von i und k erstreckt, *für welche $i+k$ durch 3 dividirt den Rest 1 oder den Rest 2 läfst.*

Alle im Vorhergehenden gefundnen Resultate ergaben sich aus der einen Fundamentalformel,

$$(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)..(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)..(1-qz^{-1})(1-q^3z^{-1})(1-q^5z^{-1})..$$
$$= 1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+..$$

Sie wurden als unmittelbare Folge von Gleichungen gefunden, welche aus dieser Formel hervorgehen, wenn man in ihr für $\pm q$ und $\pm z$ ganze positive Potenzen von q setzt. Selbst die zum Beweise der Formel A. (8) erforderliche Gleichung

$$\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)..\}^3 = 1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-..$$

folgt aus derselben Fundamentalformel, wenn man $z=(1+\varepsilon)q$ annimmt, und, nachdem man mit ε dividirt hat, $\varepsilon=0$ macht, wonach man nur noch q für q^2 zu setzen hat. Aber es lassen sich aus derselben Fundamentalformel noch einige andere Resultate, durch welche das System der im Vorigen gefundnen Gleichungen zwischen Doppelsummen vervollständigt werden kann, ableiten, wenn man für q und z Potenzen von q setzt, welche mit gewissen imaginären Wurzeln der Einheit multiplicirt sind. (Die Fortsetzung folgt.)

6.

Über die Irrationalität des Werthes gewisser Reihen.

(Von Herrn Dr. *Stern* in Göttingen.)

Wenn z eine ganze positive Zahl bedeutet, die Einheit ausgenommen, und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ u. s. w. eine ins Unendliche fortlaufende Reihe ganzer positiver Zahlen ist, so beschaffen, dafs die Differenzen $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_2$ u. s. w. ebenfalls positiv sind und zugleich jede folgende Differenz gröfser als die vorhergehende ist, mithin, wenn man m beliebig grofs nimmt, auch $\alpha_{m+1} - \alpha_m$ einen beliebig grofsen Werth erhält, so mufs die Reihe

$$1.\quad \frac{1}{z^{\alpha_1}} + \frac{1}{z^{\alpha_2}} + \frac{1}{z^{\alpha_3}} \ldots .$$

einen irrationalen Werth haben.

Wäre nemlich der Werth dieser Reihe $= \frac{g}{h}$, wo g und h ganze Zahlen bedeuten, so hätte man $g = h\left(\frac{1}{z^{\alpha_1}} + \frac{1}{z^{\alpha_2}} + \frac{1}{z^{\alpha_3}} \ldots .\right)$. Multiplicirte man diese Gleichung mit z^{α_m}, so fände man $gz^{\alpha_m} = G + h\left(\frac{1}{z^{\alpha_{m+1}-\alpha_m}} + \frac{1}{z^{\alpha_{m+2}-\alpha_m}} + \ldots\right)$, wo G die ganze Zahl $h(z^{\alpha_m-\alpha_1} + z^{\alpha_m-\alpha_2} \ldots . + 1)$ bedeutet. Es müfste also auch $h\left(\frac{1}{z^{\alpha_{m+1}-\alpha_m}} + \frac{1}{z^{\alpha_{m+2}-\alpha_m}} + \ldots\right)$ eine ganze Zahl sein, d. h. die Reihe

$$2.\quad \frac{1}{z^{\alpha_{m+1}-\alpha_m}} + \frac{1}{z^{\alpha_{m+2}-\alpha_m}} + \ldots .$$

dürfte nicht kleiner als $\frac{1}{h}$ sein. Nun ist aber diese Reihe, wenn man $\alpha_{m+1} - \alpha_m = k$ setzt, jedenfalls nicht gröfser als die Reihe $\frac{1}{z^k} + \frac{1}{z^{k+1}} + \frac{1}{z^{k+2}} \ldots$, deren Werth $\frac{1}{z^k\left(1-\frac{1}{z}\right)}$ unter jede angebbare Gröfse sinkt, wenn man m, und mithin auch k, grofs genug nimmt. Die Reihe (2.) mufs also bei wachsendem m kleiner als $\frac{1}{h}$ werden; wodurch unsere Behauptung bewiesen ist.

Dasselbe gilt auch noch, wenn man, mit Beibehaltung der früheren Bedeutung der Buchstaben $z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, die Reihe (1.) mit einer anderen vertauscht, in welcher die positiven und negativen Zeichen in *beliebiger Folge* mit einander abwechseln. Hätte eine solche Reihe

$$3.\quad \frac{1}{z^{\alpha_1}} \pm \frac{1}{z^{\alpha_2}} \pm \frac{1}{z^{\alpha_3}} \ldots .$$

den rationalen Werth $\frac{g}{h}$, so würde man wieder daraus folgern, dafs die Reihe $\frac{1}{z^{\alpha_{m+1}-\alpha_m}} \pm \frac{1}{z^{\alpha_{m+2}-\alpha_m}} \pm \ldots$ nicht kleiner als $\frac{1}{h}$ sein kann, während sie mit wachsendem m unter jeden angebbaren Werth sinkt.

Für den speciellen Fall, wenn $\alpha_m = m^2$ ist und die Zeichen dieselben bleiben oder $+$ und $-$ beständig auf einander folgen, hat schon Herr Dr. *Eisenstein* die Irrationalität des Werthes der Reihe (3.), durch Verwandelung derselben in einen Kettenbruch in diesem Journale (Bd. 27. S. 194) nachgewiesen.

Noch allgemeiner ist folgender Satz. Bedeutet p eine ganze positive Zahl, welche kleiner als z ist, so hat die Reihe 4. $\frac{1}{z^{\alpha_1}}+\frac{p}{z^{\alpha_2}}+\frac{p^2}{z^{\alpha_3}}+\ldots$ keinen rationalen Werth. Denn wäre derselbe $=\frac{g}{h}$, so dürfte

$$5.\quad \frac{p^m}{z^{\alpha_{m+1}-\alpha_m}}+\frac{p^{m+1}}{z^{\alpha_{m+2}-\alpha_m}}+\ldots$$

nicht kleiner als $\frac{1}{h}$ werden. Da nun, nach der Voraussetzung, die Differenzen $\alpha_2-\alpha_1$, $\alpha_3-\alpha_2$, ... eine Reihe wachsender ganzer Zahlen sein sollen, so ist jedenfalls $\alpha_{m+1}-\alpha_m$ nicht kleiner als m und ferner $\alpha_{m+2}-\alpha_m > m+1$, $\alpha_{m+3}-\alpha_m > m+2$, u. s. w., mithin ist die Reihe (5.) keinesfalls gröfser als die Reihe $\frac{p^m}{z^m}+\frac{p^{m+1}}{z^{m+1}}+\frac{p^{m+2}}{z^{m+2}}+\ldots$, deren Werth $\frac{p^m}{z^m}\left(\frac{1}{1-\frac{p}{z}}\right)$ bei wachsendem m unbegrenzt abnimmt. Also mufs die Reihe (4.) irrational sein.

Es ist klar, dafs Dasselbe auch dann noch Statt findet, wenn man in der Reihe (4.) die positiven und negativen Zeichen in beliebiger Folge mit einander abwechseln läfst, und dafs auch, wenn r eine ganze Zahl bedeutet und die früheren Bedingungen bleiben, die Reihe 6. $\frac{1}{z^{\alpha_1}}\pm\frac{p}{rz^{\alpha_2}}\pm\frac{p^2}{r^2z^{\alpha_3}}\pm\frac{p^3}{r^3z^{\alpha_4}}\ldots$ keinen rationalen Werth haben kann.

Bezeichnet $q_1, q_2, q_3, \ldots$ eine unendliche Reihe ganzer Zahlen, von welchen jede folgende gröfser als die vorhergehende ist, so kann auch die Reihe

$$7.\quad \frac{1}{q_1}\pm\frac{1}{q_1\cdot q_2}\pm\frac{1}{q_1\cdot q_2\cdot q_3}\ldots$$

keinen rationalen Werth $\frac{g}{h}$ haben. Denn aus $g=h\left[\frac{1}{q_1}\pm\frac{1}{q_1\cdot q_2}\ldots\right]$ würde, wenn man diese Gleichung mit $q_1.q_2\ldots.q_m$ multiplicirt, folgen, dafs $\frac{1}{q_{m+1}}\pm\frac{1}{q_{m+1}\cdot q_{m+2}}\pm\ldots$ nicht kleiner als $\frac{1}{h}$ sein darf, während der Werth $\frac{1}{q_{m+1}-1}$ der gröfseren Reihe $\frac{1}{q_{m+1}}+\frac{1}{(q_{m+1})^2}+\frac{1}{(q_{m+1})^3}+\ldots$ mit wachsendem m beliebig abnimmt.

Behalten alle Buchstaben dieselbe Bedeutung wie in (6.) und (7.), so kann auch die Reihe $\frac{1}{z^{\alpha_1}}\pm\frac{p}{q_1.z^{\alpha_2}}\pm\frac{p^2}{q_1.q_2.r^2.z^{\alpha_3}}\pm\frac{p^3}{q_1.q_2.q_3.r^3.z^{\alpha_4}}\ldots$ keinen rationalen Werth haben.

Specialisirt man die Werthe von α_1, α_2 u. s. w., so lassen sich noch viele einzelne hierher gehörende Theoreme finden. So z. B. ergiebt sich aus den vorstehenden Betrachtungen, dafs der Werth der Reihe $\frac{p}{z}+\frac{p^2}{z^4}+\frac{p^3}{z^9}+\frac{p^4}{z^{16}}\ldots$ irrational ist, sobald die ganze Zahl p kleiner als z^2 ist.

Crelle, Journal d. Math. Bd. 37. Heft 1.

Fac-simile einer Handschrift von Frisi.

Ill.mo Sig.re Sig.r Pron Col.mo

Ho ricevuto jeri l'altro la stim.ma sua dei 15 Luglio, e i due libri che
vi erano uniti. Ho cominciato subito a leggerli, e mi sono interess-
ato di più trovandovi trattati alcuni argomenti, di quali io pure
ho avuto occasione di trattare, come dei poligoni, e delle equazioni del
terzo grado, e intorno ad alcuni dei quali aggiungo qualche cosa nel se-
condo tomo che ho sotto il torchio, come sul getto dei projetti. Ho ve-
duto con singolar compiacenza quanto bene ella maneggi la Geome-
tria, e l'Analysi, ed ho già notate diverse cose che meritano una lo-
de ben singolare. La ringrazio tanto più del dono, e le offro in con-
tracambio tutta la mia stima, e la mia riconoscenza. Vedendo il P. Gr.
ati la prego di farli i miei complimenti, e di rallegrarsi anche della
brevissima ed ultima mia risposta al Sig.r Nicolai. La prego di comandarmi,
lasciando se le piace il M.to, e resto con tutto il maggiore rispetto

Di V. S. Ill.ma
Milano 13 Ag. 1783

Dev.mo Obbl.mo e vero Ser.re
Paolo Frisi.

7.

Zur Theorie der quadratischen Zerfällung der Primzahlen $8n+3$, $7n+2$ und $7n+4$.

(Von Herrn Dr. G. *Eisenstein*, Docent a. d. Universität zu Berlin.)

Die erste Veranlassung zur Ausarbeitung und Publication der folgenden Abhandlung wurde mir durch eine Bemerkung meines verehrten Freundes Dr. *Stern* in Göttingen, welche Band 32 Seite 90 dieses Journals zu lesen ist. *Stern* findet dort durch Induction, dafs für die Zerfällung jeder Primzahl $8n+3$ in die quadratische Form c^2+2d der Werth von c durch eine sehr einfache Congruenz nach der zu zerfällenden Primzahl als Modul bestimmt werden kann. Obwohl dieses noch unbewiesene Theorem zu einer schon bekannten Gattung gehört, so macht es doch den Anfang zu einer *neuen Reihe* in dieser Gattung von Sätzen der höhern Arithmetik.

Das erste Beispiel einer directen Bestimmung der Elemente einer quadratischen Zerfällung gegebener Primzahlen vermittelst Congruenzen haben wir *Gaufs* *) zu verdanken, der wohl überhaupt den Keim zu den meisten der neuen und fruchtbaren zahlentheoretischen Betrachtungen dieses Jahrhunderts gelegt hat; und die geringe Anzahl Derer, welche überhaupt den Werth von dergleichen Speculationen zu schätzen wissen, wurde mit Überraschung durch diese merkwürdige Entdeckung erfüllt. Das Studium der *Gaufs*ischen Abhandlungen regte mich selbst zu eigenen Untersuchungen über diesen und verwandte Gegenstände an, und die ersten Proben dieser meiner Untersuchungen erlaubte ich mir in meinen Beiträgen zur Kreistheilung und in meinen früheren Beweisen des quadratischen, cubischen und biquadratischen Reciprocitätsgesetzes dem mathematischen Publicum vorzulegen. Später erfuhr ich, dafs die meisten Resultate meiner Forschungen schon vor langer Zeit von *Jacobi* und einigen französischen Mathematikern, namentlich *Cauchy*, gefunden worden waren. Um nun auf die Zerfällung der Primzahlen p oder ihrer Potenzen in quadratische und höhere Formen näher einzugehen, so haben diese, insofern sie aus den Principien der Kreistheilung geschöpft werden, das Eigenthüm-

*) In der ersten Abtheilung seiner „Theoria residuorum biquadraticorum" am Schlufs.

liche, dafs die zu der Zerfällung gehörige Determinante (dies Wort in einer allgemeineren Bedeutung aufgefafst) immer ein Theiler von $p-1$ sein mufs. So ist z. B. bei der *Gaufs*ischen Zerfällung c^2+d^2 die Primzahl p von der Form $4n+1$, bei den Zerfällungen in die Formen c^2+2d^2, c^2+7d^2, insofern sie durch die Kreistheilung gefunden werden, mufs $p-1$ durch 8 resp. 7 theilbar, also p von der Form $8n+1$ resp. $7n+1$ sein; so fand ich unter andern durch meine eigenen Untersuchungen, dafs, allgemein für jede Primzahl λ von der Form $4n+3$, die Zerfällung des Vierfachen einer gewissen Potenz jeder Primzahl $p=\lambda n+1$ in die Form $c^2+\lambda d^2$ durch die Congruenz $c\equiv(\beta n)!(\beta' n)!(\beta'' n)!\ldots (\text{mod.}\, p)$ bestimmt werden kann, wo β, β', β'', ... die quadratischen Nichtreste (mod. λ) $<\lambda$ sind, u. s. w.: Sätze, auf deren Neuheit ich, beiläufig gesagt, keinen Anspruch mache, da sie vermuthlich längst von Anderen entdeckt worden sind. Eine hierher gehörige Bemerkung sehr allgemeiner Art findet sich bei *Jacobi*, „Über die Kreistheilung" im 30sten Bande dieses Journals Seite 171. — Nun sind aber nicht blofs die Primzahlen, welche die Form $\lambda n+1$ haben, durch quadratische Formen mit der Determinante $-\lambda$ darstellbar, sondern überhaupt alle Primzahlen, welche zu λ quadratische Reste, d. h. welche in den Linearformen der quadratischen Reste (mod. λ) enthalten sind, also die Hälfte aller Primzahlen; so sind z. B. nicht blofs die Primzahlen $7n+1$, sondern auch die Primzahlen $7n+2$ und $7n+4$ durch die quadratische Grundform c^2+7d^2, die einzige für die Determinante -7, darstellbar. Die quadratischen Zerfällungen derjenigen Primzahlen, welche nicht von der Form $\lambda n+1$ sind, können aber, wie es scheint, auf keine Weise aus den (bisher bekannten) Principien der Kreistheilung *allein* geschöpft werden; eben so wenig kann man aus der Kreistheilung die Zerfällung einer Primzahl $8n+3$ in die Form c^2+2d^2 erhalten; ähnliches gilt in Bezug auf höhere Formen, welche die Kreistheilung liefert. Durch diese Bemerkungen motivirt sich meine obige Behauptung, dafs durch den von *Stern* auf dem Wege der Induction gefundenen Satz der Anfang zu einer ganz neuen Reihe von Sätzen dieser Art gegeben ist. Es war mir nun gelungen, allgemeinere Principien zu entdecken, welche zwar einige Ähnlichkeit mit denen der Kreistheilung haben, durch welche aber, wie es mir schien, auch der Zugang zu Theoremen der neuen Reihe, zu welcher z. B. das jetzt von *Stern* aufgestellte gehört, gebahnt werden könnte. Durch die Bemerkung *Jacobi's*, über welchen ich mich am Schlusse meiner letzten Abhandlung über Elliptische Functionen bei Gelegenheit neuer Beweise der Reciprocitätsgesetze ausgesprochen habe, wurde ich indessen dergestalt von den Untersuchungen

dieser Art abgeschreckt, dafs ich dieselben bis auf die neueste Zeit habe liegen lassen; hierzu kam, dafs ich nicht wufste, bis zu welchem Puncte Andere ihre Forschungen fortgesetzt hatten, denn in den mir zu Gebote stehenden Büchern und Zeitschriften konnte ich kein näheres Detail darüber finden und, ohnedies von sehr leidender Gesundheit, wollte ich nicht unnützerweise meine Zeit und meine geistigen Kräfte auf Untersuchungen verschwenden, von denen es sich nachher ausweisen konnte, dafs dieselben das Eigenthum Anderer waren. Auf's Neue indessen angeregt durch die Bemerkung meines Freundes *Stern*, und von mehreren Seiten versichert, dafs diejenige neue Gattung von Sätzen und Betrachtungen, auf welche jene Bemerkung hindeutet, noch von Niemanden untersucht sei, wurde ich endlich veranlafst, meine früheren Meditationen wieder aufzunehmen, und auf diese Weise entstand eine neue Reihe von Untersuchungen, welche ich mir jetzt die Ehre nehme, den Freunden der Zahlentheorie vorzulegen. Da jedoch durch Vorlesungen und anderweitige Beschäftigungen meine Zeit gegenwärtig sehr in Anspruch genommen ist, so sehe ich mich vor der Hand darauf beschränkt, in der nachfolgenden Abhandlung nur den Beweis des *Stern*schen Satzes, so wie die Untersuchungen über die Darstellung der Primzahlen $7n+2$ und $7n+4$ durch die Form c^2+7d^2 nebst einigen hiermit genau zusammenhangenden Resultaten mitzutheilen, indem ich die ferneren Ergebnisse meiner Forschungen einer späteren Gelegenheit vorbehalte. Diejenigen, welche in Betrachtungen dieser Art bewandert sind, werden sogleich die ausgedehnte Anwendbarkeit der zu Grunde liegenden Principien erkennen.

Auf diejenigen Principien, welche die Theorie der Elliptischen Functionen zur Behandlung dieser Fragen an die Hand giebt, werde ich bei einer künftigen Gelegenheit aufmerksam machen.

Berlin im Januar 1848.

Über Primzahlen $8n+3$.

§. 1.

Es sei q eine reelle positive Primzahl von der Form $8n+3$; dieselbe werde als Modul in der Theorie der aus vierten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen betrachtet. Da q nicht $\equiv 1 \pmod{4}$ ist, so kann x^2+y^2, wo x und y reelle ganze Zahlen sind, nur dann durch q theilbar sein, wenn x und y beide Vielfache von q sind. Läfst man in $x+yi$

x und y beide alle Zahlen der Reihe 0, 1, 2, 3, ... $q-1$ durchlaufen, so werden die hieraus hervorgehenden q^2 complexen Zahlen sämmtlich unter einander incongruent sein; jede andere ganze complexe Zahl wird einer und nur einer von ihnen congruent sein, und dieselben werden ein vollständiges Restensystem (mod. q) constituiren. Offenbar ist $(x+yi)^q \equiv x^q + y^q i^q \equiv x - yi$ (mod. q), und $(x+yi)^{q^2} \equiv (x-yi)^q \equiv x+yi$, mithin, wenn $x+yi$ nicht durch q theilbar ist, $(x+yi)^{q^2-1} \equiv 1$. Da q^2-1 durch 8 theilbar ist, so setze man $q^2-1 = 8e$, nämlich $e = \frac{1}{8}(q^2-1) = \frac{1}{2}(q-1)\cdot\frac{1}{4}(q+1) = (4n+1)(2n+1)$, wenn $q = 8n+3$; e ist ungerade, und zwar $e \equiv 1$, oder $\equiv 3$ (mod. 4), je nachdem n gerade oder ungerade ist. Man hat also $(x+yi)^{8e} \equiv 1$, wenn $x+yi$ nicht durch q theilbar ist. Hiernach ist $(x+yi)^{2e}$ entweder $\equiv 1$, oder $\equiv i$, oder $\equiv -1$, oder $\equiv -i$ (mod. q), und die q^2-1 Zahlen eines Restensystems (mod. q), mit Ausschlufs der Null oder des durch q theilbaren Gliedes, können demgemäfs zunächst in vier Classen gebracht werden; jede dieser vier Classen theilt sich wiederum in zwei Hälften. Es sei f eine der beiden Wurzeln der Congruenz $f^2 \equiv i$ (mod. q), welche hier stets lösbar ist, weil $(1-i)^2 = -2i$; und da -2 zu q quadratischer Rest ist, so findet man, wenn $-2 \equiv v^2$ (mod. q) gesetzt wird, f aus der Congruenz ersten Grades $-vf \equiv 1-i$ (mod. q) oder $2f \equiv v(1-i)$ (mod. q), z. B. $f = -(1-i)v.\frac{1}{2}(q-1)$. Da nun $(x+yi)^{2e}$ einer der vier Potenzen f^2, f^4, f^6 oder f^8 congruent ist, so mufs die $e$te Potenz jeder nicht durch q theilbaren Zahl einer der acht Potenzen f, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7, f^8 congruent sein. Aus dem Princip dieser Classification ergiebt sich unmittelbar, dafs jede der acht Classen gleichviele, nämlich e incongruente Zahlen enthält, dafs alle Zahlen einer Classe aus denen irgend einer andern durch Multiplication mit einer gewissen Potenz von f hervorgehen, dafs, wenn die $e$te Potenz irgend einer complexen Zahl $\equiv f^\mu$ ist, die $e$te Potenz ihrer conjugirten Zahl $\equiv f^{q\mu}$ sein wird, u. s. w. (vergl. *Gauss* Theor. res. biq. II.).

Es sei ω eine primitive 8te Wurzel der Einheit, so dafs $\omega^2 = i$, $\omega = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, und es werde für irgend eine nicht durch q theilbare complexe ganze Zahl k durch das Symbol $[k]$ die μte Potenz von ω bezeichnet, wenn $k^e \equiv f^\mu$ (mod. q) ist, so dafs also $[k] = 1$, wenn $k^{\frac{1}{8}(q^2-1)} \equiv 1$, $[k] = \omega$, wenn $k^{\frac{1}{8}(q^2-1)} \equiv f$, $[k] = i$, wenn $k^{\frac{1}{8}(q^2-1)} \equiv i \equiv f^2$, u. s. w. Für diese Symbole gelten die folgenden Relationen, welche unmittelbar aus der Definition folgen: $[k][l] = [kl]$, $[k]^r = [k^r]$, $[k] = [k']$, wenn $k \equiv k'$ (mod. q), wie für *Legendre*sche Symbole; $[k]^8 = 1$, $[k]^\nu = [k]^{\nu'}$, wenn $\nu \equiv \nu'$ (mod. 8);

ferner $[x-yi]=[x+yi]^q=[x+yi]^3$, $[x-yi]^q=[x+yi]=[x-yi]^3$ u. dergl. m.

Wenn $[k]=\omega^\mu$ und μ eine gerade Zahl ist, so hat man $\omega^\mu=i^{\frac{1}{2}\mu}$, folglich $[k]\equiv f^\mu \pmod{q}\equiv k^{\frac{1}{4}(q^2-1)}$; diese Congruenz hat aber keinen Sinn, wenigstens nicht in der Theorie der aus *vierten* Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen, so oft μ ungerade ist, weil dann $[k]$ keiner Potenz von i gleich ist, wie in dem Falle eines geraden Werthes von μ; für einen ungeraden Werth von μ hat man aber $[k]^5=\omega^{5\mu}=(-\omega)^\mu=(-1)^\mu\omega^\mu=-[k]$, also $[k]^5+[k]=0$, ferner $f^{5\mu}=(f^5)^\mu\equiv(-f)^\mu$, weil $f^2\equiv i$, $f^4\equiv-1$, folglich $f^{5\mu}\equiv(-1)^\mu f^\mu\equiv-f^\mu$, $f^{5\mu}+f^\mu\equiv0$, mithin $[k]^5+[k]\equiv f^{5\mu}+f^\mu\equiv k^{5e}+k^e \pmod{q}$; diese letztere Congruenz gilt für einen geraden und ungeraden Werth von μ; denn für ein gerades μ ist schon einzeln $[k]^5\equiv k^{5e}$, $[k]\equiv k^e$.

Eine *reelle* Zahl fällt mit ihrer conjugirten zusammen; es ist daher, wenn x reell ist, $[x]^3=[x]$, also $[x]^2=1$, $[x]=\pm1$ und zwar $[x]=\left(\frac{x}{q}\right)$; denn hier ist $[x]\equiv x^e\equiv x^{\frac{1}{2}(q-1).\frac{1}{4}(q+1)}\equiv\left(\frac{x}{q}\right)^{\frac{1}{4}(q+1)}=\left(\frac{x}{q}\right)^{2n+1}=\left(\frac{x}{q}\right)$. Endlich ist noch $[i]=[\omega]^2\equiv i^e=i^{(4n+1)(2n+1)}=i^{2n+1}=(-1)^n i$, $[-1]=-1$, $[ix]=(-1)^n i\cdot\left(\frac{x}{q}\right)$, $[-x]=-\left(\frac{x}{q}\right)$.

Bemerkenswerth für das Folgende ist noch, dafs man, wenn in dem Symbole $[k]$ die Zahl k einen laufenden Werth vorstellt, für welchen alle q^2-1 Glieder eines vollständigen Restensystems (mod. q) mit Ausschlufs der Null gesetzt werden sollen, statt der Glieder irgend eines Restensystems die irgend eines andern substituiren kann, weil diese jenen, einzeln verglichen, congruent sind und $[k]=[k']$ ist, wenn $k\equiv k'$ (mod. q). Der Kürze wegen soll der Inbegriff derjenigen q^2-1 Zahlen, welche verbleiben, wenn man aus einem vollständigen Restensysteme (mod. q) das durch den Modul theilbare Glied ausschliefst, ein *reducirtes* Restensystem genannt werden.

§. 2.

Den Ausgangspunct unserer Untersuchung macht die Betrachtung der Summen von der Form $\Sigma[k]^\nu[k']^{-\nu}$, mit der Bedingungscongruenz $k+k'\equiv1+ai$ (mod. q). Die Summation bezieht sich auf k und k'. Es durchlaufen k und k', unabhängig von einander, alle Glieder eines reducirten Restensystems, mit der Beschränkung, dafs der Bedingung $k+k'\equiv1+ai$ (mod. q) genügt

werden mufs, in welcher α eine gegebene *reelle* ganze Zahl bedeutet, die man offenbar um ein beliebiges reelles Vierfache von q vermehren kann, ohne den Werth der Summe zu ändern; ν bedeutet eine der vier ungeraden Zahlen 1, 3, 5 oder 7. Der Werth der in Rede stehenden Summe für ein gegebenes α werde durch S_α bezeichnet.

Setzt man, für jeden stehenden Werth von k', $k\equiv k'l$, so durchläuft l, so wie k, ein reducirtes Restensystem; das allgemeine Glied der Summe wird durch diese Substitution $[k'l]^\nu[k']^{-\nu}=[k']^\nu[l]^\nu[k']^{-\nu}=[l]^\nu$; die Bedingungscongruenz wird $k'(1+l)\equiv 1+\alpha i$; $k'(1+l)$, also auch $1+l$, kann hiernach nie $\equiv 0$ werden, mithin ist der Werth $l\equiv -1$ auszuschliefsen; für jeden andern Werth von l kann k' immer auf eine, und nur auf eine Art, der Bedingungscongruenz $k'(1+l)\equiv 1+\alpha i$ genügend bestimmt werden. Jedem Werthe von l in der Summe $\Sigma[l]$ entspricht daher ein, und nur ein Werth von k', mit alleiniger Ausnahme von $l\equiv -1$; der Werth von S_α wird folglich einfach dadurch erhalten, dafs man in $\Sigma[l]$ dem l alle seine Werthe mit Ausschlufs von -1 ertheilt und die Bedingungscongruenz gänzlich wegläfst; man hat folglich $S_\alpha=\Sigma[l]-[-1]$. Nun ist offenbar $\Sigma[l]=0$, wenn l alle Glieder eines reducirten Restensystems durchläuft; ferner $[-1]=-1$: also finden wir $S_\alpha=+1$ für jeden gegebenen Werth von α.

Man setze jetzt statt α selbst alle Zahlen 0, 1, 2, 3, ... $q-1$ und betrachte die Summe

$$S_0+S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{q-1},$$

deren Werth nach dem bis jetzt Bewiesenen $=1+1+1+1+\ldots+1=q$ ist. Diese Summe kann, wenn man $k=x+yi$, $k'=x'+y'i$ setzt, folgendermafsen dargestellt werden:

$$\Sigma[x+yi]^\nu[x'+y'i]^{-\nu},$$

mit der Bedingung $x+x'\equiv 1$. In der That: da die ursprüngliche Bedingungscongruenz für S_α, nämlich $x+yi+x'+y'i\equiv 1+\alpha i$, in die beiden folgenden zerfällt: $x+x'\equiv 1$ und $y+y'\equiv\alpha$, und da jetzt statt α alle untereinander incongruenten Zahlen gesetzt werden, so besagt die zweite Congruenz nur, dafs $y+y'$ *irgend* einer reellen Zahl congruent sein soll; diese Congruenz fällt also gänzlich weg, und es bleibt nur die erste $x+x'\equiv 1$ stehen. Es sei $\underset{\{x+x'\equiv 1\}}{\Sigma}[x+yi]^\nu[x'+y'i]^{-\nu}=T$, so ist also $T=q$.

In T können x und x' nicht gleichzeitig beide $\equiv 0$ sein, weil diese Annahme der Bedingungscongruenz widerspricht; für $x\equiv 0$ ist $x'\equiv 1$, für $x\equiv 1$, $x'\equiv 0$; der diesen beiden Combinationen 0, 1 und 1, 0 entsprechende Theil von T ist $=\Sigma[yi]^\nu\times\Sigma[1+y'i]^{-\nu}+\Sigma[1+yi]^\nu\times\Sigma[y'i]^{-\nu}$, und verschwindet, weil ν ungerade, also $\Sigma[y]^\nu=\Sigma[y']^\nu=\left(\frac{1}{q}\right)+\left(\frac{2}{q}\right)+\ldots+\left(\frac{q-1}{q}\right)$ $=0$ ist; übrigens sieht man, dafs für $x\equiv 0$ nicht $y\equiv 0$ und für $x'\equiv 0$ nicht $y'\equiv 0$ sein darf, weil von Anfang an weder k noch $k'\equiv 0$ sein sollte. Da der eben betrachtete Theil von T verschwindet, so kann man, ohne den Werth von T zu ändern, annehmen, dafs weder x noch x' durch q theilbar sein darf. Unter dieser Voraussetzung ist es erlaubt, für jede stehende Combination x, x' die Substitution $y\equiv xz$, $y'\equiv x'z'$ zu machen, weil dann jedesmal z und z', ebenso wie y und y', die sämmtlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots q-1$ oder ihnen congruente reelle Zahlen (mod. q) durchlaufen; das allgemeine Glied wird hierdurch

$$[x+xzi]^\nu[x'+x'z'i]^{-\nu} = [x]^\nu[x']^{-\nu}[1+zi]^\nu[1+z'i]^{-\nu}$$
$$=\left(\frac{x}{q}\right)\left(\frac{x'}{q}\right)[1+zi]\,[1+z'i]^{-\nu}.$$

Betrachtet man die vier Factoren auf der rechten Seite, so sieht man, dafs x und x' nur in den beiden ersten vorkommen; der dritte enthält nur z, der vierte nur z'; und da in der Bedingungscongruenz überhaupt nur x und x', aber nicht z und z' vorkommen, so zerfällt jetzt T in das Product dreier Summen. Die erste dieser Summen ist $\Sigma\left(\frac{x}{q}\right)\left(\frac{x'}{q}\right)$, mit der Bedingung $x+x'\equiv 1$ (mod. q), wo x und x' sich von 1 bis $q-1$ erstrecken; die beiden andern sind $\Sigma[1+zi]^{\pm\nu}$, wo z die Werthe $0, 1, 2, \ldots q-1$ durchläuft, sonst aber weiter keine Bedingung Statt findet.

Um die erste dieser drei Summen zu bestimmen, kann man für jeden stehenden Werth von x' (was erlaubt ist) xx' an die Stelle von x setzen; man erhält so $\Sigma\left(\frac{xx'}{q}\right)\left(\frac{x'}{q}\right)=\Sigma\left(\frac{x}{q}\right)\left(\frac{x'}{q}\right)^2=\Sigma\left(\frac{x}{q}\right)$, mit der Bedingung $xx'+x'\equiv 1$, also $x'(x+1)\equiv 1$; dieser Bedingung nach mufs der Werth $x\equiv -1$, der $x+1\equiv 0$ macht, ausgeschlossen werden; für jeden andern Werth von x kann aber die Congruenz erfüllt werden, und zwar nur auf eine Weise kann x' zu einem gegebenen x bestimmt werden; man erhält daher $\Sigma\left(\frac{x}{q}\right)$, wo der Werth $x\equiv -1$ auszuschliefsen ist, d. h.

$$\left(\frac{1}{q}\right)+\left(\frac{2}{q}\right)+\dots+\left(\frac{q-1}{q}\right)-\left(\frac{-1}{q}\right) = -\left(\frac{-1}{q}\right) = +1,$$

weil $\left(\frac{-1}{q}\right)=-1$. Der Werth der ersten Summe ist also $=+1$, und somit das Product der beiden anderen $=T=q$. Als Resultat dieser Betrachtungen ergiebt sich daher:

$$(1.)\qquad \Sigma[1+zi]^{\nu}\cdot\Sigma[1+zi]^{-\nu} = q,$$

wo ν irgend eine ungerade Zahl bedeutet und in den beiden Summen, deren Product $=q$ ist, z die q Werthe 0, 1, 2, ... $q-1$ durchläuft.

§. 3.

Die Reihe

$$\Sigma[1+zi]^{\nu} = [1]^{\nu}+[1+i]^{\nu}+[1+2i]^{\nu}+[1+3i]^{\nu}+\dots+[1+(q-1)i]^{\nu}$$

ist eine Summe von q Potenzen von ω, also einer aus achten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen ganzen Zahl gleich. Um die Bedeutung derselben verständlicher zu machen, bezeichne σ_0 die Anzahl der Werthe von z, für welche $[1+zi]=1$, σ_1 die Anzahl derer, für welche $[1+zi]=\omega$, σ_2 die Anzahl derer, für welche $[1+zi]=\omega^2=i$ ist, u. s. w. bis σ_7, welches die Anzahl der Werthe von z bezeichnet, die $[1+zi]=\omega^7=-i\omega$ machen. Setzt man ferner für einen beliebigen Werth von u die ganze Function

$$\sigma_0+\sigma_1 u+\sigma_2 u^2+\dots+\sigma_7 u^7 = \varphi(u),$$

so ist dann $\Sigma[1+zi]=\varphi(\omega)$, $\Sigma[1+zi]^3=\varphi(\omega^3)$, $\Sigma[1+zi]^5=\varphi(\omega^5)$, $\Sigma[1+zi]^7=\varphi(\omega^7)$ und die Gleichung (1.) enthält die beiden Formeln

$$\varphi(\omega)\varphi(\omega^7)=q,\qquad \varphi(\omega^3)\varphi(\omega^5)=q.$$

Zwischen den acht reellen ganzen Zahlen $\sigma_0, \sigma_1, \dots \sigma_7$ finden merkwürdige Relationen Statt. Zuerst ist $\varphi(\omega)=\varphi(\omega^3)$, $\varphi(\omega^5)=\varphi(\omega^7)$, und allgemein $\varphi(\omega^{\nu})=\varphi(\omega^{3\nu})$. Denn für jeden Werth von z ist $[1+zi]^3=[1+zi]^q$ $=[1-zi]$, also $\Sigma[1+zi]^{3\nu}=\Sigma[1-zi]^{\nu}$, und da $-z$ eben sowohl wie z ein reelles vollständiges Restensystem (mod. q) durchläuft, so ist letztere Summe wieder $=\Sigma[1+zi]^{\nu}$, demnach ist $\Sigma[1+zi]^{3\nu}=\Sigma[1+zi]^{\nu}$, $\varphi(\omega^{3\nu})=\varphi(\omega^{\nu})$ für jeden geraden oder ungeraden Werth von ν. Setzt man $\sigma_0-\sigma_4=A$, $\sigma_1-\sigma_5=B$, $\sigma_2-\sigma_6=C$, $\sigma_3-\sigma_7=D$, so ist, wie man unmittelbar aus der Form von $\varphi(u)$ sieht:

$$\begin{aligned}
\varphi(\omega) &= A+Ci+\omega(B+Di),\\
\varphi(\omega^3) &= A-Ci+\omega(D+Bi),\\
\varphi(\omega^5) &= A+Ci-\omega(B+Di),\\
\varphi(\omega^7) &= A-Ci-\omega(D+Bi),
\end{aligned}$$

und da $\varphi(\omega)=\varphi(\omega^3)$, $\varphi(\omega^5)=\varphi(\omega^7)$, so mufs $A+Ci=A-Ci$, $B+Di=D+Bi$, also $C=0$ und $B=D$ sein; demnach nehmen jene vier complexen Zahlen die einfachere Form

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega^3) = A+\omega(1+i)B,$$
$$\varphi(\omega^5) = \varphi(\omega^7) = A-\omega(1+i)B$$

an. Nun ist $\omega=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\omega(1+i)=\frac{2i}{\sqrt{2}}=i\sqrt{2}=\sqrt{-2}$, also

$$\varphi(\omega)=\varphi(\omega^3)=A+B\sqrt{-2},\qquad \varphi(\omega^5)=\varphi(\omega^7)=A-B\sqrt{-2},$$

und die Gleichung (1.) geht in

$$(2.)\qquad q = (A+B\sqrt{-2})(A-B\sqrt{-2}) = A^2+2B^2$$

über, wodurch *a priori* die Zerfällbarkeit von q in die quadratische Grundform mit der Determinante -2 erwiesen ist.

Die Relationen $C=0$ und $B=D$ geben $\sigma_2=\sigma_6$ (α.) und $\sigma_1+\sigma_7=\sigma_3+\sigma_5$ (β.). Zu ferneren Relationen führt die Betrachtung von $\varphi(\pm i)$, $\varphi(-1)$ und $\varphi(1)$. Die Summe $\Sigma[k]^\nu=\Sigma[x+yi]^\nu$, welche sich über alle Glieder k eines complexen reducirten Restensystems (mod. q) erstreckt, in welcher also x und y unabhängig von einander alle Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots q-1$ mit Ausschlufs der Combination $0, 0$ durchlaufen, verschwindet offenbar für jeden nicht durch 8 theilbaren Werth von ν; wenn ν durch 8 theilbar ist, so ist die Summe $=q^2-1$. Derjenige Theil jener Summe, welcher dem speciellen Werthe $x=0$ entspricht, ist $\Sigma[yi]^\nu=[i]^\nu\Sigma\left(\frac{y}{q}\right)^\nu$, wo y sich von 1 bis $q-1$ erstreckt; derselbe verschwindet, wenn ν ungerade ist, wird aber $=[i]^\nu(q-1)=(-1)^{\frac{1}{2}\nu}(q-1)$ für ein gerades ν. Für jeden andern von 0 verschiedenen stehenden Werth von x setze man $y\equiv xz$ (mod. q); dann durchläuft z mit y die Werthe $0, 1, 2, \ldots\ldots q-1$ und der übrige Theil der Summe wird $\Sigma[x+xzi]^\nu=\Sigma[x]^\nu\cdot\Sigma[1+zi]^\nu$, aber $\Sigma[x]^\nu=\Sigma\left(\frac{x}{q}\right)^\nu=q-1$, wenn ν gerade ist; für einen geraden, aber nicht durch 8 theilbaren Werth von ν erhält man daher $0=(-1)^{\frac{1}{2}\nu}(q-1)+(q-1)\Sigma[1+zi]^\nu$, also $\Sigma[1+zi]^\nu=-(-1)^{\frac{1}{2}\nu}$, d. h. $\Sigma[1+zi]^{\pm 2}=+1$, $\Sigma[1+zi]^4=-1$, $\varphi(\pm i)=1$, $\varphi(-1)=-1$. $\varphi(\pm i)$ ist $=(\sigma_0-\sigma_2+\sigma_4-\sigma_6)\pm i(\sigma_1-\sigma_3+\sigma_5-\sigma_7)$ und daher $\sigma_0-\sigma_2+\sigma_4-\sigma_6=1$ (γ.), $\sigma_1-\sigma_3+\sigma_5-\sigma_7=0$ (δ.); $\varphi(-1)$ ist gleich der Summe aller σ mit geradem Index, weniger der Summe aller σ mit ungeradem Index; diese Differenz ist also $=-1$ (ε.). Endlich ist die Summe aller acht σ oder $\varphi(1)$ der Anzahl aller z gleich, also $=q$ (ζ.). Aus den

sechs Gleichungen, welche hiernach zwischen den acht Anzahlen σ Statt finden, können sechs derselben theils vollständig bestimmt, theils durch die beiden andern ausgedrückt werden; wir wählen σ_0 und σ_1, um durch diese die übrigen sechs auszudrücken. Da $\sigma_1+\sigma_7=\sigma_3+\sigma_5$ $(\beta.)$ und $\sigma_1-\sigma_7=\sigma_3-\sigma_5$ $(\delta.)$ ist, so folgt durch Addition und Subtraction $\sigma_1=\sigma_3$, $\sigma_7=\sigma_5$. Setzt man nun in den übrigen Gleichungen σ_1 für σ_3, σ_5 für σ_7 und σ_2 für σ_6 $(\alpha.)$, so erhält man

$$\sigma_0-2\sigma_2+\sigma_4=1\ (\gamma.),\qquad \sigma_0+2\sigma_2+\sigma_4-2(\sigma_1+\sigma_5)=-1\ (\varepsilon.),$$
$$\sigma_0+2\sigma_2+\sigma_4+2(\sigma_1+\sigma_5)=q\ (\zeta.).$$

Die beiden letzten Gleichungen geben, addirt und subtrahirt, $\sigma_0+2\sigma_2+\sigma_4=\frac{1}{2}(q-1)=4n+1$, $\sigma_1+\sigma_5=\frac{1}{4}(q+1)=2n+1$, von denen die erste mit $(\gamma.)$ verbunden $\sigma_0+\sigma_4=2n+1$, $\sigma_2=n$ liefert. Man hat demnach im Ganzen das folgende System von Relationen: $\sigma_0+\sigma_4=\sigma_1+\sigma_5=\sigma_3+\sigma_7=2n+1=\frac{1}{4}(q+1)$, $\sigma_2=\sigma_6=n=\frac{1}{8}(q-3)$, $\sigma_1=\sigma_3$, $\sigma_5=\sigma_7$, $A=\sigma_0-\sigma_4=2\sigma_0-\frac{1}{4}(q+1)$, $B=\sigma_1-\sigma_5=2\sigma_1-\frac{1}{4}(q+1)$ (3.).

§. 4.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Darstellung des Werths von A durch σ_0 allein, in der Form $A=2\sigma_0-\frac{1}{4}(q+1)=2\sigma_0-(2n+1)$; denn man kann aus derselben den Rest beurtheilen, welchen A durch 4 dividirt läfst, wodurch A in der Zerfällung $q=A^2+2B^2$ seinem Zeichen nach bestimmt wird. Es läfst sich nämlich leicht zeigen, dafs σ_0 immer eine ungerade Zahl ist. In der That bezeichnet σ_0 die Anzahl der incongruenten reellen Werthe von z, welche $(1+zi)^e\equiv 1$ (mod. q) machen. Da nun $1-zi\equiv(1+zi)^q$, also auch $(1+zi)^{qe}\equiv(1-zi)^e\equiv 1$ ist, so wird stets $1-zi$ mit $1+zi$ dieselbe Eigenschaft haben; unter den Werthen von z, deren Anzahl σ_0 ist, befindet sich demnach immer gleichzeitig $+z$ und $-z$, und da auch 0 unter ihnen vorkommt, $z\equiv 0$ aber der einzige Werth von z ist, der $+z\equiv -z$ macht, so steht 0 einzeln und alle übrigen Werthe von z sind paarweise vorhanden; daher ist die Anzahl aller, nämlich σ_0, ungerade. Hieraus folgt $2\sigma_0\equiv 2$ (mod. 4), $2\sigma_0-(2n+1)\equiv 1-2n\equiv 2n+1$ (mod. 4), also

$$(4.)\qquad A\equiv 2n+1\equiv \tfrac{1}{4}(q+1)\ (\text{mod.}\,4);$$

d. h. für die Primzahlen $q\equiv 3$ (mod. 16) ist A positiv oder negativ, je nachdem es, abgesehen vom Zeichen, $\equiv 1$ oder $\equiv 3$ (mod. 4.) ist, während für die Primzahlen $q\equiv 11$ (mod. 16) das Umgekehrte gilt. Was das Vorzeichen von B betrifft, so hangt es von der Wahl der Wurzel f der Congruenz $f^2\equiv i$ (mod q) (§. 1.) ab; wie man es leicht aus der Gleichung $B=\sigma_1-\sigma_5$

sieht. Die eben angewendete Methode zeigt, dafs B mit f zugleich sein Zeichen wechselt; der nähere Zusammenhang zwischen diesen beiden, einander wechselweise bestimmenden Elementen wird, wie wir später sehen werden, durch die Congruenz $A+(1+i)f.B\equiv 0 \pmod{q}$ oder besser noch durch die nur reelle Glieder enthaltende Congruenz $A+Bv\equiv 0 \pmod{q}$ angegeben, wo, wie in §. 1., $v^2\equiv -2 \pmod{q}$ und $(1+i)f\equiv v$ ist.

Es mögen hier gewisse Folgerungen aus dem Vorhergehenden, welche die bis jetzt entwickelten Resultate aus einigen neuen Gesichtspuncten darstellen, ihren Platz finden. Die Zahlen, deren Anzahl σ_0 ist, genügen der doppelten Bedingung, dafs sie, erstlich, die Congruenz $k^e\equiv 1 \pmod{q}$ erfüllen, und zweitens, dafs ihr reeller Theil $\equiv 1 \pmod{q}$ ist. Die zweite Bedingung läfst sich ebenfalls durch eine Congruenz ausdrücken; denn setzt man $1+zi=k$, so wird $k^q\equiv 1-zi$, $k^q+k\equiv 2$, also $k^q+k-2\equiv 0$; dieser letzteren Congruenz genügen die sämmtlichen q Zahlen von der Form $1+zi$, wo z alle Werthe $0, 1, 2, \ldots q-1$ haben kann; diese Congruenz hat also so viele Wurzeln, als ihr Grad beträgt; Dasselbe gilt von der ersten Congruenz $k^e-1\equiv 0$. Die σ_0 Zahlen, um welche es sich hier handelt, genügen beiden Congruenzen zugleich: sie sind also die Wurzeln des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers dieser beiden Congruenzen. Der Grad dieses gröfsten gemeinschaftlichen Theilers ist mithin $=\sigma_0$. Wenn man daher, wie in der Algebra, den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler der beiden Functionen k^e-1 und k^q+k-2 sucht, nur mit dem Unterschiede, dafs alle Vielfachen von q weggelassen werden müssen, so kommt man auf eine Function, deren Grad den Werth von σ_0 ergiebt; und dadurch ist dann zugleich der Werth von A in der Zerfällung $q=A^2+2B^2$ nach der Formel $A=2\sigma_0-\frac{1}{4}(q+1)$ bekannt. Ich habe gefunden, dafs der Grad des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers derselben beiden obigen Congruenzen für die Primzahlen q von der Form $8n+5$ auf ganz ähnliche Weise die Zerfällung in die Summe zweier Quadrate bestimmt.

Man sieht leicht, dafs alle Zahlen $x+yi$, deren $e$te Potenz $\equiv 1 \pmod{q}$ ist, die achten Potenzreste $\pmod{q}$ sind, und dafs unter dieser Voraussetzung $x+yi\equiv(\xi+\eta i)^8$ gesetzt werden kann; ferner ist evident, dafs $\sqrt[8]{(x+yi)}$ $\pmod{q}$ acht verschiedene Werthe hat, welche aus einem derselben durch Multiplication mit Potenzen von f hervorgehen. Betrachten wir nur diejenigen achten Potenzreste, welche von der Form $1+zi$ sind, so haben wir die Bedingung hinzuzufügen, dafs der reelle Theil von $(\xi+\eta i)^8$ der Einheit congruent

sein mufs: es mufs also der Congruenz

$$\xi^8-28\xi^6\eta^2+70\xi^4\eta^4-28\xi^2\eta^6+\eta^8 \equiv 1 \pmod{q}$$

genügt werden, und σ_0 drückt daher den achten Theil der zusammengehörigen reellen Lösungen ξ, η dieser Congruenz mit zwei Variabeln aus. Die Lösung diezer Congruenz läfst sich sehr leicht auf die Frage zurückführen, für wie viele reelle und incongruente Werthe von x der Ausdruck $x^8-28x^6+70x^4-28x^2+1$ einem quadratischen Reste (mod. q) und für wie viele er einem nicht quadratischen Reste congruent wird, aber ich kann nicht länger bei diesen beiläufigen Bemerkungen verweilen, sondern kehre zu dem Hauptgegenstande der Untersuchung zurück.

§. 5.

In die Function $\varphi(u)=\sigma_0+\sigma_1 u+\sigma_2 u^2+\ldots\ldots+\sigma_7 u^7$ sollen statt u die Potenzen von f gesetzt und es soll der Rest untersucht werden, welchen $\varphi(f^\nu)$ nach (mod. q) giebt. Für gerade Werthe von ν ist $\varphi(f^\nu)\equiv\varphi(\omega^\nu)$ und $\varphi(\omega^\nu)$ ist für diesen Fall oben vollständig bestimmt worden, nämlich $\varphi(i)=\varphi(-i)=1$, $\varphi(-1)=-1$, $\varphi(1)=q\equiv 0$. Es bleiben also nur die ungeraden Werthe von ν; für diese ist zunächst $\varphi(f)\equiv\varphi(f^3)$ und $\varphi(f^5)\equiv\varphi(f^7)$, und zwar aus denselben Gründen, welche oben $\varphi(\omega)=\varphi(\omega^3)$, $\varphi(\omega^5)=\varphi(\omega^7)$ gaben.

Im Allgemeinen ist $\varphi(f^\nu)\equiv\Sigma(1+zi)^{\nu e} \pmod{q}$ für jeden Werth von ν; denn für die σ_0 Werthe von z, welche $[1+zi]=1$ machen, ist $(1+zi)^{\nu e}\equiv 1$, für die σ_1 Werthe von z, welche $[1+zi]=\omega$ machen, ist $(1+zi)^{\nu e}\equiv f^\nu$, u. s. w., endlich für diejenigen σ_7 Werthe von z, welche $[1+zi]=\omega^7$ machen, ist $[1+zi]^{\nu e}\equiv f^{7\nu}$; wie unmittelbar aus der in §. 1. gegebenen Definition der Symbole [ ] hervorgeht. Es handelt sich demnach um die Bestimmung der Summen $\Sigma(1+zi)^{\nu e} \pmod{q}$.

Entwickelt man die Potenz $(1+zi)^{\nu e}$ nach dem binomischen Satze, so kommen, da $e>q$ ist, *sehr viele* Potenzen von z vor, deren Exponent durch $q-1$ theilbar ist, und dieser Umstand macht die Behandlung der hier in Rede stehenden Summen weit schwieriger, als die derjenigen analogen Summen, welche schon von *Gaufs* in der ersten Abtheilung seiner Theorie der biquadratischen Reste betrachtet wurden. Es kommt ja bekanntlich bei der Untersuchung des Restes einer Summe von der Form $\Sigma F(z)$, wo z die Werthe $0, 1, 2, \ldots\ldots q-1$ durchläuft und $F(z)$ irgend eine ganze Function von z bedeutet, immer nur auf die Betrachtung derjenigen Glieder in $F(z)$ an, deren Exponenten durch $q-1$ theilbar sind, indem $\Sigma z^\mu\equiv 0$, wenn μ nicht durch $q-1$ theilbar ist.

auch wenn $\mu=0$ ist, dagegen $\Sigma z^\mu \equiv q-1 \equiv -1 \pmod{q}$, wenn μ ein von Null verschiedenes Vielfache von $q-1$ ist.

Nimmt man (was erlaubt ist) $\nu<8$ an, und setzt $\nu e=\alpha+\beta q$, wo α und β beide nicht negativ und $<q$ sein sollen, so ist

$$(1+zi)^{\nu e}=(1+zi)^\alpha(1+zi)^{q\beta}\equiv(1+zi)^\alpha(1-zi)^\beta;$$

demnach ist $\Sigma(1+zi)^{\nu e}\equiv\Sigma(1+zi)^\alpha(1-zi)^\beta$. Das allgemeine Glied ist jetzt in Bezug auf z vom Grade $\alpha+\beta$, und da $\alpha+\beta<2(q-1)$ ist, so kann in demselben höchstens *eine* Potenz von z vorkommen, deren Exponent durch $q-1$ theilbar ist, nämlich z^{q-1} selbst. Ist demnach $\alpha+\beta$ noch $<q-1$, so enthält die Entwickelung des allgemeinen Gliedes nur Potenzen von z, deren Exponenten $<q-1$ sind, und die ganze Summe ist in diesem Falle $\equiv 0 \pmod{q}$, also auch $\varphi(f^\nu)\equiv 0 \pmod{q}$; im entgegengesetzten Falle, wenn $\alpha+\beta>q-1$, ist sie $\equiv$ dem entgegengesetzten Werthe des Coëfficienten von z^{q-1} in $(1+zi)^\alpha(1-zi)^\beta$. Die Werthe von α und β für $\nu=1, 3, 5, 7$ sind in der folgenden Tabelle berechnet:

$$\begin{array}{llll}
\nu=1, & \tfrac{1}{8}(q^2-1)=\quad e=3n+1+nq, & \alpha=3n+1, & \beta=n; \\
\nu=3, & \tfrac{3}{8}(q^2-1)=3e=\quad n+(3n+1)q, & \alpha=n, & \beta=3n+1; \\
\nu=5, & \tfrac{5}{8}(q^2-1)=5e=7n+2+(5n+1)q, & \alpha=7n+2, & \beta=5n+1; \\
\nu=7, & \tfrac{7}{8}(q^2-1)=7e=5n+1+(7n+2)q, & \alpha=5n+1, & \beta=7n+2;
\end{array}$$

wo, wie immer, $q=8n+3$ gesetzt wird. Hieraus sieht man, dafs für $\nu=1$ und $\nu=3$, $\alpha+\beta=4n+1<q-1$, also $\varphi(f)$ und $\varphi(f^3)\equiv 0 \pmod{q}$ sind; dagegen für $\nu=5$ und $\nu=7$ ist $\alpha+\beta=12n+3$, also $>q-1$, mithin $\varphi(f^5)\equiv\varphi(f^7)\equiv\Sigma(1+zi)^{7n+2}(1-zi)^{5n+1}\equiv\Sigma(1+zi)^{5n+1}(1-zi)^{7n+2}\equiv$ dem entgegengesetzten Werthe des Coëfficienten von z^{q-1} in dem allgemeinen Gliede dieser beiden Summen. Es sei der letztere $=\Delta$ und man setze

$$(1+zi)^{7n+2} = 1+K_1z+K_2z^2+\dots+K_{7n+2}z^{7n+2},$$
$$(1-zi)^{5n+1} = 1+L_1z+L_2z^2+\dots+L_{5n+1}z^{5n+1};$$

dann wird, wegen $q-1=8n+2=(5n+1)+(3n+1)=(7n+2)+n$, der gesuchte Coëfficient $\Delta=K_{3n+1}L_{5n+1}+K_{3n+2}L_{5n}+K_{3n+3}L_{5n-1}+\dots+K_{7n+2}L_n$. Nun ist allgemein $K_\mu=i^\mu\frac{(7n+2)!}{\mu!(7n+2-\mu)!}$ und $L_\mu=(-i)^\mu\frac{(5n+1)!}{\mu!(5n+1-\mu)!}$, wo immer $x!$ das Product der natürlichen Zahlen $1.2.3\dots x$ bedeutet; folglich besteht Δ aus einer Summe von Termen von der Form

$$i^\mu(-i)^{\mu'}\frac{(7n+2)!(5n+1)!}{\mu!(7n+2-\mu)!\mu'!(5n+1-\mu')!};$$

μ erstreckt sich von $3n+1$ bis $7n+2$, μ' erstreckt sich von $5n+1$ bis ab-

wärts zu n, und es ist immer $\mu+\mu'=8n+2=q-1$. Setzt man $5n+1-\mu'=\nu$, so wird $\mu'=5n+1-\nu$, ν erstreckt sich von 0 aufwärts bis $4n+1$ und es ist $\mu+\mu'=5n+1+\mu-\nu=8n+2$, also $\mu=\nu+3n+1$; hiernach geht der allgemeine Term von Δ in

$$i^{\nu+3n+1}(-i)^{5n+1-\nu}\frac{(7n+2)!(5n+1)!}{(\nu+3n+1)!(4n+1-\nu)!(5n+1-\nu)!\nu!}$$

über. Um diesen Ausdruck ferner zu vereinfachen, bemerke man, dafs im Nenner desselben $(\nu+3n+1)+(5n+1-\nu)=8n+2=q-1$ ist, für jeden Werth von ν. Nun ist allgemein, wenn a und b zwei positive ganze Zahlen sind, deren Summe $a+b=q-1$ ist, $a!b!\equiv-(-1)^a\equiv-(-1)^b \pmod{q}$; denn nach dem *Wilson*schen Satze ist $1.2\ldots.a\times(a+1)(a+2)\ldots.(q-1)\equiv-1$, und da nach der Voraussetzung $a+1\equiv-b$, $a+2\equiv-b+1\equiv-(b-1)$, $a+3\equiv-(b-2)$, u. s. w. ist, so folgt $1.2\ldots.a\times(-1)^b.b(b-1)(b-2)\ldots.1\equiv-1$, folglich u. s. w. Man kann demnach statt des Products der beiden Facultäten im Nenner $(\nu+3n+1)!(5n+1-\nu)!$, $-(-1)^{5n+1-\nu}$ setzen, indem man die Vielfachen von q wegläfst; was bei unserer Untersuchung erlaubt ist, da hier weder Zähler noch Nenner des obigen Ausdrucks durch q theilbar sind; dividirt man noch $(-i)^{5n+1-\nu}$ durch $(-1)^{5n+1-\nu}$ und vereinigt $i^{\nu+3n+1}$ mit $i^{5n+1-\nu}$ zu $i^{8n+2}=-1$, so bleibt blofs

$$\frac{(7n+2)!(5n+1)!}{\nu!(4n+1-\nu)!}.$$

Die Summation nach ν, welche Δ ergiebt, kann jetzt an diesem einfacheren Ausdrucke nach dem binomischen Satze ausgeführt werden. Es ist

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=4n+1}\frac{(4n+1)!}{\nu!(4n+1-\nu)!}=(1+1)^{4n+1}=2^{4n+1},$$

folglich, da die Zähler, welche ν nicht enthalten, bei der Summation als constante Factoren herausgesetzt werden können:

$$\Delta\equiv 2^{4n+1}\frac{(7n+2)!(5n+1)!}{(4n+1)!}.$$

Nachdem nun vor allen Dingen Δ *eingliedrig* dargestellt ist, kann man diesem Ausdrucke verschiedene einfachere Formen geben. Um die Potenz von 2 wegzuschaffen, bemerke man, dafs $2^{4n+1}=2^{\frac{1}{2}(q-1)}\equiv-1$, weil 2 zu $q=8n+3$ nichtquadratischer Rest ist; ferner kann man nach der obigen Bemerkung, dafs immer $a!b!\equiv-(-1)^a\equiv-(-1)^b$, wenn $a+b=q-1$ ist, statt $(7n+2)!$ und $(5n+1)!$ im Zähler, $n!$ und $(3n+1)!$ im Nenner schreiben, und statt $(4n+1)!$ im Nenner, $(4n+1)!$ im Zähler; nur mufs man hierbei

mit $-(-1)^n$, $-(-1)^{3n+1}$ multipliciren und mit $-(-1)^{4n+1}$ dividiren, also im Ganzen mit -1 multipliciren, und da dieses — sich gegen Dasjenige, welches aus 2^{4n+1} entspringt, aufhebt, so ergiebt sich

$$\varDelta \equiv \frac{(4n+1)!}{n!(3n+1)!} \pmod{q};$$

und folglich $\varphi(f^5) \equiv \varphi(f^7) \equiv -\varDelta \equiv -\frac{(4n+1)!}{n!(3n+1)!}$.

§. 6.

Da wegen $f^2 \equiv i$ die geraden Potenzen von f den gleichen Potenzen von ω congruent sind, so hat man, wenn, wie in §. 3., $\sigma_0 - \sigma_4 = A$, $\sigma_1 - \sigma_5 = B$, $\sigma_2 - \sigma_6 = C$, $\sigma_3 - \sigma_7 = D$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &\equiv A + Ci + f(B + Di),\\
\varphi(f^3) &\equiv A - Ci + f(D + Bi),\\
\varphi(f^5) &\equiv A + Ci - f(B + Di),\\
\varphi(f^7) &\equiv A - Ci - f(D + Bi);
\end{aligned}$$

und da in §. 3. schon $C = 0$, $B = D$ gefunden wurde:

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &\equiv \varphi(f^3) \equiv A + f(1+i)B,\\
\varphi(f^5) &\equiv \varphi(f^7) \equiv A - f(1+i)B.
\end{aligned}$$

Verbindet man diese Darstellungsweise mit den Resultaten des vorigen Paragraphen, so erhält man $A + f(1+i)B \equiv A + Bv \equiv 0$ und $A - f(1+i)B \equiv A - Bv \equiv -\varDelta$. Die erste Congruenz zeigt den Zusammenhang zwischen B und f oder B und v, wie er schon in §. 4. angemerkt wurde; mit der zweiten Congruenz durch Addition und Subtraction verbunden, liefert sie

$$2A \equiv -\varDelta \quad \text{und} \quad 2Bv \equiv \varDelta \pmod{q}.$$

Der Congruenz $2A \equiv -\varDelta \pmod{q}$ genügt also A in der Zerfällung $q = A^2 + 2B^2$. Da $\pm A < \sqrt{q} < \frac{1}{2}q$, so ist A der absolut kleinste Rest von $-\frac{1}{2}\varDelta$ (mod. q), und da wir ferner oben in §. 4. $A \equiv \frac{1}{2}(q+1)$ (mod. 4) gefunden haben, so mufs dieser absolut kleinste Rest mit einem solchen Vorzeichen behaftet sein, dafs er $\equiv \frac{1}{2}(q+1)$ (mod. 4) $\equiv 2n+1$ oder, was Dasselbe ist, dafs er $\equiv (-1)^n$ (mod. 4) wird. In allem Vorhergehenden ist hiernach der Beweis des folgenden Theorems enthalten:

„Es sei irgend eine Primzahl $q = 8n+3$ in die Form $A^2 + 2B^2$ zerfället, so ist A der absolut kleinste Rest von $-\frac{1}{2}\frac{(4n+1)!}{n!(3n+1)!}$ (mod. q), und „dieser absolut kleinste Rest wird mit seinem Zeichen $\equiv (-1)^n$ (mod. 4); „auch ist $A = 4\tau + 1 - 2n$, wo τ die Anzahl der Werthe von x aus der

„Reihe 1, 2, ... $\frac{1}{2}(q-1)$ bezeichnet, für welche $1+zi$ achter Potenzrest „zu q oder $(1+zi)^{\frac{1}{8}(q^2-1)} \equiv 1$ (mod. q) wird."

Der zweite Theil des Theorems ist mir eigenthümlich; der erste Theil ist von *Stern* in einer etwas verschiedenen Weise aufgestellt worden; die hier gegebene Darstellung, bei welcher aus der linearen Form von q selbst (mod. 16) das Vorzeichen von A erhellet, scheint mir die primitive des Satzes zu sein. Übrigens ist der Übergang zu der Darstellungsweise von *Stern* leicht zu machen. Bemerken wir zuerst, dafs B *nicht gerade* sein kann: denn wäre B gerade, so hätte man $B^2 \equiv 0$ (mod. 4), $2B^2 \equiv 0$ (mod. 8), $q = A^2 + 2B^2$ $\equiv A^2 \equiv 1$ (mod. 8), gegen die Voraussetzung. B ist also *ungerade*, wie auch schon aus $B = 2\sigma_1 - \frac{1}{2}(q+1)$ (§. 3.) erhellet; folglich ist $B^2 \equiv 1$ (mod. 8), $2B^2 \equiv 2$ (mod. 16), $q \equiv A^2 + 2$, $8n+1 \equiv A^2$ (mod. 16), $\frac{1}{8}(A^2-1) \equiv n$ (mod. 2), d. h. n ist *gerade*, wenn $A \equiv \pm 1$ (mod. 8), *ungerade*, wenn $A \equiv \pm 3$ (mod. 8) ist. In der Potenz $(-1)^n$ kann man demnach statt des Exponenten n auch $\frac{1}{8}(A^2-1)$ setzen, und der absolut kleinste Rest von $-\frac{1}{2}\cdot\frac{(4n+1)!}{n!(3n+1)!}$ (mod. q) ist $\equiv 1$ (mod. 4), wenn $A \equiv \pm 1$ (mod. 8); dagegen ist er $\equiv -1$ (mod. 4), wenn $A \equiv \pm 3$ (mod. 8.); er ist daher $\equiv 1$ (mod. 4), wenn er, abgesehn vom Zeichen, $\equiv 1$ oder $\equiv 7$ (mod. 8) ist; dagegen ist er $\equiv 3$ (mod. 4), wenn er, abgesehen vom Zeichen, $\equiv 3$ oder $\equiv 5$ (mod. 8) ist; d. h. jener absolut kleinste Rest wird mit positivem Zeichen aus der Formel hervorgehen, wenn er $\equiv 1$ oder $\equiv 3$ (mod. 8) ist, mit negativem Zeichen, wenn er, abgesehn vom Zeichen, $\equiv 5$ oder $\equiv 7$ (mod. 8) ist. Wenn man die Wurzel des ersten Quadrats in der Zerfällung von q durch den absolut kleinsten Rest von $+\frac{1}{2}\cdot\frac{(4n+1)!}{n!(3n+1)!}$ bestimmt, so gilt natürlich das Umgekehrte. Mit Ausnahme der Primzahl 3 kann man immer $\frac{(3n+2)(3n+3)\dots(4n+1)}{1.2\dots n}$ statt $\frac{(4n+1)!}{n!(3n+1)!}$ setzen. Man kann auch noch f oder v, und somit B, für sich durch eine Congruenz (mod. q) bestimmen, indem man von der leicht zu beweisenden Congruenz $f \equiv \Pi(x-yi)$ (mod. q) ausgeht, in welcher die Multiplication sich auf die Werthe $x = 1, 2, \dots \frac{1}{2}(q-1)$ und auf dieselben Werthe von y bezieht; ich bin aber in dieser Hinsicht zu keinem Resultate von grofser Eleganz gelangt.

Stern giebt seinem Satze noch mehrere andere Formen. Da er aber selbst diese verschiedenen Formen schon eine aus der andern abgeleitet hat, worüber man am angeführten Orte nachsehen kann, so ist es unnöthig, länger

dabei zu verweilen, ich verlasse daher die Primzahlen $8n+3$, um mich zu denen von der Form $7n+2$ und $7n+4$ zu wenden.

Über Primzahlen $7n+2$ und $7n+4$.

§. 7.

So wie bei den Primzahlen $8n+3$ die gewöhnlichen complexen Zahlen, so müssen bei denen $7n+2, 4$, zu welchen wir jetzt übergehen, complexe Zahlen von einer anderen Art zum Grunde gelegt werden. Für jene ist die Form a^2+b^2 nur dann durch q theilbar, wenn a und b beide mit q aufgehen; den neuen complexen Zahlen mufs in derselben Weise eine Normalform entsprechen, unter deren *Nichttheiler* die Primzahlen $q=7n+2$ und $q=7n+4$ gehören. Es giebt mannigfache Arten solcher complexen Zahlen; wesentlich ist, dafs dieselben *dreigliedrig*, also von der Form $x+y\eta_1+z\eta_2$ sein müssen, weil die Anzahl der Glieder eines vollständigen Restensystems solcher complexen Zahlen (mod. q) dann $\equiv 1$ (mod. 7) wird; ferner ist erforderlich, dafs η_1^2, η_2^2 und $\eta_1\eta_2$ sich linear in η_1 und η_2 ausdrücken lassen, und dafs man aus der *Theilbarkeit* des Productes zweier solchen complexen Zahlen durch den Modul q auf die Theilbarkeit der Factoren mufs schliefsen können. Am bequemsten sind jedoch und ereignen sich am besten für die folgenden Untersuchungen diejenigen complexen Zahlen, auf welche ich in meiner Abhandlung über die cubischen Formen mit drei Variabeln geführt wurde.

Es sei ζ eine siebente und ϱ eine dritte primitive Wurzel der Einheit, also $\frac{\zeta^7-1}{\zeta-1}=0$, $\varrho^2+\varrho+1=0$. Man bilde die 3 zweigliedrigen Perioden aus 7ten Wurzeln der Einheit $\zeta+\zeta^6=P_1$, $\zeta^2+\zeta^5=P_2$, $\zeta^3+\zeta^4=P_3$; auch kann man noch $P_4=P_3^2$, $P_5=P_2$, $P_6=P_1$, $P_8=P_1$, u. s. w. einführen. Die zu betrachtenden complexen Zahlen werden nun von folgender Form angenommen: $x+(y+z\varrho^2)(P_1+\varrho P_2+\varrho^2P_3)+(y+z\varrho)(P_1+\varrho^2P_2+\varrho P_3)=x+y\eta_1+z\eta_2$, wo x, y, z irgend drei gewöhnliche reelle ganze Zahlen vorstellen; hierbei ist, wegen $\varrho+\varrho^2=\varrho^2+\varrho^4=-1$: $\eta_1=2P_1-P_2-P_3=3P_1+1$, $\eta_2=-P_1+2P_2-P_3=3P_2+1$, also enthalten die complexen Zahlen die Cubikwurzeln der Einheit eigentlich nur scheinbar und bestehen in der That einzig aus den zweigliedrigen Perioden P_1, P_2, P_3, sind jedoch nicht mit den direct aus diesen Perioden zusammengesetzten complexen Zahlen von der Form $x+yP_1+zP_2$ zu verwechseln; ferner ist $P_1+\varrho P_2+\varrho^2P_3=\sqrt[3]{(7(2+3\varrho))}$,

$P_1+\varrho^2 P_2+\varrho P_3=\sqrt[3]{(7(2+3\varrho^2))}$, das Product beider Cubikwurzeln ist $=7$; durch η_2, η_3, η_4, ... werden die Werthe bezeichnet, in welche η_1 übergeht, wenn in η_1 statt ζ nach und nach ζ^2, ζ^3, ζ^4, u. s. w. gesetzt werden; man hat dann $\eta_4=\eta_3$, $\eta_5=\eta_2$, $\eta_6=\eta_1$, $\eta_8=\eta_1$, u. s. w., $\eta_1+\eta_2+\eta_3=3(P_1+P_2+P_3)+3=0$, $\eta_\mu^q=\eta_{q\mu}+qE$, $\eta_\mu^{q^2}=\eta_{q^2\mu}+qE'$, wo E und E' ganze complexe Zahlen aus η_1 und η_2 sind. Die complexe Zahl $x+y\eta_1+z\eta_2$ werde in ihrer Abhängigkeit von ζ durch $F(\zeta)$ bezeichnet, so dafs allgemein

$$F(u) = x+y(1+3u+3u^6)+z(1+3u^2+3u^5) \text{ ist.}$$

Setzt man $2+3\varrho=p_1$, $2+3\varrho^2=p_2$, $p=7$, so ist

$$F(\zeta) = F(\zeta^6) = x+(y+z\varrho^2)\sqrt[3]{(pp_1)}+(y+z\varrho)\sqrt[3]{(pp_2)},$$
$$F(\zeta^2) = F(\zeta^5) = x+(y+z\varrho^2)\varrho^2\sqrt[3]{(pp_1)}+(y+z\varrho)\varrho\sqrt[3]{(pp_2)},$$
$$F(\zeta^3) = F(\zeta^4) = x+(y+z\varrho^2)\varrho\sqrt[3]{(pp_1)}+(y+z\varrho)\varrho^2\sqrt[3]{(pp_2)}.$$

Das Product $F(\zeta)F(\zeta^2)F(\zeta^3)$ ist einer aus x, y, z zusammengesetzten homogenen Form dritten Grades mit reellen ganzen Coëfficienten gleich, nämlich $=x^3+pp_1(y+z\varrho^2)^3+pp_2(y+z\varrho)^3-3px(y+z\varrho^2)(y+z\varrho)$, und diese Form kann durch eine Primzahl $q=7n+2$ oder $q=7n+4$ nur dann theilbar sein, wenn x, y, z es alle drei sind, also wenn $F(\zeta)$ durch q theilbar ist; denn die Divisoren jener Form sind, wie z. B. aus meiner Abhandlung über die cubischen Formen mit drei Variabeln erhellet, die cubischen Reste zu 7, also die Primzahlen $7n\pm1$. Wenn zwei solche complexe Zahlen, wie wir sie hier betrachten, $F(\zeta)$ und $F'(\zeta)$, beide nicht durch q theilbar sind, so kann auch ihr Product nicht durch q theilbar sein; denn wäre dies der Fall und hätte man $F(\zeta)F'(\zeta)\equiv 0 \pmod{q}$, so wäre auch, indem man mit $F(\zeta^2)F(\zeta^3)$ multiplicirt und $F(\zeta)F(\zeta^2)F(\zeta^3)=\varphi$ setzt, $\varphi.F'(\zeta)\equiv 0$; also wären die mit φ multiplicirten Coëfficienten von $F'(\zeta)$ durch q theilbar: da aber φ ganz reell und nicht durch q theilbar und q eine Primzahl ist, so müfsten die drei Coëfficienten von $F'(\zeta)$, also $F'(\zeta)$ selbst, $\equiv 0 \pmod{q}$ sein; gegen die Annahme. Da der analoge Satz bei den reellen Zahlen die Grundlage aller Untersuchungen über Congruenzen bildet, so lassen sich für die hier vorkommenden complexen Zahlen $F(\zeta)$ in Beziehung auf den Modul q dieselben Behauptungen aufstellen, wie für reelle Zahlen. Ein vollständiges Restensystem (mod. q) umfafst q^3 complexe Zahlen, welche man erhält, wenn man die drei Coëfficienten x, y, z alle unter einander incongruenten Zahlen (mod. q) durchlaufen läfst; bei einem reducirten Restensystem, welches q^3-1 Glieder enthält, wird die Combination $x\equiv 0$, $y\equiv 0$, $z\equiv 0$ ausgeschlossen. Multiplicirt man alle Glieder eines

solchen reducirten Restensystems mit einer *bestimmten*, nicht durch q theilbaren complexen Zahl $F(\zeta)$, so werden die Vielfachen wieder ein reducirtes Restensystem bilden; das Product aller Vielfachen ist $\equiv$ dem Producte aller Reste, und wenn man auf beiden Seiten mit dem Producte aller Reste dividirt, so erhält man $F(\zeta)^{q^3-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Man hat ferner, nach einem jetzt allgemein bekannten Princip, $F(\zeta)^q \equiv F(\zeta^q)$, $F(\zeta)^{q^2} \equiv F(\zeta^q)^q \equiv F(\zeta^{q^2})$, $F(\zeta)^{q^3} \equiv F(\zeta^{q^2})^q \equiv F(\zeta^{q^3}) \equiv F(\zeta) \pmod{q}$, und hieraus wiederum $F(\zeta)^{q^3-1} \equiv 1$, wenn $F(\zeta)$ nicht durch q theilbar ist. $F(\zeta)$, $F(\zeta^q)$, $F(\zeta^{q^2})$ fallen resp. mit $F(\zeta)$, $F(\zeta^2)$, $F(\zeta^3)$ oder resp. mit $F(\zeta)$, $F(\zeta^3)$, $F(\zeta^2)$ zusammen, je nachdem $q \equiv 2$ oder $q \equiv 4 \pmod{7}$ ist. Wenn in der Folge von complexen Zahlen ohne weitere Bemerkung die Rede ist, so sind immer solche von der Form $x + y\eta_1 + z\eta_2$ zu verstehen; q ist stets eine reelle ungerade Primzahl von der Form $7n+2$ oder $7n+4$.

Da $q^3 \equiv 1 \pmod{7}$, also 7 ein Theiler von q^3-1 ist, so läfst sich leicht beweisen (wie bei den reellen Zahlen), dafs die Congruenz $f^7 \equiv 1 \pmod{q}$, aufser der Wurzel $f \equiv 1$ noch sechs andere complexe Zahlen zu Wurzeln hat; es sei f eine dieser letzteren*). Setzt man $q^3-1 = 7e$, so ist $k^{7e} \equiv 1 \pmod{q}$ für jede nicht durch q theilbare complexe Zahl k: demnach ist k^e einer Potenz von f congruent, und da es nur 7 incongruente Potenzen von f giebt, so theilen sich hiernach alle q^3-1 Glieder k eines reducirten Restensystems in 7 Classen. Die erste Classe enthält diejenigen k, für welche $k^e \equiv 1$; die zweite Classe diejenigen, für welche $k^e \equiv f$, u. s. w.; endlich die siebente Classe enthält diejenigen k, für welche $k^e \equiv f^6 \pmod{q}$ ist. Durch das Symbol $[k]$ sei eine Potenz von ζ bezeichnet, und zwar mit dem Exponenten derjenigen Potenz von f, welcher k^e congruent ist, so dafs $[k] = 1$, wenn $k^e \equiv 1$, $[k] = \zeta$, wenn $k^e \equiv f$, u. s. w., $[k] = \zeta^6$, wenn $k^e \equiv f^6 \pmod{q}$; beiläufig bemerke man, dafs diejenigen k, für welche $[k] = 1$ ist, die 7ten Potenzreste (mod. q) unter den complexen Zahlen sind. Für diese Symbole gelten nun wieder dieselben oder die analogen Relationen, wie für die in den vorhergehenden Paragraphen vorkommenden Symbole, nämlich $[k][l] = [kl]$, $[k]^\nu = [k^\nu]$, $[k] = [k']$, wenn $k \equiv k' \pmod{q}$, $[k^7] = [k]^7 = 1$, $[k]^\nu = [k]^{\nu'}$, $[k^\nu] = [k^{\nu'}]$, wenn $\nu \equiv \nu' \pmod{7}$; ferner $[F(\zeta)]^q = [F(\zeta^q)]$,

---

*) Es bedarf kaum einer besonderen Erwähnung, dafs für f nicht ζ genommen werden darf, eben so wenig wie in §. 1. ω für f, da hier nur von complexen Zahlen aus zweigliedrigen Perioden und nicht von solchen die Rede ist, die überhaupt aus 7ten Wurzeln der Einheit bestehen.

$[F(\zeta)]^{q^2} = [F(\zeta^{q^2})]$, $[F(\zeta)]^{q^3} = [F(\zeta)]$. Wenn $F(\zeta)$ einer reellen ganzen Zahl a gleich ist, so hat man $F(\zeta^q) = F(\zeta)$, also $[a]^q = [a]$, $[a]^{q-1} = 1$, also $[a] = 1$, wenn $q = 7n+2$, $[a]^3 = 1$, wenn $q = 7n+4$; aus $[a]^3 = 1$ folgt aber, wenn man auf beiden Seiten zur 5ten Potenz erhebt $[a]^{15} = [a] = 1$, also ist in beiden Fällen $[a] = 1$, wenn a eine reelle ganze Zahl ist; diese letztere Bemerkung wird im folgenden Paragraphen namentlich angewandt werden.

Drei complexe Zahlen, wie $F(\zeta)$, $F(\zeta^2)$ und $F(\zeta^3)$, mit denen resp. $F(\zeta^6)$, $F(\zeta^5)$, $F(\zeta^4)$ übereinstimmen, heifsen conjugirt. Da aus der Congruenz zweier complexen Zahlen die Congruenz ihrer conjugirten Zahlen folgt, so ist es erlaubt, statt aller Glieder eines reducirten Restensystems deren conjugirte Werthe zu setzen; d. h., wenn $F(\zeta)$ ein reducirtes Restensystem durchläuft, so werden $F(\zeta^2)$, so wie $F(\zeta^3)$, also auch $F(\zeta^q)$, $F(\zeta^{q^2})$ ein solches durchlaufen. Noch einige andere Sätze, welche nachstehend benutzt werden, sind so evident, dafs es unnöthig wäre, uns bei denselben aufzuhalten.

§. 8.

Den Summen in §. 2. analog betrachten wir hier die Summen $S_{\alpha,\beta} = \Sigma[k]^\nu[k']^{-\nu}$, in denen ν irgend eine, nicht durch 7 theilbare reelle ganze Zahl, also z. B. eine der sechs Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 vorstellt; die Summation bezieht sich auf k und k', welche beide ein reducirtes complexes Restensystem (mod. q) durchlaufen und dabei der Bedingung $k+k' \equiv 1+\alpha\eta_1+\beta\eta_2$ (mod. q) unterworfen werden, wo α und β irgend zwei gegebene reelle ganze Zahlen sind. Setzt man, wie in §. 2, $k \equiv k'l$, so ergiebt sich $S = \Sigma[k'l]^\nu[k']^{-\nu} = \Sigma[l]^\nu$, mit der Bedingung $k'(l+1) \equiv 1+\alpha\eta_1+\beta\eta_2$, wo k' und l reducirte Restensysteme durchlaufen; der letzteren Bedingung $k'(l+1) \equiv 1+\alpha\eta_1+\beta\eta_2$ genügend entspricht jedem Werthe von l ein und nur ein Werth von k', mit Ausnahme von $l \equiv -1$, für welchen Werth von l die Bedingung überhaupt nicht erfüllbar ist. Da nun k' in dem allgemeinen Gliede der Summe nicht mehr vorkommt, so erhält man $S = \Sigma[l]^\nu - [-1]^\nu$, wo sich die Summation auf alle Glieder l eines reducirten Restensystems bezieht, ohne dafs weiter irgend eine Beschränkung Statt fände. Da ν der Voraussetzung nach nicht durch 7 theilbar ist, so hat man $\Sigma[l]^\nu = e(1+\zeta+\dots+\zeta^6) = 0$, und da -1 eine reelle ganze Zahl ist, $[-1] = 1$, folglich $S_{\alpha,\beta} = -1$, für jeden Werth von α und β.

Die Anzahl der Combinationen aller incongruenten Werthe von α und β ist q^2; demnach die Summe aller $S_{\alpha,\beta}$, wenn für α, β alle diese Combinationen

gesetzt werden $= -q^2$; man kann z. B. α alle Zahlen 0, 1, 2, ... $q-1$ und, davon unabhängig, β ebenfalls alle diese Zahlen durchlaufen lassen.

Andrerseits verwandelt sich, wenn α und β aus gegebenen oder stehenden Werthen in laufende Werthe übergehen, die Bedingungscongruenz $k+k' \equiv 1+\alpha\eta_1+\beta\eta_2$ in die einfachere Bedingung, dafs die Summe der beiden ersten Theile von k und von k' der Einheit congruent sein soll, oder wenn man $k = x+y\eta_1+z\eta_2$, $k' = x'+y'\eta_1+z'\eta_2$ setzt, in $x+x' \equiv 1 \pmod{q}$; es ist daher $-q^2 = \Sigma[k]^r[k']^{-r}$, mit der Bedingung $x+x' \equiv 1$. Es sei diese neue Summe, welche als der Complex aller q^2 verschiedenen $S_{\alpha,\beta}$ erscheint, $= T$.

Da in der Bedingungscongruenz, welche für T Statt findet, y, z, y' und z' nicht vorkommen, so zerfällt jeder Theil von T, welcher einem stehenden Werthe von x und einem dazugehörigen von x' entspricht, in das Product zweier Summen $\Sigma[k]^r \times \Sigma[k']^{-r}$, deren eine sich auf y und z, die andere auf y' und z' bezieht. Wenn die stehenden Werthe von x und x' beide von 0 verschieden sind, so ist es erlaubt, xy, xz an die Stelle von y resp. z und $x'y'$, $x'z'$ an die Stelle von y' resp. z' zu setzen; hierdurch geht $[k]$ in $[x][1+y\eta_1+z\eta_2]$, so wie $[k']$ in $[x'][1+y'\eta_1+z'\eta_2]$ über. Da nun $[x] = [x'] = 1$ ist, so wird dieser Theil von T, welcher dem stehenden Werthepaare x, x' entspricht, $= \Sigma[1+y\eta_1+z\eta_2]^r \times \Sigma[1+y'\eta_1+z'\eta_2]^{-r}$, also von x und x' unabhängig. In der zweiten Summe kann man auch die Accente von y und z weglassen, da die accentuirten mit den nichtaccentuirten Buchstaben nicht mehr in derselben Summe gemischt vorkommen, und diese dieselben Werthe wie jene durchlaufen. Die zusammengehörigen Werthe von x und x', deren Summe $\equiv 1 \pmod{q}$ ist, sind, wenn keiner von beiden $\equiv 0 \pmod{q}$ sein soll, folgende: $2, q-1$; $3, q-2$; $4, q-3$; u. s. w. bis $q-1, 2$; der Anzahl nach $q-2$; und da die ihnen entsprechenden Theile von T alle einander gleich gefunden worden sind, so ist derjenige Theil von T, für welchen überhaupt weder x noch $x' \equiv 0$ ist, und welcher mit U bezeichnet sein mag,

$$U = (q-2)\Sigma[1+y\eta_1+z\eta_2]^r \cdot \Sigma[1+y\eta_1+z\eta_2]^{-r}.$$

Es bleibt noch der der Combination $x \equiv 0$, $x' \equiv 1$ und der der Combination $x \equiv 1$, $x' \equiv 0$ entsprechende Theil von T; diese beiden Theile von T seien durch V und W bezeichnet, so dafs $T = U+V+W$. Man findet dann

$$V = \Sigma[y\eta_1+z\eta_2]^r \cdot \Sigma[1+y'\eta_1+z'\eta_2]^{-r},$$
$$W = \Sigma[1+y\eta_1+z\eta_2]^r \cdot \Sigma[y'\eta_1+z'\eta_2]^{-r}.$$

In V ist unter den Werthen von y und z, in W unter denen von y' und z' die Combination 0, 0 auszuschliefsen. Um V und W auf die bequemste Weise mit U vereinigen zu können, betrachte man die Summe $\Sigma[k]^{\nu} = \Sigma[x+y\eta_1+z\eta_2]^{\nu}$, in welcher k ohne alle Beschränkung die sämmtlichen q^3-1 Glieder eines complexen reducirten Restensystems (mod. q) durchläuft, also x, y, z die Zahlen 0, 1, 2, ... $q-1$, oder die ihnen congruenten, mit Ausschlufs der Combination $x\equiv 0$, $y\equiv 0$, $z\equiv 0$, durchlaufen. Diese Summe, welche verschwindet, da sie $= e(1+\zeta+\ldots\ldots+\zeta^6)$ ist, zerfällt in die beiden Theile

$$\Sigma[y\eta_1+z\eta_2]^{\nu}+\Sigma[x+y\eta_1+z\eta_2]^{\nu} = 0,$$

wo im ersten Theile die Combination $y\equiv 0$, $z\equiv 0$, im zweiten der Werth $x\equiv 0$ auszuschliefsen ist. Setzt man, was im zweiten Theil erlaubt ist, xy, xz an die Stelle von y resp. z, so geht $[x+y\eta_1+z\eta_2]$ in $[x][1+y\eta_1+z\eta_2]$ über; da nun $[x]=1$ und $q-1$ die Anzahl der Werthe von x ist, so wird der zweite Theil $=(q-1)\Sigma[1+y\eta_1+z\eta_2]^{\nu}$; der erste Theil, welcher hiernach $= -(q-1)\Sigma[1+y\eta_1+z\eta_2]^{\nu}$ ist, stimmt mit dem ersten Factor von V überein und geht in den zweiten Factor von W über, wenn $-\nu$ statt ν gesetzt wird; V und W reduciren sich demnach auf den gemeinschaftlichen Werth $V=W=-(q-1)\Sigma[1+y\eta_1+z\eta_2]^{\nu}\cdot\Sigma[1+y\eta_1+z\eta_2]^{-\nu}$, nämlich auf das $-(q-1)$fache desselben Products, dessen $q-2$faches den Werth von U giebt. Zieht man jetzt die Werthe von U, V und W zusammen, indem man erwägt, dafs $q-2-(q-1)-(q-1) = -q$, so wird $T=$ dem $-q$fachen jenes Products, und da andrerseits $T=-q^2$ gefunden wurde, so erhält man

$$(1.)\qquad q = \Sigma[1+y\eta_1+z\eta_2]^{\nu}\cdot\Sigma[1+y\eta_1+z\eta_2]^{-\nu}$$

als Endresultat der Betrachtungen dieses Paragraphen.

§. 9.

Setzt man $1+y\eta_1+z\eta_2 \equiv F(\zeta)$, so bezeichnet $F(\zeta)$ die Gesammtheit aller Glieder eines Restensystems (mod. q) von complexen Zahlen, deren erster Bestandtheil $\equiv 1$ (mod. q) ist; dieselben Glieder oder ihnen congruente sind auch durch $F(\zeta^{\mu})$ bezeichnet, wenn μ irgend eine nicht durch 7 theilbare reelle ganze Zahl ist; denn incongruenten Werthen von $F(\zeta)$ entsprechen ebenfalls incongruente Werthe von $F(\zeta^{\mu})$, und der erste Bestandtheil in $F(\zeta^{\mu})$ fällt mit dem ersten Bestandtheil von $F(\zeta)$ zusammen; denn es ist $1+y\eta_2+z\eta_4 = 1-z\eta_1+(y-z)\eta_2$, $1+y\eta_3+z\eta_6 = 1+(z-y)\eta_1-y\eta_2$ u. s. w., wenn man vermittels $\eta_1+\eta_2+\eta_3=0$ und der übrigen Relationen zwischen den verschiedenen η alle hier vorkommenden Functionen von ζ, so oft es angeht,

auf die Form $a+b\eta_1+c\eta_2$ bringt; der Werth von a wird ihr erster Bestandtheil genannt. Hieraus folgt $\Sigma[F(\zeta^\mu)]^\nu = \Sigma[F(\zeta)]^\nu$ für jeden nicht durch 7 theilbaren Werth von μ. Wir wenden diese Bemerkung namentlich auf den Fall an, wo $\mu = q$ oder q^2 ist. Da $F(\zeta)^q \equiv F(\zeta^q)$, so hat man $[F(\zeta)]^q = [F(\zeta^q)]$, also $\Sigma[F(\zeta)]^{\nu q} = \Sigma[F(\zeta^q)]^\nu$, was sich nach der vorhergehenden Bemerkung auf $\Sigma[F(\zeta)]^\nu$ reducirt; in ähnlicher Weise findet man $\Sigma[F(\zeta)]^{\nu q^2} = \Sigma[F(\zeta^{q^2})]^\nu = \Sigma[F(\zeta)]^\nu$. Der Werth der Summen von der Form $\Sigma[F(\zeta)]^\nu = \Sigma[1+y\eta_1+z\eta_2]^\nu$ bleibt demnach ungeändert, wenn man $q\nu$ oder $q^2\nu$ an die Stelle des Exponenten ν setzt. Es mag nun $q\equiv 2$ oder $\equiv 4$ (mod. 7) sein, so sind immer die drei Zahlen ν, $q\nu$ und $q^2\nu$ den drei Zahlen 1, 2, 4 oder den drei Zahlen 3, 5, 6 in irgend einer Reihenfolge (mod. 7) congruent: erstere sind die quadratischen Reste, letztere die Nichtreste (mod. 7); die obigen Summen $\Sigma[F(\zeta)]^\nu = \Sigma[1+y\eta_1+z\eta_2]^\nu$ haben daher für alle sechs Werthe von ν nur zwei verschiedene Werthe, nämlich einen gemeinschaftlichen Werth für $\nu = 1, 2, 4$ und einen zweiten gemeinschaftlichen Werth für $\nu = 3, 5, 6$. Wenn endlich ν durch 7 theilbar ist, so erhält man eine Summe von q^2 Einheiten; für solche Werthe von ν ist also der Werth der obigen Summen $= q^2$.

Es sei σ_0 die Anzahl der Werthe von y und z, für welche $[F(\zeta)] = 1$, d. h. $F(\zeta)^e \equiv 1$ ist, σ_1 die Anzahl der Werthe von y und z, für welche $[F(\zeta)] = \zeta$, d. h. $F(\zeta)^e \equiv f$ ist, u. s. w., endlich σ_6 die Anzahl der Werthe von y und z, für welche $[F(\zeta)] = \zeta^6$, d. h. $F(\zeta)^e \equiv f^6$ (mod. q) ist. Setzt man allgemein für jedes beliebige u,

$$\sigma_0+\sigma_1 u+\sigma_2 u^2+\dots+\sigma_6 u^6 = \varphi(u),$$

so ist $\Sigma[F(\zeta)]^\nu = \varphi(\zeta^\nu)$ für jeden Werth von ν. Das Resultat des vorigen Paragraphen läfst sich dann wie folgt schreiben:

$$(2.)\qquad q = \varphi(\zeta^\nu)\varphi(\zeta^{-\nu}),$$

für jeden nicht durch 7 theilbaren Werth von ν. Nach dem, was wir vorhin gefunden haben, ist $\varphi(\zeta) = \varphi(\zeta^2) = \varphi(\zeta^4)$, $\varphi(\zeta^3) = \varphi(\zeta^5) = \varphi(\zeta^6)$ und $\varphi(1) = q^2$; hieraus folgt unmittelbar $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4$, $\sigma_3 = \sigma_5 = \sigma_6$, und dafs die Summe aller sieben σ gleich q^2 ist. Setzt man demnach der Kürze wegen die dreigliedrigen Perioden $\zeta+\zeta^2+\zeta^4 = \vartheta$, $\zeta^3+\zeta^5+\zeta^6 = \vartheta'$, so nehmen die complexen Zahlen φ, welche aus siebenten Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind, die einfachere Form

$$\varphi(\zeta) = \varphi(\zeta^2) = \varphi(\zeta^4) = \sigma_0+\sigma_1\vartheta+\sigma_3\vartheta',$$
$$\varphi(\zeta^3) = \varphi(\zeta^5) = \varphi(\zeta^6) = \sigma_0+\sigma_1\vartheta'+\sigma_3\vartheta$$

an, während allgemein $\varphi(u) = \sigma_0 + \sigma_1(u+u^2+u^4) + \sigma_3(u^3+u^5+u^6)$ ist; ferner ist $\sigma_0 + 3\sigma_1 + 3\sigma_2 = q^2$.

Bekanntlich ist $\vartheta + \vartheta' = -1$, $\vartheta - \vartheta' = \sqrt{-7}$, und zwar $\vartheta - \vartheta' = +i\sqrt{7}$, wenn $\zeta = \cos\frac{2}{7}\pi + i\sin\frac{2}{7}\pi$ genommen wird. Mittels dieser beiden Gleichungen kann man ϑ und ϑ' aus den Werthen von $\varphi(\zeta)$ und $\varphi(\zeta^3)$ eliminiren. Setzt man $\sigma_0 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = A$ und $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = B$, so ergiebt sich

$$\varphi(\zeta) = \varphi(\zeta^2) = \varphi(\zeta^4) = A + B\sqrt{-7},$$
$$\varphi(\zeta^3) = \varphi(\zeta^5) = \varphi(\zeta^6) = A - B\sqrt{-7};$$

demnach wird aus (2.):

$$(2'.)\qquad q = (A+B\sqrt{-7})(A-B\sqrt{-7}) = A^2 + 7B^2,$$

wodurch die Zerfällbarkeit von q in die Form $A^2 + 7B^2$ *a priori* dargethan ist und die Elemente der Zerfällung selbst bestimmt sind.

Es bleibt noch nachzuweisen, dafs A und B ganze Zahlen sind. Sicher sind $2A = 2\sigma_0 - \sigma_1 - \sigma_3$ und $2B = \sigma_1 - \sigma_3$ ganze Zahlen; setzt man $2A = A'$, $2B = B'$, so wird $4q = A'^2 + 7B'^2$, und da q ungerade ist, so hat man nach dem (mod. 8) $4q \equiv 4$, $4 \equiv A'^2 + 7B'^2 \equiv A'^2 - B'^2$. Zunächst müssen also A' und B' entweder beide gerade oder beide ungerade sein, weil sonst die Differenz ihrer Quadrate ungerade wäre: es können aber auch nicht A' und B' beide ungerade sein, denn in diesem Falle wäre $A'^2 \equiv 1$, $B'^2 \equiv 1$, also $A'^2 - B'^2 \equiv 0$ (mod. 8), während $A'^2 - B'^2 \equiv 4$ (mod. 8) sein soll: es sind also nothwendig A' und B' beide gerade und demnach A und B ganze Zahlen.

Die Gleichung $\sigma_0 + 3\sigma_1 + 3\sigma_3 = q^2$, welche ausdrückt, dafs die Summe aller σ gleich q^2 ist, erhält eine besondere Wichtigkeit, wenn es sich darum handelt, das Vorzeichen zu bestimmen, mit welchem der Werth von A in der Zerfällung $A^2 + 7B^2$ aus den hier angestellten Betrachtungen hervorgeht. Behandelt man jene Gleichung als Congruenz nach (mod. 7), so hat man durch Multiplication mit 2, und wenn man -1 statt 6 schreibt, $2\sigma_0 - \sigma_1 - \sigma_3 \equiv 2q^2$ (mod. 7), d. h. mit Berücksichtigung des obigen Werthes von A, $2A \equiv 2q^2$, $A \equiv q^2$ (mod. 7). Wenn also $q = 7n+2$, so ist $A \equiv 4$, und wenn $q = 7n+4$, so ist $A \equiv 16 \equiv 2$ (mod. 7). Es könnte auf den ersten Anblick befremden, dafs von den sechs Resten, welche überhaupt eine nicht durch 7 theilbare Zahl (mod. 7) lassen kann, jedesmal nur einer derselben zur Bestimmung von A auftritt; aber es ist zu bedenken, dafs das Quadrat von A schon *a priori* nach dem Modul 7 bestimmt ist, indem aus der Gleichung $q = A^2 + 7B^2$ die Congruenz $A^2 \equiv q$ (mod. 7) folgt; für $q = 7n+2$ kann also überhaupt

nur $A\equiv\pm 4$ und für $q=7n+4$ kann überhaupt nur $A\equiv\pm 2$ (mod. 7) sein. Das vorhin gefundene Resultat lehrt nun, dafs, wenn man A nach der Methode dieses Paragraphen bestimmt, in den eben geschriebenen Congruenzen nicht das untere, sondern stets das obere Zeichen genommen werden mufs; für $q=7n+2$ wird sich demnach A als positiv oder negativ ergeben, je nachdem es, abgesehn vom Zeichen, $\equiv 4$ oder $\equiv 3$ (mod. 7) ist, und für $q=7n+4$ wird sich A mit positivem oder negativem Zeichen ergeben, je nachdem es, abgesehn vom Zeichen, $\equiv 2$ oder $\equiv 5$ (mod. 7) ist.

Ich verweile nicht bei Bemerkungen, welche denen in der zweiten Hälfte des §. 4. analog sind, sondern gehe zu der Bestimmung von A durch eine einfache Congruenz (mod. q) über.

§. 10.

Da sich nach den zwischen den sieben Anzahlen σ gefundenen Relationen $\varphi(u)$ für jeden Werth von u auf $\sigma_0+\sigma_1(u+u^2+u^4)+\sigma_3(u^3+u^5+u^6)$ reducirt, so hat man, mit Rücksicht auf die Congruenz $f^7\equiv 1$ (mod. q):

$$\varphi(f)\equiv\varphi(f^2)\equiv\varphi(f^4)\equiv\sigma_0+\sigma_1\Theta+\sigma_3\Theta',$$
$$\varphi(f^3)\equiv\varphi(f^5)\equiv\varphi(f^6)\equiv\sigma_0+\sigma_1\Theta'+\sigma_3\Theta \pmod{q},$$

wenn der Kürze wegen

$$f+f^2+f^4\equiv\Theta,\quad f^3+f^5+f^6\equiv\Theta'$$

gesetzt wird. Es zeigt sich leicht, dafs $\Theta+\Theta'\equiv -1$ und $(\Theta-\Theta')^2\equiv -7$ (mod. q) ist; es ist also $\Theta-\Theta'$ eine Wurzel der Congruenz $v^2\equiv -7$ (mod. q). Mittels der im vorigen Paragraphen gefundenen Werthe von A und B erhält man demnach

$$\varphi(f)\equiv A+Bv,\quad \varphi(f^3)\equiv A-Bv,\ \text{also}$$
$$2A\equiv\varphi(f)+\varphi(f^3),\quad 2Bv\equiv\varphi(f)-\varphi(f^3).$$

Übrigens wird zur Ableitung des hier besonders wichtigen Resultats $2A\equiv\varphi(f)+\varphi(f^3)$ die Kenntnifs der Congruenz $(\Theta-\Theta')^2\equiv -7$ nicht erfordert, sondern man reicht schon mit $\Theta+\Theta'\equiv -1$ aus, denn durch Addition der obigen Congruenzen erhält man $\varphi(f)+\varphi(f^3)\equiv 2\sigma_0+\sigma_1(\Theta+\Theta')+\sigma_3(\Theta'+\Theta)\equiv 2\sigma_0-\sigma_1-\sigma_3=2A$. Es kommt jetzt auf die Bestimmung von $\varphi(f)$ und $\varphi(f^3)$ (mod. q) an.

Setzt man wiederum $1+y\eta_1+z\eta_2\equiv F(\zeta)$, so ist

$$\Sigma F(\zeta)^{re}\equiv\sigma_0+\sigma_1 f^r+\sigma_2 f^{2r}+\ldots.+\sigma_6 f^{6r}\equiv\varphi(f^r),$$

wie aus der Bedeutung von σ_0, σ_1 u. s. w. hervorgeht; man kann also $\varphi(f^r)$ durch die Summe $\Sigma F(\zeta)^{re}$ ersetzen.

Der Grad des allgemeinen Gliedes dieser Summe in Bezug auf y und z ist $\nu e=\frac{1}{7}(q^3-1)\nu$; um diesen Grad möglichst zu erniedrigen, ordne man νe nach Potenzen von q, deren Coëfficienten nicht negative ganze Zahlen $<q$ sind, $\nu e=\alpha+\beta q+\gamma q^2$, so dafs gewissermafsen $\gamma\beta\alpha$ die Ziffern von νe in einem Zahlensystem mit der Basis q sind. Wenn man nun $F(\zeta^q)$ für $F(\zeta)^q$ und $F(\zeta^{q^2})$ für $F(\zeta)^{q^2}$ substituirt und noch der Kürze wegen $F(\zeta)=1+y\eta_1+z\eta_2=k$, $F(\zeta^q)\equiv 1+y\eta_q+z\eta_{2q}=k'$, $F(\zeta^{q^2})\equiv 1+y\eta_{q^2}+z\eta_{2q^2}=k''$ setzt, so erhält man

$$F(\zeta)^{\nu e}=F(\zeta)^{\alpha+\beta q+\gamma q^2}\equiv k^\alpha k'^\beta k''^\gamma,\ \text{also}$$
$$\Sigma F(\zeta)^{\nu e}\equiv\varphi(f^\nu)\equiv\Sigma k^\alpha k'^\beta k''^\gamma\ (\text{mod. } q).$$

Wenn in Bezug auf eine ganze Function $\psi(y,z)$ von zwei Variabeln y und z, als allgemeines Glied die doppelte Summation über alle Werthe von y und z aus der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots\ q-1$ ausgeführt werden soll und der Rest der Doppelsumme (mod. q) gesucht wird, so braucht man nur diejenigen Terme der ganzen Function $\psi(y,z)$ beizubehalten, in welchen sowohl der Exponent von y als der Exponent von z durch $q-1$ theilbar ist, ohne Null zu sein: denn es ist $\Sigma\Sigma y^\mu z^{\mu'}=\Sigma y^\mu.\Sigma z^{\mu'}$ durch q theilbar, so oft einer der beiden Exponenten μ oder μ' (oder gar beide) *nicht* durch $q-1$ theilbar ist; auch dann, wenn einer der beiden Exponenten $=0$ ist; dagegen wenn μ und μ' positiv und beide durch $q-1$ theilbar sind, so ist $\Sigma\Sigma y^\mu z^{\mu'}\equiv(q-1)(q-1)\equiv+1$ (mod. q); und daher ist überhaupt $\Sigma\psi(y,z)\equiv$ der Summe aller derjenigen Coëfficienten in $\psi(y,z)$, für welche der Exponent der zugehörigen Potenz von y sowohl, als auch der von z, >0 und $\equiv 0$ (mod. $q-1$) ist, d. h. $\Sigma\psi(y,z)\equiv$ der Summe der Coëfficienten von

$$y^{q-1}z^{q-1},\quad y^{2(q-1)}z^{q-1},\quad y^{(q-1)}z^{2(q-1)},\quad y^{2(q-1)}z^{2(q-1)},\quad \text{u. s. w.}$$

in $\psi(y,z)$ *). Diese Terme sind von der Ordnung $2(q-1)$, oder von höherer Ordnung; wenn nun der Grad von $\psi(y,z)$ noch unter $2(q-1)$ liegt, so ist $\Sigma\psi(y,z)\equiv 0$ (mod. q). Dieser letztere Fall findet für unsere obigen Summen Statt, wenn $\alpha+\beta+\gamma<2(q-1)$ ist.

Die Werthe von α, β, γ werden auf folgende Weise gefunden. Setzt man $\nu\equiv\nu' q$, $\nu'\equiv\nu'' q$ (mod. 7), woraus wiederum $\nu''\equiv\nu q$ (mod. 7) folgt, und nimmt hierbei ν, ν', ν'' alle drei <7 an, so hat man

$$\tfrac{1}{7}(\nu q^3-1)=\tfrac{1}{7}(\nu q^3-\nu' q)+\tfrac{1}{7}(\nu' q-\nu)=q\cdot\tfrac{1}{7}(\nu q^2-\nu')+\tfrac{1}{7}(\nu' q-\nu),$$
$$\tfrac{1}{7}(\nu q^2-\nu')=\tfrac{1}{7}(\nu q^2-\nu'' q)+\tfrac{1}{7}(\nu'' q-\nu')=q\cdot\tfrac{1}{7}(\nu q-\nu'')+\tfrac{1}{7}(\nu'' q-\nu'),$$

---

*) Ähnliches für ganze Functionen von n Variabeln bei $n$facher Summation.

demnach $\alpha=\frac{1}{7}(\nu' q-\nu)$, $\beta=\frac{1}{7}(\nu'' q-\nu')$, $\gamma=\frac{1}{7}(\nu q-\nu'')$; bildet man nun die Summe $\alpha+\beta+\gamma$, auf welche es hier besonders ankommt, so erhält man $\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{7}\{(\nu'+\nu''+\nu)q-(\nu+\nu'+\nu'')\}=\frac{1}{7}(\nu+\nu'+\nu'')(q-1)$. Wie man sieht, sind ν, ν', ν'' entweder die drei quadratischen Reste (mod. 7), oder die drei quadratischen Nichtreste <7, in irgend einer Reihenfolge; die Summe der Reste $1+2+4$ ist 7, die Summe der Nichtreste $3+5+6=14$, daher $\alpha+\beta+\gamma=q-1$ oder $=2(q-1)$, je nachdem ν quadratischer Rest oder Nichtrest (mod. 7) ist. In Verbindung mit den obigen Betrachtungen folgt hieraus, dafs $\varphi(f)$, $\varphi(f^2)$ und $\varphi(f^4)$ alle drei durch q theilbar sind; für die drei übrigen Werthe von ν wird $\varphi(f^\nu)\equiv$ dem Coëfficienten von $y^{q-1}z^{q-1}$ in $k^\alpha k'^\beta k''^\gamma$. Man könnte nun diesen Coëfficienten suchen; aber man stöfst hierbei auf Schwierigkeiten, indem die Masse von Gliedern, aus welchen er besteht, so viel ich sehe, keiner einfachen Summation fähig ist; auch will ich den Leser nicht durch Aufzählung der vergeblichen Versuche ermüden, welche ich zur Auffindung eines einfachen Ausdrucks für den in Rede stehenden Coëfficienten angestellt habe, sondern gehe zu einer andern Methode über, durch welche diese Schwierigkeit, wenn nicht überwunden, so doch umgangen wird. Es hat auch übrigens nichts Überraschendes, dafs ein Ausdruck, welcher an sich nicht einfach dargestellt werden kann, einen Rest (mod. q) giebt, der allerdings auf anderem Wege eine einfache Darstellung zuläfst.

§. 11.

Eliminirt man aus den drei Congruenzen

$$k\equiv 1+y\eta_1+z\eta_2,\qquad k'\equiv 1+y\eta_q+z\eta_{2q},\qquad k''\equiv 1+y\eta_{q^2}+z\eta_{2q^2}$$

die beiden Variabeln y und z, so erhält man eine lineäre Relation zwischen k, k' und k''; nämlich $k+k'+k''\equiv 3$, vermöge welcher $k''\equiv 3-k-k'$ (mod. q) gesetzt werden kann, indem $\eta_1+\eta_q+\eta_{q^2}=\eta_2+\eta_{2q}+\eta_{2q^2}=\eta_1+\eta_2+\eta_4=0$ ist. Hiernach wird $\Sigma k^\alpha k'^\beta k''^\gamma\equiv\Sigma k^\alpha k'^\beta(3-k-k')^\gamma=S$. Entwickelt man $(3-k-k')^\gamma$ nach Potenzen von k und k' und setzt irgend einen Term dieser Entwickelung $=\Delta\cdot k^\delta k'^\varepsilon$, wo also δ und ε beide nicht negativ sind und ihre Summe $\delta+\varepsilon\leqq\gamma$ ist, so besteht die Summe S aus lauter Termen von der Form $\Delta\cdot\Sigma k^{\alpha+\delta}k'^{\beta+\varepsilon}$. Ich behaupte nun, dafs von allen diesen Termen, deren Inbegriff durch $\Delta\cdot T$ bezeichnet sein mag, so dafs $T=\Sigma k^{\alpha+\delta}k'^{\beta+\varepsilon}$, nur derjenige beizubehalten ist, für welchen $\alpha+\delta=q-1$ und zugleich $\beta+\varepsilon=q-1$, indem für alle übrigen $T\equiv 0$ (mod. q) ist. Wenn zuerst $(\alpha+\delta)+(\beta+\varepsilon)<2(q-1)$ ist, so hat man nach dem Obigen sofort $T\equiv 0$ (mod. q); die Summe beider

16 *

Exponenten $\alpha+\delta$ und $\beta+\varepsilon$ kann nie gröfser als $2(q-1)$ werden, denn $\delta+\varepsilon\leqq\gamma$ giebt $\alpha+\delta+\beta+\varepsilon\leqq\alpha+\beta+\gamma$, welches letztere, wie wir gesehen haben, nur $=q-1$ oder $=2(q-1)$; es bleibt also nur noch der Fall zu betrachten, wenn die Summe beider Exponenten $=2(q-1)$ ist; was dann Statt finden kann, wenn $\alpha+\beta+\gamma=2(q-1)$ ist, also für $\nu=3,5,6$. In diesem Falle sind die folgenden drei Annahmen möglich: 1) $\alpha+\delta>q-1$, $\beta+\varepsilon<q-1$, 2) $\alpha+\delta<q-1$, $\beta+\varepsilon>q-1$, 3) $\alpha+\delta=q-1$, $\beta+\varepsilon=q-1$. Für die erste Annahme setze man $\alpha+\delta=q+x$, für die zweite $\beta+\varepsilon=q+x$, wo $0\leqq x<q$; im ersten Falle hat man $k^{\alpha+\delta}=k^{x+q}\equiv k^x k$, also $T\equiv\Sigma k^x k'^{\beta+\varepsilon+1}$; hier ist die Summe der Exponenten x und $\beta+\varepsilon+1$ wiederum $<2(q-1)$, also $T\equiv0$, denn offenbar ist $\alpha+\delta<2(q-1)$, also $x<q-2$, ferner $\beta+\varepsilon+1<q$, folglich $x+\beta+\varepsilon+1<2q-2$. Im zweiten Falle, wenn $\beta+\varepsilon=q+x>q-1$, hat man $k'^{\beta+\varepsilon}\equiv k'^x k''$, $T\equiv\Sigma k^{\alpha+\delta}k'^x k''$, und hier ist ebenfalls die Summe der drei Exponenten $\alpha+\delta$, x und 1 kleiner als $2(q-1)$, mithin $T\equiv0$. Es bleibt also schliefslich, wie oben behauptet, der Werth von T nur für die Combination $\alpha+\delta=q-1$, $\beta+\varepsilon=q-1$ zu betrachten und man hat

$$S\equiv\Delta\cdot\Sigma k^{q-1}k'^{q-1},$$

wo Δ den Coëfficienten von $k^\delta k'^\varepsilon=k^{q-1-\alpha}k'^{q-1-\beta}$ in der Entwicklung von $(3-k-k')^\gamma$ bedeutet, während $\alpha+\beta+\gamma=2(q-1)$, also

$$\gamma=(q-1-\alpha)+(q-1-\beta)$$

ist. Da das Glied, als dessen Coëfficient Δ erscheint, von der Ordnung γ, also von der Ordnung des zu entwickelnden Ausdruckes selbst ist, so braucht man blofs $(-k-k')^\gamma$ zu entwickeln und kann die Constante 3, welche blofs in Gliedern niederer Ordnung vorkommt, weglassen; der binomische Satz giebt dann $\Delta=(-1)^\gamma\dfrac{\gamma!}{(q-1-\alpha)!(q-1-\beta)!}$, wofür man auch $\alpha!\beta!\gamma!$ setzen kann.

Es bleibt noch die Summe $\Sigma k^{q-1}k'^{q-1}$ (mod. q) zu untersuchen. Der Coëfficient von $y^{q-1}z^{q-1}$ in $k^{q-1}k'^{q-1}$ stimmt mit dem Coëfficienten desselben Potenzproducts in $(y\eta_1+z\eta_2)^{q-1}\cdot(y\eta_q+z\eta_{2q})^{q-1}$ überein; nun ist in Hinsicht auf die Coëfficienten

$$(y\eta_1+z\eta_2)^{q-1}\equiv\frac{y^q\eta_1^q+z^q\eta_2^q}{y\eta_1+z\eta_2}\equiv y^{q-1}\eta_1^{q-1}-y^{q-2}z\eta_1^{q-2}\eta_2+y^{q-3}z^2\eta_1^{q-3}\eta_2^2-\text{etc.}$$
$$\ldots.+z^{q-1}\eta_2^{q-1}\ (\text{mod.}\ q),\ \text{ebenso}$$

$$(y\eta_q+z\eta_{2q})^{q-1}\equiv y^{q-1}\eta_q^{q-1}-y^{q-2}z\eta_q^{q-2}\eta_{2q}+y^{q-3}z^2\eta_q^{q-3}\eta_{2q}^2-\ldots.+z^{q-1}\eta_{2q}^{q-1},$$

folglich ist $\Sigma k^{q-1}k'^{q-1}\equiv$ dem Coëfficienten von $y^{q-1}z^{q-1}$ in dem Producte der beiden eben geschriebenen Reihen, also

$$\Sigma k^{q-1} k'^{q-1}$$
$$\equiv \eta_1^{q-1} \cdot \eta_{2q}^{q-1} + \eta_1^{q-2} \eta_2 \cdot \eta_q \eta_{2q}^{q-2} + \eta_1^{q-3} \eta_2^2 \cdot \eta_q^2 \eta_{2q}^{q-3} + \dots + \eta_2^{q-1} \cdot \eta_q^{q-1} \equiv \frac{\eta_1^q \eta_{2q}^q - \eta_2^q \eta_q^q}{\eta_1 \eta_{2q} - \eta_2 \eta_q},$$
$$(\eta_1 \eta_{2q} - \eta_2 \eta_q) \Sigma k^{q-1} k'^{q-1} \equiv \eta_1^q \eta_{2q}^q - \eta_2^q \eta_q^q \equiv \eta_q \eta_{2q^2} - \eta_{2q} \eta_{q^2},$$
nämlich $\Sigma k^{q-1} k'^{q-1} \equiv \frac{\eta_1 \eta_2 - \eta_4^2}{\eta_1 \eta_4 - \eta_2^2}$ für $q = 7n+2$, und $\equiv \frac{\eta_4^2 - \eta_1 \eta_2}{\eta_1^2 - \eta_2 \eta_4}$ für $q = 7n+4$, wenn man den Begriff der Congruenz auch auf Quotienten ausdehnen will, in der Weise, dafs $P \equiv \frac{Q}{R}$ nichts anderes bedeutet, als $RP \equiv Q$; nur darf hierbei nicht $R \equiv 0$ sein. Die eben gefundenen Ausdrücke vereinfachen sich, wenn man bemerkt, dafs immer $(a+b)^2 - (\varrho a + \varrho^2 b)(\varrho^2 a + \varrho b) = 2ab - (\varrho^2 + \varrho^4) ab = 3ab$ für irgend zwei Gröfsen a und b ist. Wenn nun von den drei Verbindungen η_1, η_2, η_4 irgend eine derselben $= a+b$ gesetzt wird, so sind die beiden andern von der Form $\varrho a + \varrho^2 b$ und $\varrho^2 a + \varrho b$, wobei $ab = 7$ ist; hiernach findet man $\eta_1^2 - \eta_2 \eta_4 = \eta_2^2 - \eta_1 \eta_4 = \eta_4^2 - \eta_1 \eta_2 = 3ab = 21$, demnach ist $\Sigma k^{q-1} k'^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$.

Endlich ergiebt sich also aus allen diesen Betrachtungen $\varphi(f^\nu) \equiv S \equiv \varDelta \equiv \frac{(-1)^\gamma \gamma!}{(q-1-\alpha)!(q-1-\beta)!} \equiv \alpha! \beta! \gamma! \pmod{q}$ für $\nu = 3$, 5 oder 6, und da oben für A in der Darstellung $q = A^2 + 7B^2$ die Congruenz $2A \equiv \varphi(f) + \varphi(f^3)$ gefunden worden war, $\varphi(f)$ aber $\equiv 0$ ist, so hat man jetzt $2A \equiv \frac{(-1)^\gamma \gamma!}{(q-1-\alpha)!(q-1-\beta)!} \pmod{q}$. Um das in dieser Congruenz enthaltene Theorem in seiner definitiven Gestalt aufstellen zu können, mufs man die Werthe von α, β, γ in der Entwickelung $\nu e = \alpha + \beta q + \gamma q^2$ für irgend einen der drei Werthe $\nu = 3$, 5 oder 6 berechnen. Dies geschieht nach der oben angegebenen Methode. Z. B. für $\nu = 3$ wird: 1) Wenn $q = 7n+2$ ist, $2\nu' \equiv 3$, $2\nu'' \equiv \nu' \pmod{7}$, $\nu' = 5$, $\nu'' = 6$, $\nu' q - \nu = 5q - 3 = 7(5n+1)$, $\nu'' q - \nu' = 6q - 5 = 7(6n+1)$, $\nu q - \nu'' = 3q - 6 = 7.3n$, also $\alpha = 5n+1$, $\beta = 6n+1$, $\gamma = 3n$, $q-1-\alpha = 2n$, $q-1-\beta = n$; da q ungerade, so ist $7n = q-2$, also $3n$ ebenfalls ungerade, daher $(-1)^\gamma = (-1)^{3n} = -1$, und folglich $2A \equiv \frac{-(3n)!}{(2n)!n!} \equiv -\frac{3n(3n-1)\dots(2n+1)}{1.2\dots n} \pmod{q}$. Wenn 2) $q = 7n+4$, so hat man $4\nu' \equiv 3$, $4\nu'' \equiv \nu' \pmod{7}$ zu setzen, woraus $\nu' = 6$, $\nu'' = 5$, $7\alpha = \nu' q - \nu = 6q - 3 = 7(6n+3)$, $7\beta = \nu'' q - \nu' = 5q - 6 = 7(5n+2)$, $7\gamma = \nu q - \nu'' = 3q - 5 = 7(3n+1)$; n ist hier ebenfalls ungerade, also $\gamma = 3n+1$ gerade; ferner ist $q-1-\alpha = 7n+3-(6n+3) = n$, $q-1-\beta = 7n+3-(5n+2) = 2n+1$, folglich kommt $2A \equiv \frac{(3n+1)!}{n!(2n+1)!} \equiv \frac{(3n+1)3n(3n-1)\dots(2n+2)}{1.2.3\dots n} \pmod{q}$. Diese Resultate können nun mit

den in §. 9 über das Vorzeichen von A gemachten Bemerkungen zu den beiden folgenden, wie ich glaube, ganz neuen Theoremen vereinigt werden.

„Setzt man für eine ungerade Primzahl $q=7n+2$, $q=A^2+7B^2$, so „wird A durch die Congruenz $2A\equiv-\frac{3n(3n-1)(3n-2)\dots(2n+1)}{1.2.3\dots n}$ (mod. q) „bestimmt, und es ergiebt sich aus dieser Congruenz der Werth von A mit „positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem A, selbst abgesehn vom „Zeichen, von der Form $7m+4$ oder $7m+3$ ist; die umgekehrte Regel gilt „für $2A\equiv+\frac{3n(3n-1)\dots(2n+1)}{1.2\dots n}$."

„Ist q eine Primzahl $7n+4$, und wird ebenfalls $q=A^2+7B^2$ ge- „setzt, so hat man $2A\equiv\frac{(3n+1)3n(3n-1)\dots(2n+2)}{1.2.3\dots n}$ (mod. q), und hieraus „wird A positiv oder negativ, je nachdem es, abgesehn vom Zeichen, die Form „$7m+2$ oder $7m+5$ hat."

Diese beiden Sätze vervollständigend, gesellt sich zu ihnen dasjenige Theorem, welches *Jacobi* vor einer langen Reihe von Jahren schon im zweiten Bande dieses Journals ohne Beweis publicirt hat; es betrifft die Primzahlen $7n+1$ und lautet wie folgt:

„Wenn die Primzahl $q=7n+1=A^2+7B^2$ ist, so ist

$$„2A\equiv\frac{3n(3n-1)\dots(2n+1)}{1.2\dots n}\ (\text{mod. } q),$$

„und hieraus ergiebt sich $A\equiv1$ (mod. 7), so dafs A positiv oder negativ „sein wird, je nachdem sein absoluter Werth $\equiv1$ oder $\equiv6$ (mod. 7) ist."

Von diesem lezteren Theoreme sehe ich mich veranlafst, meinen eigenen Beweis zurückzuhalten, weil der Entdecker des Satzes denselben ebenfalls bewiesen, seinen Beweis aber noch nicht publicirt hat.

Sonach kann man also für sämmtliche Primzahlen q, ohne Ausnahme, welche sich überhaupt durch die Form A^2+7B^2 darstellen lassen; den Werth von A durch directe Operationen bestimmen; und zwar ist, wenn die gefundenen Sätze kurz zusammengestellt werden:

$$q=7n+1,\quad 2A\equiv\frac{3n(3n-1)\dots(2n+1)}{1.2\dots n}\ (\text{mod. } q),\quad A\equiv1\ (\text{mod. } 7);$$

$$q=7n+2,\quad 2A\equiv\frac{3n(3n-1)\dots(2n+1)}{1.2\dots n}\ (\text{mod. } q),\quad A\equiv3\ (\text{mod. } 7);$$

$$q=7n+4,\quad 2A\equiv\frac{(3n+1)3n\dots(2n+2)}{1.2\dots n}\ (\text{mod. } q),\quad A\equiv2\ (\text{mod. } 7).$$

8.

Adnotationes ad seriem

$$1+\frac{x}{y}\cdot v+\frac{x(x+1)}{y(y+1)}\cdot v^2+\frac{x(x+1)(x+2)}{y(y+1)(y+2)}\cdot v^3+\dots \text{ in inf.}$$

(Auct. Dr. *Schaeffer* Berol.)

Seriem, quam hic perquirere conamur, in illa serie *Gaussiana*

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}\cdot x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}\cdot x^2+\dots \text{ etc.}$$

contineri, in aperto est. Sequimur autem, ad seriei naturam investigandam, methodum satis obviam, seriei summam per integralia definita exprimendi, horumque indolem perscrutandi. Tales quidem expressiones jam ab illustrissimis geometris inventae sunt. Reperimus enim apud *Eulerum* (Inst. calc. int. I, 350) hanc aequationem:

$$A+\frac{m}{\mu}\cdot B+\frac{m(m+n)}{\mu(\mu+n)}\cdot C+\frac{m(m+n)(m+2n)}{\mu(\mu+n)(\mu+2n)}\cdot D+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{\int_0^1\frac{x^{m-1}dx}{(1+x^n)^{\frac{m+n-\mu}{n}}}}\cdot\int_0^1\frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m+n-\mu}{n}}}(A+Bx^n+Cx^{2n}+Dx^{3n}+\text{etc.}),$$

in qua si ponitur $\frac{m}{n}=x$, $\frac{\mu}{n}=y$, $A=1$, $B=v$, $C=v^2$, $D=v^3$, etc., scribendo in integralibus β loco x, eruitur

$$1+\frac{x}{y}\cdot v+\frac{x(x+1)}{y(y+1)}\cdot v^2+\frac{x(x+1)(x+2)}{y(y+1)(y+1)}\cdot v^3+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{\int_0^1\frac{\beta^{nx-1}d\beta}{(1-\beta^n)^{x-y+1}}}\cdot\int_0^1\frac{\beta^{nx-1}}{(1-\beta^n)^{x-y+1}}(1+v\beta^n+v^2\beta^{2n}+v^3\beta^{3n}+\text{etc.})$$

$$=\frac{1}{\int_0^1\frac{\beta^{nx-1}d\beta}{(1-\beta^n)^{x-y+1}}}\cdot\int_0^1\frac{\beta^{nx-1}d\beta}{(1-\beta^n)^{x-y+1}(1-v\beta^n)}.$$

Atque etiam apud *Legendre* (Exercices de calc. int. IV partie, 114) invenitur haec relatio:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{(1-x)^r(1-ax)^n}$$

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-r)}{\Gamma(p+1-r)}(1+a)^{-n}\left[1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1-r}{p-r+1}\cdot\frac{a}{1+a}+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{(1-r)(2-r)}{(p-r+1)(p-r+2)}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^2}+\text{etc.}\right],$$

ex qua, posito $n=1$, $1-r=x$, $p-r+1=y$, $\frac{a}{1+a}=v$, nostra series statim derivatur.

1. Ponatur

1. $$\psi(x,y,v) = 1+\frac{x}{y}\cdot v+\frac{x(x+1)}{y(y+1)}\cdot v^2+\frac{x(x+1)(x+2)}{y(y+1)(y+2)}\cdot v^3+\text{ in inf.}$$

hujusque seriei ii tantum valores hic considerentur, qui valoribus realibus quantitatum x, y, v respondeant. Ac primum quidem de convergentia seriei paucis dijudicetur. At statim elucet, si y indicet zyphram aut quemlibet numerum negativum integrum, terminos seriei fieri infinitos; si vero aut $v=0$, aut x zyphra aut numerus negativus integer sit, seriem esse finitam. Deinde posito

$$a_n = \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)}\cdot v^n,$$

erit

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x+n}{y+n}\cdot v, \quad \text{unde} \quad \lim_{n=\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = v.$$

Hinc colligitur, si sit v. n. $v<1$, (v. n. v significat valorem numericum quantitatis v) seriem convergere; sin v. n. $v>1$, seriem divergere.

Porro si est $v=-1$, in serie $a_0+a_1+a_2+$ etc. signa terminorum, saltem inde a certo termino, alternari facile intelligitur. At si est $x\geqq y$, pro valoribus satis magnis ipsius n erit $a_n\geqq 1$; hoc ergo casu series diverget. Si vero est $x<y$, ob $\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{x+n}{y+n}$, erit v. n. $a_{n+1}<$ v. n. a_n; itaque quoniam insuper esse $\lim_{n=\infty} a_n=0$ constat, series ex theoremate noto converget.

Denique ad perscrutandam seriei convergentiam eo casu, ubi est $v=1$, sequamur methodum non ita directam. Est identice

$$(A.)\qquad \frac{1}{y-x-1} = \frac{1}{y+m}+\frac{x+m+1}{(y+m)(y-x-1)},$$

et $\frac{y-1}{y-x-1}=1+x\cdot\frac{1}{y-x-1}$, inde ex (*A.*), posito $m=0$,

$$\frac{y-1}{y-x-1}=1+\frac{x}{y}+\frac{x(x+1)}{y}\cdot\frac{1}{y-x-1}, \text{ ex } (A.), \text{ posito } m=1,$$

$$\frac{y-1}{y-x-1}=1+\frac{x}{y}+\frac{x(x+1)}{y(y+1)}+\frac{x(x+1)(x+2)}{y(y+1)}\cdot\frac{1}{y-x-1}, \text{ etc.},$$

generaliter

$$\frac{y-1}{y-x-1}$$

$$=1+\frac{x}{y}+\frac{x(x+1)}{y(y+1)}+\ldots+\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)}+\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)(x+n)}{y(y+1)\ldots\quad(y+n-1)}\cdot\frac{1}{y-x-1},$$

unde

$$1+\frac{x}{y}+\frac{x(x+1)}{y(y+1)}+\ldots+\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)}$$

$$=\frac{y-1}{y-x-1}-\frac{x}{y-x-1}\cdot\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)}.$$

Jam si est $x+1>y$, erit $\lim^{n=\infty}\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)}=\infty$, ideoque series diverget; si est $x+1=y$, series ipsa mutatur in hanc:

$$1+(y-1)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\text{ in inf.}\right);$$

ergo nisi est $y=1$, sive $x=0$, series diverget. Denique si est $x+1<y$, habetur $\lim^{n=\infty}\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)}=0$, ideoque

$$1+\frac{x}{y}+\frac{x(x+1)}{y(y+1)}+\text{etc.}=\frac{y-1}{y-x-1}.$$

Ex quibus omnibus elucet, seriem propositam convergere, excepto eo casu, ubi y zyphrae aut cuilibet numero negativo integro aequalis est,

1) si x aut zyphra aut numerus negativus integer sit,

2) si v. n. $v<1$, qualescunque sint x et y,

3) si $v=-1$, et simul $x<y$,

4) si $v=1$, simulque $x+1<y$.

Ex deductione autem simul summa seriei pro $v=1$ innotuit; quae quidem jam erat aperta (cf. v. c. *Crelle* Journal II, 36). Habemus igitur

$$2.\quad \psi(x,y,1)=\frac{y-1}{y-x-1}.$$

Sponte ex serie demanant etiam hae relationes:

$$3.\quad \psi(x,y,0)=1$$

et si m zyphram aut quemlibet numerum positivum integrum exhibet,

$$4.\quad \psi(-m,y,v)=1-\frac{m}{y}v+\frac{m(m-1)}{y(y+1)}v^2-\ldots+(-1)^m\frac{m(m-1)\ldots1}{y(y+1)\ldots(y+m-1)}v^m,$$

atque

$$5.\quad \psi(x,1,v)=\frac{1}{(1-v)^x},$$

$$6.\quad \psi(y,y,v)=\frac{1}{1-v}.$$

2. Quum sit

$$\psi(x,y,v) = 1+\frac{x}{y}\cdot v\Big(1+\frac{x+1}{y+1}v+\frac{(x+1)(x+2)}{(y+1)(y+2)}v^2+\text{etc.}\Big),$$

erit

$$7.\qquad \psi(x,y,v) = 1+\frac{x}{y}v\psi(x+1,y+1,v).$$

Eodem modo, si m numerum positivum integrum exhibet, invenitur

$$8.\qquad \psi(x,y,v) = 1+\frac{x}{y}v+\frac{x(x+1)}{y(y+1)}v^2+\ldots+\frac{x(x+1)\ldots(x+m-2)}{y(y+1)\ldots(y+m-2)}v^{m-1}$$
$$+\frac{x(x+1)\ldots(x+m-1)}{y(y+1)\ldots(y+m-1)}v^m\psi(x+m,y+m,v).$$

3. Sit ϱ quantitas positiva; tum $\frac{\varrho}{1+\varrho}$ inter 0 et 1 positum erit. Jam si statuitur

$$\varphi(\varrho) = \frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1+\varrho)^x}\psi\Big(x,y,\frac{\varrho}{1+\varrho}\Big) = \frac{1}{y-1}\sum_{n=0}^{n=\infty}\Big[\frac{x^{n|1}}{y^{n|1}}\varrho^{y+n-1}(1+\varrho)^{-x-n}\Big]$$

(accepta designatione *Krampiana*, secundum quam est $x^{n|1}=x(x+1)\ldots(x+n-1)$, $x^{0|1}=1$), obtinetur

$$\frac{d\varphi(\varrho)}{d\varrho} = \varphi'(\varrho) = \frac{1}{y-1}\sum_{n=0}^{n=\infty}\Big[\frac{x^{n|1}(y+n-1)}{y^{n|1}}\varrho^{y+n-2}(1+\varrho)^{-x-n}\Big]$$
$$-\frac{1}{y-1}\sum_{n=0}^{n=\infty}\Big[\frac{x^{n|1}(x+n)}{y^{n|1}}\varrho^{y+n-1}(1+\varrho)^{-x-1-n}\Big],$$

et ob

$$\frac{(y+n-1)}{(y-1)y^{n|1}} = \frac{1}{(y-1)y^{n-1|1}} = \frac{1}{(y-1)^{n|1}},\qquad x^{n|1}(x+n) = x(x+1)^{n|1}:$$

$$\varphi'(\varrho) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\Big[\frac{x^{n|1}}{(y-1)^{n|1}}\varrho^{y+n-2}(1+\varrho)^{-x-n}\Big]-\frac{x}{y-1}\sum_{n=0}^{n=\infty}\Big[\frac{(x+1)^{n|1}}{y^{n|1}}\varrho^{y+n-1}(1+\varrho)^{-x-1-n}\Big]$$

sive

$$\varphi'(\varrho) = \frac{\varrho^{y-2}}{(1+\varrho)^x}\Big[\psi\Big(x,y-1,\frac{\varrho}{1+\varrho}\Big)-\frac{x}{y-1}\cdot\frac{\varrho}{1+\varrho}\psi\Big(x+1,y,\frac{\varrho}{1+\varrho}\Big)\Big],$$

et quia secundum (7.) est

$$\psi\Big(x,y-1,\frac{\varrho}{1+\varrho}\Big)-\frac{x}{y-1}\cdot\frac{\varrho}{1+\varrho}\psi\Big(x+1,y,\frac{\varrho}{1+\varrho}\Big) = 1,$$

eruitur $\varphi'(\varrho)=\frac{\varrho^{y-2}}{(1+\varrho)^x}$; unde sequitur

$$\varphi(\varrho) = \int\frac{\varrho^{y-2}d\varrho}{(1+\varrho)^x},$$

h. e.

$$9.\quad \int\frac{\varrho^{y-2}d\varrho}{(1+\varrho)^x}=\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1+\varrho)^x}\psi\left(x,y,\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)+\text{Const.}\quad(\varrho>0)$$

Hinc, quoniam est $\varrho^{y-1}=0$ pro $\varrho=0$, si quidem est $y>1$, deducitur

$$10.\quad \int_0^\varrho\frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{(1+\alpha)^x}=\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1+\varrho)^x}\psi\left(x,y,\frac{\varrho}{1+\varrho}\right).\quad(y>1,\ \varrho>0)$$

4. Sit ϱ quantitas positiva minorque quam $\frac{1}{2}$, tum $\frac{-\varrho}{1-\varrho}$ inter 0 et -1 situm est. Posito autem

$$\varphi(\varrho)=\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1+\varrho)^x}\psi\left(x,y,\frac{-\varrho}{1-\varrho}\right),$$

eodem modo ut antea invenitur $\varphi'(\varrho)=\frac{\varrho^{y-2}}{(1-\varrho)^x}$, et inde

$$11.\quad \int\frac{\varrho^{y-2}d\varrho}{(1-\varrho)^x}=\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1-\varrho)^x}\psi\left(x,y,\frac{-\varrho}{1-\varrho}\right)+\text{Const.}\quad(0<\varrho\gtreqless\tfrac{1}{2})$$

atque quum sit $\varrho^{y-1}=0$ pro $\varrho=0$, si $y>1$:

$$12.\quad \int_0^\varrho\frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{(1-\alpha)^x}=\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1-\varrho)^x}\psi\left(x,y,\frac{-\varrho}{1-\varrho}\right).\quad(y>1,\ 0<\varrho\gtreqless\tfrac{1}{2})$$

5. In integralibus aequationum (10. et 12.) posito $\alpha=\varrho\beta$, invenitur

$$\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{(1\pm\alpha)^x}=\varrho^{y-1}\int_0^1\frac{\beta^{y-2}d\beta}{(1\pm\varrho\beta)^x};$$

itaque aequationes (10. et 12.) suppeditant hancce:

$$13.\quad \int_0^1\frac{\beta^{y-2}d\beta}{(1+\varrho\beta)^x}=\frac{1}{(y-1)(1+\varrho)^x}\psi\left(x,y,\frac{\varrho}{1+\varrho}\right).\quad(y>1,\ \varrho\gtreqless-\tfrac{1}{2})$$

6. Adhuc alia via patet, functionem ψ per integrale definitum exprimendi. Habetur enim

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)}=\frac{\Gamma(x+n)\Gamma(y)}{\Gamma(x)\Gamma(y+n)}=\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)\Gamma(y-x)}\cdot\frac{\Gamma(x+n)\Gamma(y-x)}{\Gamma(y+n)}.$$

At satis constat, esse, si p, q sint quantitates positivae:

$$\int_0^1\alpha^{p-1}d\alpha(1-\alpha)^{q-1}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

(cf. *Legendre* Exercices de calc. int. IV partie, §. 1.); hinc, posito $p=x+n$, $q=y-x$, sequitur

$$\frac{\Gamma(x+n)\Gamma(y-x)}{\Gamma(y+n)}=\int_0^1\alpha^{x+n-1}(1-\alpha)^{y-x-1}d\alpha,$$

ideoque

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)}=\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)\Gamma(y-x)}\int_0^1\alpha^{x+n-1}(1-\alpha)^{y-x-1}d\alpha,$$

et

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{x^{n|1}}{y^{n|1}}v^n\right\}=\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)\Gamma(y-x)}\int_0^1\sum_{n=0}^{n=\infty}\{\alpha^{x+n-1}(1-\alpha)^{y-x-1}v^n\}d\alpha$$

sive

$$\psi(x,y,v)=\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)\Gamma(y-x)}\int_0^1\frac{\alpha^{x-1}(1-\alpha)^{y-x-1}d\alpha}{1-v\alpha},$$

unde

$$14.\quad\int_0^1\frac{\alpha^{x-1}(1-\alpha)^{y-x-1}d\alpha}{1-v\alpha}=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y-x)}{\Gamma(y)}\psi(x,y,v).$$
$$(x>0,\ y>x)$$

7. At est

$$Z=\int_0^1\frac{\alpha^{x-1}(1-\alpha)^{y-x-1}d\alpha}{1-v\alpha}=\int_0^1\frac{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^{y-x-1}\alpha^{y-2}d\alpha}{1-v\alpha},$$

unde posito $\frac{1}{\alpha}-1=\beta$, prodit

$$Z=-\int_\infty^0\frac{\beta^{y-x-1}(1+\beta)^{-y}d\beta}{1-\frac{v}{1+\beta}}=\int_0^\infty\frac{\beta^{y-x-1}(1+\beta)^{-y+1}d\beta}{1-v+\beta};$$

itaque aequatio (14.) transit in

$$15.\quad\int_0^\infty\frac{\beta^{y-x-1}(1+\beta)^{-y+1}d\beta}{1-v+\beta}=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y-x)}{\Gamma(y)}\psi(x,y,v).$$
$$(x>0,\ y>x)$$

8. Relationibus inter functionem ψ variaque integralia inventis, investigatio functionis ψ ad disquisitionem horum integralium reducta est. Attamen hac in re notandum est, hujusmodi relationes inter integralia definita et functiones quaslibet plerumque non esse identicas, sed certis tantum conditionibus locum habere. Proinde, si inter haecce integralia aequationes existant, easdem pro functionibus, certis illis conditionibus valere rite concluditur. Nihilominus hae inter functiones erutae aequationes generalius valere solent; id quod aliunde demonstrandum relinquitur.

Recipiamus aequationes (9. et 11.).

Est

$$\int\frac{\varrho^{y-2}d\varrho}{(1\pm\varrho)^x}\mp\int\frac{\varrho^{y-1}d\varrho}{(1\pm\varrho)^x}+\int\frac{\varrho^{y}d\varrho}{(1\pm\varrho)^x}\mp\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{+}\int\frac{\varrho^{y+n-3}d\varrho}{(1\pm\varrho)^x}$$

$$=\int\frac{d\varrho}{(1\pm\varrho)^x}\left(\varrho^{y-2}\mp\varrho^{y-1}+\varrho^y\mp\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{+}\varrho^{y+n-3}\right)$$

$$=\int\frac{\left(\varrho^{y-2}-\frac{(-1)^n}{+}\varrho^{y+n-2}\right)d\varrho}{(1\pm\varrho)^{x+1}}=\int\frac{\varrho^{y-2}d\varrho}{(1\pm\varrho)^{x+1}}+\frac{(-1)^{n-1}}{-}\int\frac{\varrho^{y+n-2}d\varrho}{(1\pm\varrho)^{x+1}},$$

ubi signa respondent superiora superioribus, inferiora inferioribus. Hinc substitutis valoribus integralium ex (9. et 11.) invenitur

$$(B.)\quad \frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1\pm\varrho)^x}\psi\left(x,y,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)\mp\frac{\varrho^y}{y(1\pm\varrho)^x}\psi\left(x,y+1,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)$$
$$+\frac{\varrho^{y+1}}{(y+1)(1\pm\varrho)^x}\psi\left(x,y+2,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)\mp\dots$$
$$\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{+}\frac{\varrho^{y+n-2}}{(y+n-2)(1\pm\varrho)^x}\psi\left(x,y+n-1,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)$$
$$=\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1\pm\varrho)^{x+1}}\psi\left(x+1,y,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}}{-}\frac{\varrho^{y+n-1}}{(y+n-1)(1\pm\varrho)^{x+1}}\psi\left(x+1,y+n,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)+K,$$

ubi K a ϱ non dependet, et inde

$$(C.)\quad \frac{1}{y-1}\psi\left(x,y,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)\mp\frac{\varrho}{y}\psi\left(x,y+1,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)+\frac{\varrho^2}{y+1}\psi\left(x,y+2,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)\mp\dots$$
$$\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{+}\frac{\varrho^{n-1}}{y+n-2}\psi\left(x,y+n-1,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)$$
$$-\frac{1}{1\pm\varrho}\left[\frac{1}{y-1}\psi\left(x+1,y,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)+\frac{(-1)^{n-1}}{-}\frac{\varrho^n}{y+n-1}\psi\left(x+1,y+n,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)\right]$$
$$=\frac{(1\pm\varrho)^x}{\varrho^{y-1}}K.$$

Jam si est $y>1$, aequatio (B.) etiam pro $\varrho=0$ valet; unde concluditur $K=0$. Si vero est $y<1$, aequationes (B. et C.) pro quovis valore positivo quantitatis ϱ locum habent. At significante $\varphi(\varrho)$ membrum sinistrum aequationis (C.), facile intelligitur, $\overset{\varrho=0}{\lim}(\varphi(\varrho))$ non infinitum esse. Itaque etiam $\overset{\varrho=0}{\lim}\left\{\frac{(1\pm\varrho)^x}{\varrho^{y-1}}K\right\}$ sive, quippe quum K ab ϱ non pendeat, $K\overset{\varrho=0}{\lim}\left\{\frac{(1\pm\varrho)^x}{\varrho^{y-1}}\right\}$ non infinitum esse debet; id quod fieri nequit, nisi est $K=0$. Habemus ergo,

posito $\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}=v$, ex (*C.*) hanc aequationem generalem:

$$16.\quad \frac{1}{y-1}\psi(x,y,v)-\frac{1}{y}\Big(\frac{v}{1-v}\Big)\psi(x,y+1,v)+\frac{1}{y+1}\Big(\frac{v}{1-v}\Big)^2\psi(x,y+2,v)-\dots$$
$$\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{y+n-2}\Big(\frac{v}{1-v}\Big)^{n-1}\psi(x,y+n-1,v)$$
$$=(1-v)\Big[\frac{1}{y-1}\psi(x+1,y,v)+\frac{(-1)^{n-1}}{y+n-1}\Big(\frac{v}{1-v}\Big)^n\psi(x+1,y+n,v)\Big].$$

9. Ex (7.), ponendo $x-1$ loco x, $y-1$ loco y obtinetur

$$\psi(x,y,v)=\frac{y-1}{(x-1)v}\psi(x-1,y-1,v)-\frac{y-1}{(x-1)v};$$

hincque, ponendo $y+1$, $y+2$, ... $y+n-1$ loco y,

$$\psi(x,y+1,v)=\frac{y}{(x-1)v}\psi(x-1,y,v)-\frac{y}{(x-1)v},$$
$$\psi(x,y+2,v)=\frac{y+1}{(x-1)v}\psi(x-1,y+1,v)-\frac{y+1}{(x-1)v},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(x,y+n-1,v)=\frac{y+n-2}{(x-1)v}\psi(x-1,y+n-2,v)-\frac{y+n-2}{(x-1)v},$$

et, ponendo $x+1$ loco x in prima aequatione,

$$\psi(x+1,y,v)=\frac{y-1}{xv}\psi(x,y-1,v)-\frac{y-1}{xv},$$

et in hac $y+n$ loco y:

$$\psi(x+1,y+n,v)=\frac{y+n-1}{xv}\psi(x,y+n-1,v)-\frac{y+n-1}{xv}.$$

Quibus valoribus in aequatione (16.) substitutis, invenitur:

$$\frac{1}{(x-1)v}\Big[\psi(x-1,y-1,v)-\Big(\frac{v}{1-v}\Big)\psi(x-1,y,v)+\Big(\frac{v}{1-v}\Big)^2\psi(x-1,y+1,v)-\dots$$
$$\dots+(-1)^{n-1}\Big(\frac{v}{1-v}\Big)^{n-1}\psi(x-1,y+n-2,v)\Big]$$
$$-\frac{1}{(x-1)v}\Big[1-\Big(\frac{v}{1-v}\Big)+\Big(\frac{v}{1-v}\Big)^2-\dots+(-1)^{n-1}\Big(\frac{v}{1-v}\Big)^{n-1}\Big]$$
$$=\frac{1-v}{xv}\Big[\psi(x,y-1,v)+(-1)^{n-1}\Big(\frac{v}{1-v}\Big)^n\psi(x,y+n-1,v)\Big]$$
$$-\frac{1-v}{xv}\Big(1+(-1)^{n-1}\Big(\frac{v}{1-v}\Big)^n\Big);$$

unde, scribendo rursus $x+1$ pro x, $y+1$ pro y, eruitur

$$17.\quad \psi(x,y,v)-\left(\frac{v}{1-v}\right)\psi(x,y+1,v)+\left(\frac{v}{1-v}\right)^2\psi(x,y+2,v)\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\left(\frac{v}{1-v}\right)^{n-1}\psi(x,y+n-1,v)$$
$$=\frac{(1-v)x}{x+1}\left[\psi(x+1,y,v)+(-1)^{n-1}\left(\frac{v}{1-v}\right)^n\psi(x+1,y+n,v)\right]$$
$$+\frac{1-v}{x+1}\left(1+(-1)^{n-1}\left(\frac{v}{1-v}\right)^n\right).$$

10. Hinc habetur pro $n=1$,

$$(D.)\quad \psi(x,y,v)=\frac{(1-v)x}{x+1}\left[\psi(x+1,y,v)+\frac{v}{1-v}\psi(x+1,y+1,v)\right]+\frac{1}{x+1}.$$

Quod quum ex (7.) sit $v\psi(x+1,y+1,v)=\frac{y}{x}\psi(x,y,v)-\frac{y}{x}$, ex (*D.*) prodit

$$\psi(x,y,v)=\frac{(1-v)x}{x+1}\psi(x+1,y,v)+\frac{y}{x+1}\psi(x,y,v)-\frac{y-1}{x+1},$$

unde deducitur

$$18.\quad \psi(x+1,y,v)=\frac{x+1-y}{(1-v)x}\psi(x,y,v)+\frac{y-1}{(1-v)x}.$$

Hinc generaliter, si m numerum positivum integrum exhibet, derivatur

$$19.\quad \psi(x+m,y,v)=(y-1)\left[\frac{1}{(x+m-1)(1-v)}+\frac{x-y+m}{(x+m-1)(x+m-2)(1-v)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(x-y+m)(x-y+m-1)}{(x+m-1)(x+m-2)(x+m-3)(1-v)^3}+\ldots+\frac{(x-y+m)(x-y+m-1)\ldots(x-y+2)}{(x+m-1)(x+m-2)\ldots x(1-v)^m}\right]$$
$$+\frac{(x-y+m)(x-y+m-1)\ldots(x-y+1)}{(x+m-1)(x+m-2)\ldots x(1-v)^m}\psi(x,y,v).$$

Deinde posito in aequatione (*D.*) secundum (7.)

$$\psi(x,y,v)=1+\frac{x}{y}v\psi(x+1,y+1,v),$$

et scribendo $x-1$ loco x, obtinetur

$$1+\frac{x-1}{y}v\psi(x,y+1,v)=\frac{(1-v)(x-1)}{x}\psi(x,y,v)+\frac{v(x-1)}{x}\psi(x,y+1,v)+\frac{1}{x},$$

unde sequitur

$$20.\quad \psi(x,y+1,v)=\frac{(1-v)y}{v(x-y)}\psi(x,y,v)-\frac{y}{v(x-y)}.$$

Hinc deducitur pro quovis valore positivo integro ipsius m:

$$21.\quad (x,y+m,v) = -\frac{1}{v}\Big[\frac{(y+m-1)}{(x-y-m+1)}+\frac{(y+m-1)(y+m-2)}{(x-y-m+1)(x-y-m+2)}\Big(\frac{1-v}{v}\Big)$$
$$+\frac{(y+m-1)(y+m-2)(y+m-3)}{(x-y-m+1)(x-y-m+2)(x-y-m+3)}\Big(\frac{1-v}{v}\Big)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(y+m-1)(y+m-2)\ldots y}{(x-y-m+1)(x-y-m+2)\ldots(x-y)}\Big(\frac{1-v}{v}\Big)^{m-1}\Big]$$
$$+\frac{(y+m-1)(y+m-2)\ldots y}{(x-y-m+1)(x-y-m+2)\ldots(x-y)}\Big(\frac{1-v}{v}\Big)^m\psi(x,y,v).$$

11. Si aut k numerus positivus integer est, aut $\varrho \overline{\gtrless} 1$, habetur, denotantibus k_1, k_2, k_3, ... coëfficientes binomiales potestatis k,

$$\int\frac{\varrho^{y-2}d\varrho}{(1\pm\varrho)^{x-k}}=\int\frac{\varrho^{y-2}d\varrho}{(1\pm\varrho)^x}(1\pm\varrho)^k=\int\frac{\varrho^{y-2}d\varrho}{(1\pm\varrho)^x}(1\pm k_1\varrho+k_2\varrho^2\pm k_3\varrho^3+\text{etc.})$$
$$=\int\frac{\varrho^{y-2}d\varrho}{(1\pm\varrho)^x}\pm k_1\int\frac{\varrho^{y-1}d\varrho}{(1\pm\varrho)^x}+k_2\int\frac{\varrho^{y}d\varrho}{(1\pm\varrho)^x}\pm k_3\int\frac{\varrho^{y+1}d\varrho}{(1\pm\varrho)^x}+\text{etc.};$$

itaque ex (9. et 11.) est

$$\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1\pm\varrho)^{x-k}}\psi\Big(x-k,y,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\Big)$$
$$=\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1\pm\varrho)^x}\psi\Big(x,y,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\Big)\pm k_1\frac{\varrho^y}{y(1\pm\varrho)^x}\psi\Big(x,y+1,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\Big)$$
$$+k_2\frac{\varrho^{y+1}}{(y+1)(1\pm\varrho)^x}\psi\Big(x,y+2,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\Big)\pm k_3\frac{\varrho^{y+2}}{(y+2)(1\pm\varrho)^x}\psi\Big(x,y+3,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\Big)+\text{etc.},$$
$$+C$$

ubi C a ϱ non pendet; et hinc

$$\frac{(1\pm\varrho)^k}{(y-1)}\psi\Big(x-k,y,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\Big)$$
$$=\frac{1}{y-1}\psi\Big(x,y,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\Big)\pm k_1\frac{\varrho}{y}\psi\Big(x,y+1,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\Big)+k_2\frac{\varrho^2}{y+1}\psi\Big(x,y+2,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\Big)$$
$$\pm k_3\frac{\varrho^3}{y+2}\psi\Big(x,y+3,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\Big)+\text{etc.}$$
$$+\frac{(1\pm\varrho)^x}{\varrho^{y-1}}C.$$

Ex quibus relationibus eadem, qua antea usi sumus, ratione demonstratur esse $C=0$. Itaque, posito $\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}=v$, obtinetur

$$22.\quad \frac{1}{(1-v)^k(y-1)}\psi(x-k,y,v)$$
$$=\frac{1}{y-1}\psi(x,y,v)+k_1\frac{\left(\frac{v}{1-v}\right)}{y}\psi(x,y+1,v)+k_2\frac{\left(\frac{v}{1-v}\right)^2}{y+1}\psi(x,y+2,v)$$
$$+k_3\frac{\left(\frac{v}{1-v}\right)^3}{y+2}\psi(x,y+3,v)+\text{etc.},$$

ubi aut k positivus integer est, aut est v. n. $\left(\frac{v}{1-v}\right)\overline{\leqq}1$.

Ex qua relatione, ponendo 0 loco x et x loco $-k$, ob $\psi(0,y,v)=1$, prodit haec relatio:

$$23.\quad \psi(x,y,v)=\frac{y-1}{(1-v)^x}\Big[\frac{1}{y-1}-\frac{x}{1.y}\left(\frac{v}{1-v}\right)+\frac{x(x+1)}{1.2.(y+1)}\left(\frac{v}{1-v}\right)^2$$
$$-\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3.(y+2)}\left(\frac{v}{1-v}\right)^3+\text{etc.}\Big].$$

Sic series, signo ψ repraesentata, in aliam seriem certis casibus magis convergentem transformata est.

12. Posito

$$V=\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{(1-\alpha)^x}=\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y-x-2}d\alpha}{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^x},$$

si statuitur $\frac{1}{\alpha}-1=\beta$, est

$$V=\int_{\frac{1}{\varrho}-1}^\infty\frac{(1+\beta)^{x-y}d\beta}{\beta^x}=\int_0^\infty\frac{\beta^{-x}d\beta}{(1+\beta)^{y-x}}-\int_0^{\frac{1}{\varrho}-1}\frac{\beta^{-x}d\beta}{(1+\beta)^{y-x}}.$$

At constat esse

$$\int_0^\infty\frac{\beta^{-x}d\beta}{(1+\beta)^{y-x}}=\frac{\Gamma(1-x)\Gamma(y-1)}{\Gamma(y-x)}.$$

Quapropter eruitur

$$\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{(1-\alpha)^x}+\int_0^{\frac{1}{\varrho}-1}\frac{\beta^{-x}d\beta}{(1+\beta)^{y-x}}=\frac{\Gamma(1-x)\Gamma(y-1)}{\Gamma(y-x)},$$
$$(x<1,\ y>1)$$

atque per (10. et 12.),

$$\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1-\varrho)^x}\psi\left(x,y,\frac{-\varrho}{1-\varrho}\right)+\frac{(1-\varrho)^{-x+1}\varrho^{y-x}}{(-x+1)\varrho^{-x+1}}\psi(y-x,-x+2,1-\varrho)$$
$$=\frac{\Gamma(1-x)\Gamma(y-1)}{\Gamma(y-x)},$$
$$(x<1,\ y>1)$$

unde, posito $1-\varrho=v$, deducitur

$$(E.)\quad \frac{1}{y-1}\psi\left(x,y,-\left(\frac{1}{v}-1\right)\right)+\frac{v}{1-x}\psi(y-x,-x+2,v)$$
$$=\frac{v^x}{(1-v)^{y-1}}\cdot\frac{\Gamma(1-x)\Gamma(y-1)}{\Gamma(y-x)}.$$
$$(x<1,\ y>1,\ v\gtreqless\tfrac{1}{2})$$

Quodsi significatio functionis Γ ita amplificatur, ut generaliter, quaecunque sit λ quantitas, habeatur $\Gamma(1+\lambda)=\Pi(\lambda)$, notante $\Pi(\lambda)$ functionem illam *Gaussianam* $\Pi(\lambda)=\lim\limits^{n=\infty}\left(n^\lambda\frac{1.2.3\ldots n}{(1+\lambda)(2+\lambda)(3+\lambda)\ldots(n+\lambda)}\right)$, aequatio (*E.*) generaliter pro quovis valore quantitatum x, y valebit. Quam quidem rem ratione simillima methodo, quae vocatur *Kaestneriana*, probare licet. Primum ostendatur, si aequatio pro $x=x$ valeat, eam etiam pro $x=x+1$ locum habere. Jam ex (18.) colligitur esse:

$$\psi\left(x,y,-\left(\frac{1}{v}-1\right)\right)=\frac{x}{v(x+1-y)}\psi\left(x+1,y,-\left(\frac{1}{v}-1\right)\right)-\frac{y-1}{x+1-y},$$

et ex (7.)

$$\psi(y-x,-x+2,v)=\frac{1-x}{(y-x-1)v}\psi(y-x-1,-x+1,v)-\frac{1-x}{(y-x-1)v}.$$

Quibus valoribus in (*E.*) substitutis, invenitur

$$\frac{x}{(y-1)v(x+1-y)}\psi\left(x+1,y,-\left(\frac{1}{v}-1\right)\right)-\frac{1}{x+1-y}\psi(y-x-1,-x+1,v)$$
$$=\frac{v^x}{(1-v)^{y-1}}\cdot\frac{\Gamma(1-x)\Gamma(y-1)}{\Gamma(y-x)},$$

et hinc

$$\frac{1}{y-1}\psi\left(x+1,y,-\left(\frac{1}{v}-1\right)\right)+\frac{v}{-x}\psi(y-x-1,-x+1,v)$$
$$=\frac{v^{x+1}(x+1-y)}{(1-v)^{y-1}x}\cdot\frac{\Gamma(1-x)\Gamma(y-1)}{\Gamma(y-x)};$$

et est

$$\frac{\Gamma(1-x)}{x}=\frac{-x\Gamma(-x)}{x}=-\Gamma(-x),$$
$$\frac{x+1-y}{\Gamma(y-x)}=\frac{x+1-y}{(y-x-1)\Gamma(y-x-1)}=-\frac{1}{\Gamma(y-x-1)};$$

ergo erit

$$\frac{1}{y-1}\psi\left(x+1,y,-\left(\frac{1}{v}-1\right)\right)+\frac{v}{-x}\psi(y-x-1,-x+1,v)$$
$$=\frac{v^{x+1}}{(1-v)^{y-1}}\cdot\frac{\Gamma(-x)\Gamma(y-1)}{\Gamma(y-x-1)}.$$

Hinc cernitur, si aequatio (*E.*) pro $x=x$ locum habeat, eam etiam pro $x=x+1$ valere. At valet revera, si $x<1$; ergo etiam valebit, si $x<2$, ideoque etiam, si $x<3$, etc. Quo fit, ut aequatio (*E.*) pro quovis valore ipsius x valeat, dummodo sit $y>1$.

Jam demonstretur, si (*E.*) pro $y=y$ vera sit, eam etiam pro $y=y-1$ veram esse. Ex (20.) autem patet esse

$$\psi\left(x, y, -\left(\tfrac{1}{v}-1\right)\right)$$
$$= -\frac{y-1}{(1-v)(x-y+1)}\psi\left(x, y-1, -\left(\tfrac{1}{v}-1\right)\right)+\frac{v(y-1)}{(1-v)(x-y+1)},$$

et ex (18.)

$$\psi(y-x, -x+2, v)$$
$$= \frac{y-2}{(1-v)(y-1-x)}\psi(y-1-x, -x+2, v)+\frac{-x+1}{(1-v)(y-1-x)};$$

unde aequatio (*E.*) mutatur in hanc:

$$-\frac{1}{(1-v)(x-y+1)}\psi\left(x, y-1, -\left(\tfrac{1}{v}-1\right)\right)$$
$$+\frac{v(y-2)}{(1-v)(1-x)(y-1-x)}\psi(y-1-x, -x+2, v)$$
$$= \frac{v^x}{(1-v)^{y-1}}\cdot\frac{\Gamma(1-x)\Gamma(y-1)}{\Gamma(y-x)},$$

et hinc

$$\frac{1}{y-2}\psi\left(x, y-1, -\left(\tfrac{1}{v}-1\right)\right)+\frac{v}{1-x}\psi(y-1-x, -x+2, v)$$
$$= \frac{v^x(y-1-x)}{(1-v)^{y-2}(y-2)}\cdot\frac{\Gamma(1-x)\Gamma(y-1)}{\Gamma(y-x)} = \frac{v^x}{(1-v)^{y-1}}\cdot\frac{\Gamma(1-x)\Gamma(y-2)}{\Gamma(y-1-x)}.$$

Hinc colligitur, si (*E.*) pro $y=y$ existat, eam etiam pro $y=y-1$ valere; itaque, quum pro $y>1$ locum habeat, valebit etiam pro $y>0$, ideoque pro $y>-1$, etc.

Ex quibus elucet, pro quovis valore quantitatum x, y, haberi hanc aequationem:

24. $$\frac{1}{y-1}\psi\left(x, y, -\left(\tfrac{1}{v}-1\right)\right)+\frac{v}{1-x}\psi(y-x, -x+2, v)$$
$$= \frac{v^x}{(1-v)^{y-1}}\cdot\frac{\Gamma(1-x)\Gamma(y-1)}{\Gamma(y-x)}.$$
$$(v \overline{\gtrless} \tfrac{1}{2})$$

13. Habetur

$$\int_0^{\varrho}\frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{(1+\alpha)^x}=\int_0^{\varrho}\frac{\alpha^{y-x-2}d\alpha}{\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^x}\ \left(\text{posito } \frac{1}{\alpha}=\beta\right)$$

$$=\int_{\frac{1}{\varrho}}^{\infty}\frac{\beta^{x-y}d\beta}{(1+\beta)^x}=\int_0^{\infty}\frac{\beta^{x-y}d\beta}{(1+\beta)^x}-\int_0^{\frac{1}{\varrho}}\frac{\beta^{x-y}d\beta}{(1+\beta)^x},$$

unde, ob

$$\int_0^{\infty}\frac{\beta^{x-y}d\beta}{(1+\beta)^x}=\frac{\Gamma(x-y+1)\Gamma(y-1)}{\Gamma(x)},$$
$$(y>1,\ x>y-1)$$

sequitur

$$\int_0^{\varrho}\frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{(1+\alpha)^x}+\int_0^{\frac{1}{\varrho}}\frac{\beta^{x-y}d\beta}{(1+\beta)^x}=\frac{\Gamma(x-y+1)\Gamma(y-1)}{\Gamma(x)}.$$
$$(y>1,\ x>y-1)$$

Proinde secundum (10.) est:

$$\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1+\varrho)^x}\psi\left(x,y,\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)+\frac{\varrho^{y-1}}{(x-y+1)(1+\varrho)^x}\psi\left(x,x-y+2,\frac{1}{1+\varrho}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(x-y+1)\Gamma(y-1)}{\Gamma(x)};$$

hinc, posito $\frac{\varrho}{1+\varrho}=v$, deducitur

$$25.\qquad \frac{1}{y-1}\psi(x,y,v)+\frac{1}{x-y+1}\psi(x,x-y+2,1-v)$$
$$=\frac{1}{v^{y-1}(1-v)^{x-y+1}}\cdot\frac{\Gamma(x-y+1)\Gamma(y-1)}{\Gamma(x)}.$$
$$(v>0)$$

Quae relatio valet, si est $y>1$, $x>y-1$, sive $y-x<1$; attamen eadem ratione, qua antea usi sumus, ex relationibus (18. et 7.) demonstratur, eam generaliter locum habere.

14. Est

$$\int_0^{\infty}\frac{\beta^{y-x-1}(1+\beta)^{-y+1}d\beta}{1-v+\beta}=\int_0^{\infty}\frac{\beta^{-x}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{-y+1}d\beta}{1-v+\beta}\ \left(\text{posito } \frac{1}{\beta}=\alpha\right)$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{\alpha^{x-2}(1+\alpha)^{-y+1}d\alpha}{1-v+\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{1-v}\int_0^{\infty}\frac{\alpha^{x-1}(1+\alpha)^{-y+1}d\alpha}{1+\frac{v}{1-v}+\alpha}.$$

Itaque ex (15.) habetur

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y-x)}{\Gamma(y)}\psi(x,y,v) = \frac{1}{1-v}\cdot\frac{\Gamma(y-x)\Gamma(x)}{\Gamma(y)}\psi\left(y-x,y,\frac{-v}{1-v}\right),$$
$$(x>0,\ y>x)$$

sive

$$26.\quad \psi(x,y,v) = \frac{1}{1-v}\psi\left(y-x,y,\frac{-v}{1-v}\right),$$

quam relationem etiam generaliter pro quovis valore quantitatum x, y locum habere, facile potest demonstrari.

15. Si in aequatione (25.) statuitur $v=\frac{1}{2}$, obtinetur

$$27.\quad \frac{1}{y-1}\psi(x,y,\tfrac{1}{2})+\frac{1}{x-y+1}\psi(x,x-y+2,\tfrac{1}{2}) = 2^x\frac{\Gamma(x-y+1)\Gamma(y-1)}{\Gamma(x)}.$$

Hinc, posito $x-y+2=y$, sive $x=2y-2$, sequitur

$$\frac{2}{y-1}\psi(2y-2,y,\tfrac{1}{2}) = 2^{2y-2}\frac{\Gamma(y-1)\Gamma(y-1)}{\Gamma(2y-2)},$$

unde, scribendo $y+1$ loco y derivatur

$$28.\quad \psi(2y,y+1,\tfrac{1}{2}) = 2^{2y-1}\frac{y\Gamma(y)\Gamma(y)}{\Gamma(2y)},$$

h. e. facto $\lambda(y)=\psi(2y,y+1,\frac{1}{2})$,

$$29.\quad \lambda(y) = 1+\frac{2y}{2y+2}+\frac{2y(2y+1)}{(2y+2)(2y+4)}+\frac{2y(2y+1)(2y+2)}{(2y+2)(2y+4)(2y+6)}+\text{etc.}$$
$$= \frac{2^{2y-1}y\Gamma(y)\Gamma(y)}{\Gamma(2y)}.$$

Hinc adhibitis relationibus, quae inter functiones Γ intercedunt, aliae relationes deducuntur.

Sic, si r numerum positivum integrum indicat, habetur

$$29\,a.\quad \lambda(r) = 1+\frac{2r}{2r+2}+\frac{2r(2r+1)}{(2r+2)(2r+4)}+\frac{2r(2r+1)(2r+2)}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}+\text{etc.}$$
$$= \frac{1.2.3\dots(r-1)}{(r+1)(r+2)(r+3)\dots(2r-1)2r}\cdot 2^{2r-1}.$$

Deinde, ob relationem $\Gamma\left(\frac{2r+1}{2}\right)=\frac{2r-1}{2}\cdot\frac{2r-3}{2}\dots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, obtinetur

$$29\,b.\quad \lambda\left(\frac{2r+1}{2}\right)=1+\frac{2r+1}{2r+3}+\frac{(2r+1)(2r+2)}{(2r+3)(2r+5)}+\frac{(2r+1)(2r+2)(2r+3)}{(2r+3)(2r+5)(2r+7)}+\text{etc.}$$
$$= \frac{3.5.7\dots(2r+1)}{2.4.6\dots(2r)}\cdot\tfrac{1}{2}\pi.$$

Porro facile hae relationes probantur:

$$29\,c.\qquad \lambda(y)\cdot\lambda(-y) = \frac{y\pi}{\tang(y\pi)},$$

$$29\,d.\quad \lambda(y)\cdot\lambda\Big(\frac{1}{2m}+y\Big)\cdot\lambda\Big(\frac{2}{2m}+y\Big)\dots\lambda\Big(\frac{2m-1}{2m}+y\Big)=(2my+m)^{m\,11}\Big(\frac{\pi}{2m}\Big)^m,$$

ubi m numerum integrum exhibet.

Quod quum, denotantibus r, s numeros quoslibet integros positivos aut negativos, $\psi(2y+r, y+s, \frac{1}{2})$ per aequationes (19. et 21.) ad $\psi(2y, y+1, \frac{1}{2})$ reduci possit, etiam $\psi(2y+r, y+s, \frac{1}{2})$ sive

$$1+\frac{2y+r}{2y+2s}+\frac{(2y+r)(2y+r+1)}{(2y+2s)(2y+2s+2)}+\frac{(2y+r)(2y+r+1)(2y+r+2)}{(2y+2r)(2y+2s+2)(2y+2s+4)}+\text{etc.}$$

ope aequationis (28.) per functiones Γ exprimi potest.

Denique etiam ex (27.) alias relationes derivare licet. Sic pro $x=1$, invenitur:

$$30.\qquad \frac{1}{y-1}\psi(1, y, \tfrac{1}{2})+\frac{1}{2-y}\psi(1, 3-y, \tfrac{1}{2}) = -\frac{2\pi}{\sin(y\pi)}.$$

16. Ponendo in aequatione (26.) $v=\frac{1}{2}$, prodit

$$31.\qquad \psi(x, y, \tfrac{1}{2}) = 2\psi(y-x, y, -1).$$

Quo circa (27.) mutatur in

$$32.\quad \frac{1}{y-1}\psi(x, y, -1)+\frac{1}{1-x}\psi(2-y, 2-x, -1)=\frac{2^{y-x-1}\Gamma(y-1)\Gamma(1-x)}{\Gamma(y-x)}.$$

Haec autem relatio immediate ex relatione (12.) deduci potest. Posito enim $1-\alpha=\beta$, obtinetur

$$\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y-2}\,d\alpha}{(1-\alpha)^x}=\int_{1-\varrho}^1\frac{\beta^{-x}\,d\beta}{(1-\beta)^{-y+2}}=\int_0^1\frac{\beta^{-x}\,d\beta}{(1-\beta)^{-y+2}}-\int_0^{1-\varrho}\frac{\beta^{-x}\,d\beta}{(1-\beta)^{-y+2}};$$

unde sequitur

$$\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y-2}\,d\alpha}{(1-\alpha)^x}+\int_0^{1-\varrho}\frac{\beta^{-x}\,d\beta}{(1-\beta)^{-y+2}} = \frac{\Gamma(1-x)\,\Gamma(y-1)}{\Gamma(y-x)},$$

quae relatio, ponendo $\varrho=\frac{1}{2}$, secundum (12.) aequationem (32.) praebet.

Quodsi in (32.) statuitur $y=2-x$, scribendo $y+1$ loco y, facile invenitur

$$33.\qquad \psi(1-y, 1+y, -1) = \frac{2^{2y-2}y\,\Gamma(y)\,\Gamma(y)}{\Gamma(2y)},$$

h. e., posito $k(y)=\psi(1-y, 1+y, -1)$,

$$34.\quad k(y)=1+\frac{y-1}{y+1}+\frac{(y-1)(y-2)}{(y+1)(y+2)}+\frac{(y-1)(y-2)(y-3)}{(y+1)(y+2)(y+3)}+\text{etc.}=\frac{2^{2y-2}\Gamma(y)\,\Gamma(y)}{\Gamma(2y)}.$$

Hinc facile derivantur aequationes, in quibus r et m numeros integros exhibent:

34 a. $$k(r) = 1+\frac{r-1}{r+1}+\frac{(r-1)(r-2)}{(r+1)(r+2)}+\dots+\frac{(r-1)(r-2)\dots 2.1}{(r+1)(r+2)\dots(2r-2)(2r-1)}$$
$$= \frac{1.2.3\dots(r-1)}{(r+1)(r+2)(r+3)\dots(2r-1)}2^{2r-2},$$

34 b. $$k\left(\frac{2r+1}{2}\right)= 1+\frac{2r-1}{2r+3}+\frac{(2r-1)(2r-3)}{(2r+3)(2r+5)}+\frac{(2r-1)(2r-3)(2r-5)}{(2r+3)(2r+5)(2r+7)}+\text{etc.}$$
$$= \frac{3.5.7\dots(2r+1)}{2.4.6\dots 2r}\cdot\tfrac{1}{4}\pi,$$

unde pro $r=0$, ut facile perspicitur, series *Leibnitziana* prodit
$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\dots = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Haec autem aequatio (34 b.) facile mutatur in hanc:
$$\frac{1}{1.3.5\dots(2r-1).1.3.5\dots(2r+1)}+\frac{1}{1.3\dots(2r-3).1.3\dots(2r+3)}+\frac{1}{1.3\dots(2r-5).1.3\dots(2r+5)}$$
$$+\dots+\frac{1}{1.1.3\dots(4r-1)}+\frac{1}{1.3\dots(4r+1)}-\frac{1}{3.5\dots(4r+3)}+\frac{1}{5.7\dots(4r+5)}-\text{etc.}$$
$$=\frac{1}{1.2.3\dots(2r)}\cdot\tfrac{1}{4}\pi;$$

34 c. $$k(y)k(1-y) = \frac{y(1-y)\pi}{2(1-2y)\tan(y\pi)},$$

34 d. $$k(y).k\left(\frac{1}{2m}+y\right).k\left(\frac{2}{2m}+y\right)\dots k\left(\frac{2m-1}{2m}+y\right)=(2my+m)^{m+1}\left(\frac{\pi}{8m}\right)^m.$$

Ex (32.), ponendo $y=x+1$, sequitur

35. $$\frac{1}{x}\psi(x,x+1,-1)+\frac{1}{1-x}\psi(1-x,2-x,-1) = \frac{\pi}{\sin(x\pi)}.$$

17. Jam accuratius perpendamus functionem $\psi(x,y,v)$ eo casu, ubi est $x=1$. Secundum relationes (10. et 12.) autem habetur:

(F.) $$\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{1\pm\alpha} = \frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1\pm\varrho)}\cdot\psi\left(1,y,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right).$$
$$(y>1)$$

Denotante m numerum integrum
$$V=\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{1\pm\alpha}\left[1\mp\alpha^{\frac{1}{m}}+\alpha^{\frac{2}{m}}\mp\alpha^{\frac{3}{m}}+\dots+\frac{(-1)^{m-1}}{+}\alpha^{\frac{m-1}{m}}\right]$$
$$=\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{1\pm\alpha}\mp\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y+\frac{1}{m}-2}d\alpha}{1\pm\alpha}+\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y+\frac{2}{m}-2}d\alpha}{1\pm\alpha}\mp\dots+\frac{(-1)^{m-1}}{+}\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y+\frac{m-1}{m}-2}d\alpha}{1\pm\alpha}$$
$$=\int_0^\varrho\frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{1\pm\alpha}\cdot\frac{1-\frac{(-1)^m}{+}\alpha}{1\pm\alpha^{\frac{1}{m}}}.$$

Itaque, si aut signum inferius valet, aut si m numerum imparem exhibet, erit

$$V=\int_0^{\varrho}\frac{\alpha^{y-2}\,d\alpha}{1\pm\alpha^{\frac{1}{m}}}.$$

Jam statuendo $\alpha^{\frac{1}{m}}=\beta$, aequatio transit in

$$V=m\int_0^{\varrho^{\frac{1}{m}}}\frac{\beta^{my-m-1}\,d\beta}{1\pm\beta}.$$

Itaque, ex relatione antecedente (*F.*), functionibus ψ introducendis, eruitur aequatio:

$$\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1\pm\varrho)}\psi\left(1,y,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)\mp\frac{\varrho^{y+\frac{1}{m}-1}}{\left(y+\frac{1}{m}-1\right)(1\pm\varrho)}\psi\left(1,y+\frac{1}{m},\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)$$

$$+\frac{\varrho^{y+\frac{2}{m}-1}}{\left(y+\frac{2}{m}-1\right)(1\pm\varrho)}\psi\left(1,y+\frac{2}{m},\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)\mp\dots$$

$$\dots+\frac{\varrho^{y+\frac{m-1}{m}-1}}{\left(y+\frac{m-1}{m}-1\right)(1\pm\varrho)}\psi\left(1,y+\frac{m-1}{m},\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right)$$

$$=\frac{m\left(\varrho^{\frac{1}{m}}\right)^{my-m}}{my-m\left(1\pm\varrho^{\frac{1}{m}}\right)}\psi\left(1,my-m+1,\frac{\pm\varrho^{\frac{1}{m}}}{1\pm\varrho^{\frac{1}{m}}}\right),$$

hincque, posito simul $\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}=v$, prodit

$$36.\quad \frac{1}{y-1}\psi(1,y,v)+\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}}{y+\frac{1}{m}-1}\psi\left(1,y+\frac{1}{m},v\right)+\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{2}{m}}}{y+\frac{2}{m}-1}\psi\left(1,y+\frac{2}{m},v\right)+\dots$$

$$+\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{y+\frac{m-1}{m}-1}\psi\left(1,y+\frac{m-1}{m},v\right)$$

$$=\frac{1}{(y-1)(1-v)\left(1-\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}\right)}\psi\left(1,my-m+1,\frac{-\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}}{1-\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}}\right),$$

in qua aequatione, si v positivum est, m numerum imparem indicat, si autem v negativum est, m numerum quemlibet integrum exhibet. Sed haec relatio adhuc conditione $y>1$ adstricta est. Per aequationes (20. et 21.) autem (36.) facile mutatur in hanc aequationem:

$$\frac{1-v}{-v(y-2)}\psi(1,y-1,v)+\frac{1-v}{-v}\cdot\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}}{y+\frac{1}{m}-2}\psi\left(1,y-1+\frac{1}{m},v\right)$$

$$+\frac{1-v}{-v}\cdot\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{2}{m}}}{y+\frac{2}{m}-2}\psi\left(1,y-1+\frac{2}{m},v\right)+\ldots$$

$$+\frac{1-v}{-v}\cdot\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{y+\frac{m-1}{m}-2}\psi\left(1,y-1+\frac{m-1}{m},v\right)$$

$$+\frac{1}{v(y-2)}+\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}}{v\left(y+\frac{1}{m}-2\right)}+\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{2}{m}}}{v\left(y+\frac{2}{m}-2\right)}+\ldots+\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{v\left(y+\frac{m-1}{m}-2\right)}$$

$$=-\frac{1}{1-v}\left[\frac{1}{y-1-\frac{1}{m}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}}+\frac{1}{y-1-\frac{2}{m}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{2}{m}}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{y-1-\frac{m-1}{m}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{m-1}{m}}}+\frac{1}{y-2}\psi\left(1,1,\frac{-v}{1-v}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{-v(y-2)\left(1-\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}\right)}\psi\left(1,m(y-1)-m+1,\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}}{1-\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}}\right),$$

unde sequitur:

$$\frac{1}{y-2}\psi(1,y-1,v)+\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}}{y+\frac{1}{m}-2}\psi\left(1,y-1+\frac{1}{m},v\right)+\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{2}{m}}}{y+\frac{2}{m}-2}\psi\left(1,y-1+\frac{2}{m},v\right)$$

$$+\dots+\frac{\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{y+\frac{m-1}{m}-2}\psi\left(1,y-1+\frac{m-1}{m},v\right)$$

$$=\frac{1}{(y-2)(1-v)\left(1-\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}\right)}\psi\left(1,\, m(y-1)-m+1,\, \frac{-\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}}{1-\left(\frac{-v}{1-v}\right)^{\frac{1}{m}}}\right).$$

Hinc colligitur, si aequatio (36.) pro $y=y$ valeat, eam etiam pro $y=y-1$ locum habere. Ergo, quum revera valeat pro $y>1$, valebit etiam pro $y>0$, ideoque pro $y>-1$, etc. Unde cernitur, eam sine restrictione valere.

18. Sit in $\psi(1,y,v)$, $y=1+\frac{r}{s}$, indicante $\frac{r}{s}$ fractionem genuinam. Obtinetur

$$V=\int_0^{\varrho}\frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{1\pm\alpha}=\int_0^{\varrho}\frac{\alpha^{\frac{r}{s}-1}d\alpha}{1\pm\alpha},$$

et posito $\alpha=\beta^s$,

$$V=s\int_0^{\sqrt[s]{\varrho}}\frac{\beta^{r-1}d\beta}{1\pm\beta^s}.$$

Proinde, quum hujusmodi integrale per logarithmos et arcus circulares exprimi possit, secundum (*F.*), deducuntur hae relationes:

$$37.\quad \psi\left(1,\,1+\frac{r}{s},v\right)=\frac{2}{s(1-v)w^r}\begin{cases}0 & \text{(si } s \text{ par)}\\ \frac{1}{2}(-1)^{r-1}\log(1+w) & \text{(si } s \text{ impar)}\end{cases}$$

$$-\cos\frac{r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{\pi}{s}+w^2\right)}+\sin\frac{r\pi}{s}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{w\sin\frac{\pi}{s}}{1-w\cos\frac{\pi}{s}}\right)$$

$$-\cos\frac{3r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{3\pi}{s}+w^2\right)}+\sin\frac{3r\pi}{s}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{w\sin\frac{3\pi}{s}}{1-w\cos\frac{3\pi}{s}}\right)$$

$$-\cos\frac{5r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{5\pi}{s}+w^2\right)}+\sin\frac{5r\pi}{s}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{w\sin\frac{5\pi}{s}}{1-w\cos\frac{5\pi}{s}}\right)$$

. . . .

$$-\cos\frac{(s-\frac{1}{2})r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{(s-\frac{1}{2})\pi}{s}+w^2\right)}$$
$$+\sin\frac{(s-\frac{1}{2})r\pi}{s}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{w\sin\frac{(s-\frac{1}{2})\pi}{s}}{1-w\cos\frac{(s-\frac{1}{2})\pi}{s}}\right)\Bigg\},$$

$$\left(v>0,\ w=\sqrt{\frac{v}{1-v}}\right)$$

38. $$\psi\left(1,1+\frac{r}{s},-v\right)=\frac{2r}{s(1+v)w}\begin{cases}0 & \text{(si } s \text{ impar)}\\ -\frac{1}{2}l(1-w)+\frac{1}{2}l(1+w) & \text{(si } s \text{ par)}\end{cases}$$

$$-\cos\frac{2r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{2\pi}{s}+w^2\right)}+\sin\frac{2r\pi}{s}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{w\sin\frac{2\pi}{s}}{1-w\cos\frac{2\pi}{s}}\right)$$

$$-\cos\frac{4r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{4\pi}{s}+w^2\right)}+\sin\frac{4r\pi}{s}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{w\sin\frac{4\pi}{s}}{1-w\cos\frac{4\pi}{s}}\right)$$

$$-\cos\frac{6r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{6\pi}{s}+w^2\right)}+\sin\frac{6r\pi}{s}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{w\sin\frac{6\pi}{s}}{1-w\cos\frac{6\pi}{s}}\right)$$

. . . .

$$-\cos\frac{(s-\frac{1}{2})r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{(s-\frac{1}{2})\pi}{s}+w^2\right)}$$
$$+\sin\frac{(s-\frac{1}{2})r\pi}{s}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{w\sin\frac{(s-\frac{1}{2})\pi}{s}}{1-w\cos\frac{(s-\frac{1}{2})\pi}{s}}\right)\Bigg\},$$

$$\left(v>0,\ w=\sqrt{\frac{v}{1+v}}\right)$$

19. Nunc etiam $\psi(x,y,v)$ pro $x=y-1$ propius contemplemur. Est autem

$$\psi(y-1,y,\pm v)=1\pm\frac{y-1}{y}v+\frac{y-1}{y+1}v^2\pm\frac{y-1}{y+2}v^3+\text{etc.},$$

unde, si v positivum accipitur, sequitur

$$\psi(y-1, y, \pm v) = \frac{y-1}{v^{y-1}}\left(\frac{v^{y-1}}{y-1} \pm \frac{v^y}{y} + \frac{v^{y+1}}{y+1} \pm \frac{v^{y+2}}{y+2} + \text{etc.}\right).$$

At sponte patet, siquidem sit $y > 1$, esse

$$\frac{v^{y-1}}{y-1} \pm \frac{v^y}{y} + \frac{v^{y+1}}{y+1} \pm \frac{v^{y+2}}{y+2} + \text{etc.} = \int_0^v \frac{\alpha^{y-2}\,d\alpha}{1 \mp \alpha}.$$

Ergo eruitur

$$\psi(y-1, y, \pm v) = \frac{y-1}{v^{y-1}} \int_0^v \frac{\alpha^{y-2}\,d\alpha}{1 \mp \alpha},$$

sive

$$39.\quad \int_0^v \frac{\alpha^{y-2}\,d\alpha}{1 \pm \alpha} = \frac{v^{y-1}}{y-1}\,\psi(y-1, y, \mp v).$$

$$(y > 1,\ v > 0)$$

Hinc eadem ratione, qua (§. 17, 18) usi sumus, inveniuntur hae relationes:

$$40.\quad \frac{1}{y-1}\psi(y-1, y, v) + \frac{v^{\frac{1}{m}}}{y+\frac{1}{m}-1}\psi\left(y+\frac{1}{m}-1, y+\frac{1}{m}, v\right)$$

$$+ \frac{v^{\frac{2}{m}}}{y+\frac{2}{m}-1}\psi\left(y+\frac{2}{m}-1, y+\frac{2}{m}, v\right) + \dots$$

$$+ \frac{v^{\frac{m-1}{m}}}{y+\frac{m-1}{m}-1}\psi\left(y+\frac{m-1}{m}-1, y+\frac{m-1}{m}, v\right)$$

$$= \frac{1}{y-1}\psi(my-m, my-m+1, v),$$

ubi, si v positivus est, m quemlibet numerum integrum indicat, sin v negativus est, m numerum imparem exhibet;

$$41.\quad \psi\left(\frac{r}{s}, 1+\frac{r}{s}, v\right) = \frac{2r}{s w^r}\begin{cases} 0 & \text{(si } s \text{ impar)} \\ -\frac{1}{2}l(1-w) + \frac{1}{2}l(1+w) & \text{(si } s \text{ par)} \end{cases}$$

$$-\cos\frac{2r\pi}{s}\, l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{2\pi}{s}+w^2\right)} + \sin\frac{2r\pi}{s}\,\text{arc tang}\left(\frac{w\sin\frac{2\pi}{s}}{1-w\cos\frac{2\pi}{s}}\right)$$

$$-\cos\frac{4r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{4\pi}{s}+w^2\right)}+\sin\frac{4r\pi}{s}\,\text{arc tang}\left(\frac{w\sin\frac{4\pi}{s}}{1-w\cos\frac{4\pi}{s}}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\cos\frac{(s-\frac{1}{2})r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{(s-\frac{1}{2})r\pi}{s}+w^2\right)}$$
$$+\sin\frac{(s-\frac{1}{2})r\pi}{s}\,\text{arc tang}\left(\frac{w\sin\frac{(s-\frac{1}{2})\pi}{s}}{1-w\cos\frac{(s-\frac{1}{2})\pi}{s}}\right)\Bigg\},$$

$$(v>0,\ w=\sqrt[s]{v})$$

$$42.\quad \psi\left(\frac{r}{s},1+\frac{r}{s},-v\right)\begin{cases}0 & \text{(si } s \text{ par)}\\ \frac{(-1)^{r-1}}{2}\log(1+w) & \text{(si } s \text{ impar)}\end{cases}$$

$$-\cos\frac{r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{\pi}{s}+w^2\right)}+\sin\frac{r\pi}{s}\,\text{arc tang}\left(\frac{w\sin\frac{\pi}{s}}{1-w\cos\frac{\pi}{s}}\right)$$

$$-\cos\frac{3r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{3\pi}{s}+w^2\right)}+\sin\frac{3r\pi}{s}\,\text{arc tang}\left(\frac{w\sin\frac{3\pi}{s}}{1-w\cos\frac{3\pi}{s}}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\cos\frac{(s-\frac{1}{2})r\pi}{s}\,l\sqrt{\left(1-2w\cos\frac{(s-\frac{1}{2})\pi}{s}+w^2\right)}$$
$$+\sin\frac{(s-\frac{1}{2})r\pi}{s}\,\text{arc tang}\left(\frac{w\sin\frac{(s-\frac{1}{2})\pi}{s}}{1-w\cos\frac{(s-\frac{1}{2})\pi}{s}}\right)\Bigg\},$$

$$(v>0,\ w=\sqrt[s]{v})$$

ubi $\frac{r}{s}$ quamlibet fractionem genuinam indicat. Quae relationes etiam alio modo derivari possunt. Ex aequatione (26.) enim deducitur

$$\psi(y-1,y,v)=\frac{1}{1-v}\psi\left(1,y,\frac{-v}{1-v}\right),$$

quae quidem relatio valere nequit, nisi est $v \overline{\lessgtr} \frac{1}{2}$. Hinc ex aequationibus (36., 37. et 38.), factis substitutionibus, aequationes (40., 41. et 42.) sponte demanant.

20. Ill. *Gauss* pereleganter functionem $\psi(x, y, v)$ in fractionem continuam convertit (cf. Comm. Gott. rec. Vol. II., *Gauss* Disquisitiones generales circa seriem infinitam, § 13.). Liceat mihi, hanc formulam huc apponere:

Est

$$43. \quad \psi(x,y,v) = \cfrac{1}{1-\cfrac{av}{1-\cfrac{bv}{1-\cfrac{cv}{1-\cfrac{dv}{1-\text{etc.}}}}}}$$

ubi

$$a = \frac{x}{y}, \qquad b = \frac{y-x}{y(y+1)},$$

$$c = \frac{(x+1)y}{(y+1)(y+2)}, \qquad d = \frac{2(y+1-x)}{(y+2)(y+3)},$$

$$e = \frac{(x+2)(y+1)}{(y+3)(y+4)}, \qquad f = \frac{3(y+2-x)}{(y+4)(y+5)},$$

etc.

Jam ope hujus aequationis, secundum relationes supra erutas, alias expressiones in fractiones continuas convertere licet, quarum nonnullas hic evolvisse operae pretium erit.

Primum, adhibita aequatione (39.), ex relationibus (29. *b.* et 34. *b.*) deducuntur hae aequationes:

$$44. \quad \frac{3.5.7\ldots.(2r+1)}{2.4.6\ldots.(2r)}\cdot\tfrac{1}{2}\pi = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{(2r+1)(2r+1)}{(2r+1)(2r+3)}}{1+\cfrac{\frac{1(2r-1)}{(2r+3)(2r+5)}}{1+\cfrac{\frac{(2r+2)(2r+3)}{(2r+5)(2r+7)}}{1+\cfrac{\frac{2(2r-3)}{(2r+7)(2r+9)}}{1+\cfrac{\frac{(2r+3)(2r+5)}{(2r+9)(2r+11)}}{1+\cfrac{\frac{3(2r-5)}{(2r+11)(2r+13)}}{1-\text{etc.}}}}}}}}$$

$$45.\quad \frac{3.5.7\ldots.(2r+1)}{2.4.6\ldots.\ (2r)}\cdot\tfrac{1}{2}\pi = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{(2r-1)(2r+1)}{(2r+1)(2r+3)}}{1+\cfrac{\frac{2(4r+2)}{(2r+3)(2r+5)}}{1-\cfrac{\frac{(2r-3)(2r+3)}{(2r+5)(2r+7)}}{1+\cfrac{\frac{4(4r+4)}{(2r+7)(2r+9)}}{1-\cfrac{\frac{(2r-5)(2r+5)}{(2r+9)(2r+11)}}{1+\text{etc.}}}}}}}$$

Quae aequationes pro $r=0$ dant:

$$46.\quad \tfrac{1}{2}\pi = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{1\cdot1}{1\cdot3}}{1-\cfrac{\frac{1\cdot1}{3\cdot5}}{1-\cfrac{\frac{2\cdot3}{5\cdot7}}{1-\cfrac{\frac{2\cdot3}{7\cdot9}}{1-\cfrac{\frac{3\cdot5}{9\cdot11}}{1-\cfrac{\frac{3\cdot5}{11\cdot13}}{1+\text{etc.}}}}}}}}$$

$$47.\quad \tfrac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1\cdot1}{1\cdot3}}{1+\cfrac{\frac{2\cdot2}{3\cdot5}}{1+\cfrac{\frac{3\cdot3}{5\cdot7}}{1+\cfrac{\frac{4\cdot4}{7\cdot9}}{1+\text{etc.}}}}}}$$

Deinde ex (30. et 35.) demanant hae aequationes:

$$48.\quad \frac{2\pi}{\sin(\gamma\pi)} = \cfrac{\frac{1}{\gamma-2}}{1+\cfrac{\frac{1(\gamma-2)}{2(\gamma-2)(\gamma-3)}}{1+\cfrac{\frac{1(\gamma-2)}{2(\gamma-3)(\gamma-4)}}{1+\cfrac{\frac{2(\gamma-3)}{2(\gamma-4)(\gamma-5)}}{1+\cfrac{\frac{2(\gamma-3)}{2(\gamma-5)(\gamma-6)}}{1+\cfrac{\frac{3(\gamma-4)}{2(\gamma-6)(\gamma-7)}}{1+\text{etc.}}}}}}} - \cfrac{\frac{1}{\gamma-1}}{1-\cfrac{\frac{1(\gamma-1)}{2(\gamma-1)\gamma}}{1-\cfrac{\frac{1(\gamma-1)}{2\gamma(\gamma+1)}}{1-\cfrac{\frac{2\gamma}{2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1-\cfrac{\frac{2\gamma}{2(\gamma+2)(\gamma+3)}}{1-\cfrac{\frac{3(\gamma+1)}{2(\gamma+3)(\gamma+4)}}{1-\text{etc.}}}}}}}$$

49. $$\frac{\pi}{\sin(x\pi)} = \cfrac{\frac{1}{x}}{x\cdot x\,\overline{1+\cfrac{x(x+1)}{1\cdot 1\,\overline{1+\cfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+1)\,\overline{1+\cfrac{(x+2)(x+3)}{2\cdot 2\,\overline{1+\cfrac{(x+3)(x+4)}{(x+2)(x+2)\,\overline{1+\cfrac{(x+4)(x+5)}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}} - \cfrac{\frac{1}{x-1}}{(x-1)(x-1)\,\overline{1+\cfrac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 1\,\overline{1+\cfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-2)\,\overline{1+\cfrac{(x-3)(x-4)}{2\cdot 2\,\overline{1+\cfrac{(x-4)(x-5)}{(x-3)(x-3)\,\overline{1+\cfrac{(x-5)(x-6)}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}}$$

Atque eodem modo etiam $\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2\gamma)}$ per (28. et 33.) in fractionem continuam, et $\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ sive $\int_0^1 \lambda^{p-1}(1-\lambda)^{q-1}d\lambda$ variis modis secundum (27. et 32.), vel (24. et 25.) in binas fractiones continuas evolvi potest.

21. Nunc non alienum videtur, casus speciales enumerare, ubi $\psi(x,y,v)$ algebraice aut per functiones notas exhiberi possit. Ex relationibus allatis autem facile intelligitur:

1) pro $v=0$, esse $\psi(x,y,v)=1$ secundum (3.);

2) pro $v=1$, esse $\psi(x,y,v)=\frac{y-1}{y-x-1}$ secundum (2.);

3) si $v=\frac{1}{2}$, $\psi(x,y,v)$ per functionem Γ exprimi posse, dummodo sit $2y-x$ aut 0 aut numerus quilibet integer vel positivus vel negativus, secundum relationes (28., 19. et 21.);

4) si $v=-1$, $\psi(x,y,v)$ per functionem Γ exhiberi posse, dummodo $x+y$ aut 0 aut numerum quemlibet integrum vel positivum vel negativum praebeat, secundum aequationes (33., 19. et 21.);

5) si x zyphrae aut numero cuilibet integro negativo aequetur, $\psi(x,y,v)$ algebraice dari per (4);

6) si x numerum integrum positivum indicet, $\psi(x,y,v)$ per logarithmos et arcus circulares exprimi posse, si modo y rationalis sit, secundum aequationes (37., 38., 19. et 21.);

7) si y numerus positivus integer sit, $\psi(x,y,v)$ algebraice dari posse per aequationes (5. et 21.);

8) si $x-y$ aut zyphrae aut numero negativo integro aequalis sit, $\psi(x,y,v)$ algebraice exhiberi posse per aequationes (6., 19. et 21.);

9) si $x-y$ numerum positivum integrum praebeat, $\psi(x,y,v)$ per logarithmos et arcus circulares exprimi posse, dummodo y rationalis sit, secundum (41., 42., 19. et 21.).

22. Atque etiam hoc notari potest. Fingamus, valores functionis $\psi(x,y,v)$ notos esse ab $x=0$ ad $x=1$, ab $y=1$ ad $y=2$ et ab $v=0$ ad $v=\frac{1}{2}$. Tum $\psi(x,y,v)$ ex (18., 19., 20. et 21.) notescet pro quovis x et quovis y ab $v=0$ ad $v=\frac{1}{2}$. Deinde ex (25.) inveniuntur valores ipsius ψ ab $v=\frac{1}{2}$ ad $v=1$, atque ex (26.) ab $v=-1$ ad $v=0$. Unde patet, sub illa hypothesi, omnes valores functionis ψ ex datis relationibus computari posse.

23. Obiter etiam de hac re fiat mentio. Posito in aequatione (23.) $\frac{-v}{1-v}=\varrho$, $y=2-\beta$, prodit

$$\frac{1}{(1-\beta)(1-\varrho)^x}\psi\left(x,2-\beta,\frac{-\varrho}{1-\varrho}\right)=\frac{1}{1-\beta}+\frac{x\varrho}{1(2-\beta)}+\dots+\frac{x^{r|1}\varrho^r}{r!(r+1-\beta)}+\text{etc.}$$

At est

$$\frac{1}{r+1-\beta}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\beta^n}{(r+1)^{n+1}}\right\};$$

ergo ponendo

$$1+\frac{x\varrho}{1.2^{n+1}}+\frac{x(x+1)\varrho^2}{1.2.3^{n+1}}+\frac{x(x+1)(x+2)\varrho^3}{1.2.3.4^{n+1}}+\text{etc.}=S^{(n+1)}_{(x,\varrho)},$$

obtinetur

50. $$\frac{1}{(1-\beta)(1-\varrho)^x}\psi\left(x,2-\beta,\frac{-\varrho}{1-\varrho}\right)=S^{(1)}_{(x,\varrho)}+\beta S^{(2)}_{(x,\varrho)}+\beta^2 S^{(3)}_{(x,\varrho)}+\text{etc.},$$

unde colligitur, seriem $S^{(1)}_{(x,\varrho)}+\beta S^{(2)}_{(x,\varrho)}+\beta^2 S^{(3)}_{(x,\varrho)}+\text{etc.}$ iisdem casibus summari posse, quibus functionis $\psi\left(x,2-\beta,\frac{-\varrho}{1-\varrho}\right)$ summa assignari possit.

Quod quum ex (13.) sit

$$\int_0^1\frac{d\alpha}{(1-\varrho\alpha)^x\alpha^\beta}=\frac{1}{(1-\beta)(1-\varrho)^x}\psi\left(x,2-\beta,\frac{-\varrho}{1-\varrho}\right),$$

(50.) transit in

$$\int_0^1\frac{1}{(1-\varrho\alpha)^x\alpha^\beta}=S^{(1)}_{(x,\varrho)}+\beta S^{(2)}_{(x,\varrho)}+\dots+\beta^n S^{(n+1)}_{(x,\varrho)}+\text{etc.}$$

Hinc vero colligitur:

$$\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{d\beta^n}\left\{\int_0^1\frac{d\alpha}{(1-\varrho\alpha)^x\alpha^\beta}\right\}_{(\beta=0)}=S^{(n+1)}_{(x,\varrho)};$$

h. e.

51. $$\frac{1}{n!}\int_0^1\frac{\left(\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^n d\alpha}{(1-\varrho\alpha)^x}=S^{(n+1)}_{(x,\varrho)}.$$

Jam posito

$$\Sigma_{(x,\varrho)}^{(n+1)} = S_{(x,\varrho)}^{(n+1)}-1 = \frac{x\varrho}{1.2^{n+1}}+\frac{x(x+1)\varrho^2}{1.2.3^{n+1}}+\text{etc.},$$

ob

$$\int_0^1\left(\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^n d\alpha = n!,$$

erit

$$52.\quad \frac{1}{n!}\int_0^1\left(\frac{1}{(1-\varrho\alpha)^x}-1\right)\left(\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^n d\alpha = \Sigma_{(x,\varrho)}^{(n+1)}.$$

Hinc, quoniam est

$$1+\frac{\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{1}+\frac{\left(\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2}{2!}+\text{etc.} = \frac{1}{\alpha},$$

deducitur

$$\int_0^1\left(\frac{1}{(1-\varrho\alpha)^x}-1\right)\frac{d\alpha}{\alpha} = \Sigma_{(x,\varrho)}^{(1)}+\Sigma_{(x,\varrho)}^{(2)}+\Sigma_{(x,\varrho)}^{(3)}+\text{etc.},$$

unde, ponendo in integrali $\frac{1}{1-\varrho\alpha}=\gamma$, prodit

$$53.\quad \Sigma_{(x,\varrho)}^{(1)}+\Sigma_{(x,\varrho)}^{(2)}+\Sigma_{(x,\varrho)}^{(3)}+\text{etc.} = \int_1^{\frac{1}{1-\varrho}}\frac{\gamma^{x-1}d\gamma}{\gamma-1}-\int_1^{\frac{1}{1-\varrho}}\frac{d\gamma}{\gamma(\gamma-1)}$$

Quae integralia, si x rationalis est, per logarithmos et arcus circulares exprimi possunt.

Deinde quum sit

$$1-\frac{\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{1}+\frac{\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{2!}-\dots = \alpha,$$

ex (52.) derivatur

$$\int_0^1\left(\frac{1}{(1-\varrho\alpha)^x}-1\right)\alpha\,d\alpha = \Sigma_{(x,\varrho)}^{(1)}-\Sigma_{(x,\varrho)}^{(2)}+\Sigma_{(x,\varrho)}^{(3)}-\text{etc.};$$

unde, posito in integrali $\frac{1}{1-\varrho\alpha}=\gamma$, sequitur

$$54.\quad \Sigma_{(x,\varrho)}^{(1)}-\Sigma_{(x,\varrho)}^{(2)}+\Sigma_{(x,\varrho)}^{(3)}-\text{etc.} = \frac{1}{\varrho^2}\int_1^{\frac{1}{1-\varrho}}\frac{(\gamma^x-1)(\gamma-1)}{\gamma^3}d\gamma,$$

quod integrale algebraice aut per logarithmos exprimi potest.

24. Denique theorema memorabile, quod ad functionem ψ spectat, exponamus. Statuatur

$$55.\quad f(x,y) = \frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{y\pi(1+hr)^{\frac{x}{h}}r^y}\psi\left(\frac{x}{h},1-y,\frac{hr}{1+hr}\right),$$

ubi r quantitatem positivam, h vel positivam vel negativam indicat, et $\Gamma(1+y)$; in significatu generaliori accipitur.

Primum autem indagemus valorem functionis $f(x, y)$ pro valoribus positivis integris ipsius y.

Pro $y=0$ quidem, quum habeatur, ex (5.),

$$\psi\left(\frac{x}{h}, 1; \frac{hr}{1+hr}\right) = \left(1-\frac{hr}{1+hr}\right)^{-\frac{x}{h}} = (1+hr)^{\frac{x}{h}},$$

sumendo loco $\frac{\sin(0\pi)}{0\pi}$, $\overset{y=0}{\lim}\left(\frac{\sin(y\pi)}{y\pi}\right)=1$, obtinetur $f(x, 0) = \frac{\Gamma(1)(1+hr)^{\frac{x}{h}}}{(1+hr)^{\frac{x}{h}}} = 1$.

Quod si y numerum positivum integrum m indicat, erit

$$\psi\left(\frac{x}{h}, 1-y, \frac{hr}{1+hr}\right) = \infty, \quad \sin(y\pi) = 0;$$

ergo $f(x, y)$ formam $0.\infty$ recipit. Jam si hoc casu, solito more, accipitur limes, versus quem $f(x, y)$ convergit, dum y versus m convergit, ad valorem correspondentem functionis $f(x, y)$ inveniendum ponatur $y = m-\alpha$, indicante α quantitatem infinite parvam.

Quo facto erit

$$\varphi(\alpha) = \frac{\sin(y\pi)}{\pi}\psi\left(\frac{x}{h}, 1-y, \frac{hr}{1+hr}\right)$$

$$= \frac{\sin(m-\alpha)\pi}{\pi}\psi\left(\frac{x}{h}, 1-m+\alpha, \frac{hr}{1+hr}\right),$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{(-1)^{m-1}\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\left(\frac{x}{h}\right)^{n|1}}{(1-m+\alpha)^{n|1}}\left(\frac{hr}{1+hr}\right)^n\right\},$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{(-1)^{m-1}\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=0}^{n=m-1}\left\{\frac{\left(\frac{x}{h}\right)^{n|1}}{(1-m+\alpha)^{n|1}}\left(\frac{hr}{1+hr}\right)^n\right\}$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}\sin(\alpha\pi)\left(\frac{x}{h}\right)^{m|1}}{\alpha\pi(1-m+\alpha)^{m-1|1}}\left(\frac{hr}{1+hr}\right)^m\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\left(\frac{x}{h}+m\right)^{n|1}}{(1+\alpha)^{n|1}}\left(\frac{hr}{1+hr}\right)^n\right\}.$$

Jam pro $\alpha=0$ membri dextri hujus aequationis terminus prior evanescit; unde, ob $\overset{\alpha=0}{\lim.}\left\{\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\right\}=1$, facile invenitur

$$\lim^{\alpha=0}\varphi(\alpha) = \frac{(-1)^{m-1}\left(\frac{x}{h}\right)^{m|1}}{(1-m)^{m-1|1}}\left(\frac{hr}{1+hr}\right)^m \sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\left(\frac{x}{h}+m\right)^{n|1}}{1^{n|1}}\left(\frac{hr}{1+hr}\right)^n\right\}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{h}\right)^{m|1}}{(m-1)!}\left(\frac{hr}{1+hr}\right)^m\left(1-\frac{hr}{1+hr}\right)^{-\frac{x}{h}-m} = \frac{\left(\frac{x}{h}\right)^{m|1}}{(m-1)!}(hr)^m(1+hr)^{\frac{x}{h}}.$$

Hinc, quum sit

$$f(x,m) = \lim^{y=m} f(x,y) = \lim^{\alpha=0}\left\{\frac{\Gamma(1+m-\alpha)}{(m-\alpha)(1+hr)^{\frac{x}{h}}r^{m-\alpha}}\varphi\alpha\right\},$$

colligitur

$$f(x,m) = \frac{m!}{m(1+hr)^{\frac{x}{h}}r^m}\cdot\frac{\left(\frac{x}{h}\right)^{m|1}}{(m-1)!}(hr)^m(1+hr)^{\frac{x}{h}} = h^m\left(\frac{x}{h}\right)^{m|1} = x^{m|h}$$

Itaque, quoniam etiam est $x^{0|h}=1$, habemus hanc aequationem generalem, ubi m aut zyphram aut quemlibet numerum integrum positivum indicat:

$$56.\qquad f(x,m) = x^{m|h}.$$

25. Simili modo, si y numerum negativum integrum indicat, expressio finita pro $f(x,y)$ invenitur. Hoc vero casu est $\Gamma(1+y)=\infty$, $\sin(y\pi)=0$; itaque statuatur $y=-m+\alpha$, indicante m numerum quemlibet integrum positivum, et α quantitatem infinite parvam.

Ob $\Gamma(1+\alpha)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-m+1)\Gamma(1-m+\alpha)$, erit

$$\frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{\pi} = \frac{\Gamma(1-m+\alpha)\sin(-m+\alpha)\pi}{\pi} = \frac{(-1)^m\Gamma(1+\alpha)\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-m+1)},$$

unde

$$\lim^{\alpha=0}\left\{\frac{\Gamma(1-m+\alpha)\sin(-m+\alpha)\pi}{\pi}\right\} = \frac{\Gamma(1-m)\sin(-m\pi)}{\pi} = -\frac{1}{(m-1)!}.$$

Jam vero $\psi\left(\frac{x}{h},1+m,\frac{hr}{1+hr}\right)$ aequatione (21.) ad $\psi\left(\frac{x}{h},1,\frac{hr}{1+hr}\right)=(1+hr)^{\frac{x}{h}}$ reducitur. Quo ratiocinio absoluto, ex (55.) prodit haec aequatio, ubi m quemlibet numerum positivum integrum exhibet:

$$57.\qquad f(x,-m) = \frac{1}{(x-mh)(x-(m-1)h)\ldots(x-2h)(x-h)}$$

$$-\frac{1}{(1+hr)^{\frac{x}{h}-1}}\left[\frac{r^{m-1}}{(m-1)!(x-mh)}+\frac{r^{m-2}}{(m-2)!(x-mh)(x-(m-1)h)}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{r}{1!(x-mh)(x-(m-1)h)\ldots(x-2h)}+\frac{1}{(x-mh)(x-(m-1)h)\ldots(x-2h)(x-h)}\right].$$

26. Secundum (10. et 12.) est

$$\int_0^{\varrho}\frac{\alpha^{y-2}\,d\alpha}{(1\pm\alpha)^x} = \frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1\pm\varrho)^x}\,\psi\left(x,y,\frac{\pm\varrho}{1\pm\varrho}\right).$$
$$(\varrho>0,\ y>1)$$

Proinde, indicantibus h, r quantitates positivas, ponendo $\frac{x}{\pm h}$ loco x, $1-y$ loco y, hr loco ϱ, erit

$$\int_0^{hr}\frac{\alpha^{-y-1}\,d\alpha}{(1\pm\alpha)^{\frac{x}{\pm h}}} = -\frac{1}{(hr)^y(1\pm hr)^{\frac{x}{\pm h}}}\,\psi\left(\frac{x}{\pm h},1-y,\frac{\pm hr}{1\pm hr}\right);$$
$$(y<0)$$

unde

$$\frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{y\pi(1\pm hr)^{\frac{x}{\pm h}}r^y}\,\psi\left(\frac{x}{\pm h},1-y,\frac{\pm hr}{1\pm hr}\right) = -\frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{\pi}h^y\int_0^{hr}\frac{\alpha^{-y-1}\,d\alpha}{(1\pm\alpha)^{\frac{x}{\pm h}}},$$

sive ex (55.), si in hac aequatione scribitur $\pm h$ loco h:

$$58.\quad f(x,y) = -\frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{\pi}h^y\int_0^{hr}\frac{\alpha^{-y-1}\,d\alpha}{(1\pm\alpha)^{\frac{x}{\pm h}}}.$$
$$(y<0)$$

27. Jam de functionibus $f(x,y)$ generaliter theorema binomiale valere demonstremus, h. e. hanc aequationem locum habere:

$$(G.)\quad f(x+z,y) = f(x,y)+y_1f(x,y-1).f(z,1)+y_2f(x,y-2).f(z,2)$$
$$+\,y_3f(x,y-3).f(z,3)+\text{etc.}$$

denotantibus y_1, y_2, y_3 .... coëfficientes binomiales potestatis y. At si y numerus positivus integer est, per (56.) aequationem (*G.*) valere constat. Si autem y non positivum integrum est, haud difficile est visu, seriem propositam non convergere, nisi hr ad summum unitatem aequet. Nam posito

$$A_n = y_nf(x,y-n).f(z,n),$$

ex (55. et 56.) est

$$A_n = \frac{y_n\Gamma(1+y-n)\sin(y-n)\pi.z^{n|h}}{(y-n)\pi(1+hr)^{\frac{x}{h}}r^{y-n}}\,\psi\left(\frac{x}{h},1-y+n,\frac{hr}{1+hr}\right),$$

et ob $\Gamma(1+y-n) = \frac{\Gamma(1+y)}{y(y-1)\dots(y-n+1)}$,

$$A_n = \frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{\pi(1+hr)^{\frac{x}{h}}r^y}\cdot\frac{\left(\frac{z}{h}\right)^{n|1}(hr)^n}{n!\,(y-n)}\,\psi\left(\frac{x}{h},1-y+n,\frac{hr}{1+hr}\right).$$

Primum patet, esse debere $hr \geqq -\frac{1}{2}$.

Quod quum $\psi\left(\frac{x}{h}, 1-y+n, \frac{hr}{1+hr}\right)$, quantitate n in infinitum excrescente, versus 1 convergat, ex aequatione antecedente facile intelligitur, seriem A_0, A_1, A_2, ... convergere, si $hr<1$, divergere si $hr>1$. Si autem est $hr=1$, series converget, si $\frac{z}{h}<2$, diverget, si $\frac{z}{h}\gtreqless 2$. Quod quum ex aequatione antecedente facili negotio comprobari possit, hac in re non commoremur.

Jam ponatur $\pm h$ loco h, ita ut h quantitatem positivam indicet, atque sit

$$S=\sum_{n=0}^{n=x}\{y_n f(x, y-n).f(z, n)\}.$$

Tum, quoniam est $f(z, n)=z^{nI\pm h}$, secundum aequationem (58.) erit

$$S=-\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{y_n\Gamma(1+y-n)\sin(y-n)\pi}{\pi}h^{y-n}z^{nI\pm h}\int_0^{hr}\frac{\alpha^{-y+n-1}d\alpha}{(1\pm\alpha)^{\frac{x}{\pm h}}}\right\},$$

sive

$$S=-\frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{\pi}h^y\int_0^{hr}\frac{\alpha^{-y-1}d\alpha}{(1\pm\alpha)^{\frac{x}{\pm h}}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{z^{nI\pm h}}{n!}\left(\frac{-\alpha}{h}\right)^n\right\}.$$

At posito $W=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{z^{nI\pm h}}{n!}\left(\frac{-\alpha}{h}\right)^n\right\}$, obtinetur

$$W=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\left(\frac{-z}{\pm h}\right)^{nI-1}}{n!}(\mp h)^n\left(\frac{-\alpha}{h}\right)^n\right\}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\left(\frac{-z}{\pm h}\right)^{nI-1}}{n!}(\pm\alpha)^n\right\};$$

ideoque, siquidem est $\alpha\lesseqgtr hr\lesseqgtr 1$, erit $W=\frac{1}{(1\pm\alpha)^{\frac{z}{\pm h}}}$, atque

$$S=-\frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{\pi}h^y\int_0^{hr}\frac{\alpha^{-y-1}d\alpha}{(1\pm\alpha)^{\frac{x+z}{\pm h}}},$$

h. e. ex (58.),

$$S=f(x+z, y).$$

Hinc elucet, relationem (*G.*) valere, certe si sit $y<0$. Eam vero generaliter veram esse, hoc modo perspici potest. Scribamus denuo h loco $\pm h$, ita ut h quantitatem vel positivam vel negativam exhibeat. Secundum (26.) habemus

$$\psi\left(\frac{x}{h}, 1-y, \frac{hr}{1+hr}\right)=(1+hr)\psi\left(1-y-\frac{x}{h}, 1-y, -hr\right);$$

ergo est

$$S=\sum_{n=0}^{n=\infty}\{y_n f(x,y-n)f(z,n)\}$$

$$=\sum_{n=0,\,m=0}^{n=\infty,\,m=\infty}\left\{\frac{y_n\,\Gamma(1+y-n)\sin(y-n)\pi.z^{n|h}}{(y-n)\pi(1+hr)^{\frac{x}{h}-1}r^{y-n}}\cdot\frac{\left(1-y+n-\frac{x}{h}\right)^{m|1}}{(1-y+n)^{m|1}}(-hr)^m\right\},$$

unde

$$(H.)\quad S=-\frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{\pi(1+hr)^{\frac{x}{h}-1}}\sum_{n=0,\,m=0}^{n=\infty,\,m=\infty}\left\{\frac{(-1)^n\left(1-y+n-\frac{x}{h}\right)^{m|1}z^{n|h}}{n!(-y+n)^{1+m|1}}(-h)^n\,r^{-y+m+n}\right\},$$

Deinde est

$$f(x+z,y)=\frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{y\pi(1+hr)^{\frac{x+z}{h}-1}r^y}\psi\left(1-y-\frac{x+z}{h},\,1-y,\,-hr\right),$$

$$f(x+z,y)=\frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{y\pi(1+hr)^{\frac{x}{h}-1}r^y}\sum_{n=0,\,m=0}^{n=\infty,\,m=\infty}\left\{\frac{\left(1-y-\frac{x+z}{h}\right)^{n|1}(-hr)^n\left(\frac{z}{h}\right)^{m|1}}{(1-y)^{n|1}m!}(-hr)^m\right\},$$

sive

$$(I.)\quad f(x+z,y)=-\frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{\pi(1+hr)^{\frac{x}{h}-1}}\sum_{n=0,\,m=0}^{n=\infty,\,m=\infty}\left\{\frac{\left(1-y-\frac{x+z}{h}\right)^{n|1}\left(\frac{z}{h}\right)^{m|1}}{(-y)^{1+n|1}m!}(-h)^{m+n}r^{-y+m+n}\right\}.$$

Ex aequationibus ($H.$ et $I.$) colligitur esse, ponendo $m+n=l$,

$$(K.)\qquad S-f(x+z,y)=\frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{\pi(1+hr)^{\frac{x}{h}-1}}\sum_{l=0}^{l=\infty}\{B(y,l)r^{-y+l}\},$$

ubi est

$$(L.)\quad B(y,l)=\sum_{n=0}^{n=l}\left\{\frac{\left(1-y-\frac{x+z}{h}\right)^{n|1}\left(\frac{z}{h}\right)^{l-n|1}(-h)^l}{(-y)^{1+n|1}(l-n)!}-\frac{(-1)^n\left(1-y+n-\frac{x}{h}\right)^{l-n|1}z^{n|h}(-h)^{l-n}}{n!(-y+n)^{1+l-n|1}}\right\}.$$

Jam in superioribus demonstratum est, esse $S-f(x+z,y)=0$ pro omnibus valoribus quantitatis r intra 0 et v. n. $\left(\frac{1}{h}\right)$ positis atque pro omnibus valoribus negativis ipsius y. Quod quum, siquidem y non positivus integer est, expressio $\frac{\Gamma(1+y)\sin(y\pi)}{\pi(1+hr)^{\frac{x}{h}-1}}$ zyphrae non aequetur, ex ($K.$) perspicitur esse debere $\sum_{l=0}^{l=\infty}\{B_{(y,l)}r^{-y+l}\}=0$ pro iisdem valoribus; proinde vero etiam esse $B(y,l)=0$ pro omnibus valoribus negativis quantitatis y. Atqui ex aequatione ($L.$) cernitur, $B(y,l)$ praebere functionem rationalem fractam ipsius y.

Ergo identice pro omnibus valoribus quantitatis y esse debet $B(y, l)=0$. Ex quo deducitur, secundum aequationem (K.), etiam $S-f(x+z, y)$ pro omnibus valoribus ipsius y zyphrae aequari. Itaque habemus hanc aequationem generalem:

59. $$f(x+z, y) = f(x, y)+y_1 f(x, y-1)f(z, 1)+y_2 f(x, y-2)f(z, 2) +y_3 f(x, y-3)f(z, 3)+ \text{ in inf.}$$

28. *Scholion.* Si functio $f(x, y)$ non per aequationem (55.), sed per (58.) definita esset, pro $hr=1$, valente signo inferiori, obtineretur $f(x, y)=x^{y|-h}$.

Constat enim esse

$$\int_0^1 \alpha^{-y-1}(1-\alpha)^{\frac{x}{h}}d\alpha = \frac{\Gamma(-y)\Gamma\left(\frac{x}{h}+1\right)}{\Gamma\left(-y+\frac{x}{h}+1\right)};$$

$$\left(y<0, \frac{x}{h}>-1\right)$$

ergo erit

$$f(x, y) = -\frac{\Gamma(1+y)\Gamma(-y)\sin(y\pi)}{\pi}h^y\frac{\Gamma\left(\frac{x}{h}+1\right)}{\Gamma\left(-y+\frac{x}{h}+1\right)};$$

et, quum sit

$$\Gamma(1+y)\Gamma(-y) = \frac{\pi}{\sin(-y\pi)},$$

habebitur

$$f(x, y) = h^y\frac{\Gamma\left(\frac{x}{h}+1\right)}{\Gamma\left(-y+\frac{x}{h}+1\right)} = (x-(y-1)h)^{y|h}$$

(cf. *Gaufs* in commentatione laudata, §. 22.), sive $f(x, y)=x^{y|-h}$ (siquidem facultas, differentia negativa, veluti maxime consentaneum videtur, ita definitur, ut sit $x^{y|-h}=(x-(y-1)h)^{y|h}$).

Quibus assumtis, etiam demonstrationis in paragrapho antecedente expositae pars prior valet; ea igitur simul continet demonstrationem theorematis binomialis facultatum, certe talium, in quibus exponens et differentia negativa, baseos autem prima pars differentia major sit.

Berol. mens. Julii 1847.

9.

Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe, und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte.

(Von Herrn Prof. *Steiner* in Berlin.)

(Auszug aus einer am 19ten April 1847 der Akademie der Wissenschaften vorgelegten Abhandlung.)

§. 1.

Aufgabe I. *„Aus der Spitze C eines Dreiecks ABC nach irgend einem Puncte D der Grundlinie AB eine solche Gerade CD zu ziehen, deren Quadrat zu dem Rechteck unter den Abschnitten der Grundlinie, AD und BD, ein gegebenes Verhältnifs hat, wie m:n."* Und

II. *„Wenn die Grundlinie AB der Gröfse und Lage nach gegeben, so soll die Grenzlage für die Spitze C gefunden werden, über welche hinaus die Forderung* (I.) *unmöglich wird."*

Erste Auflösung.

Man setze $m:n = q$, so soll sein

$$CD^2 = q.AD.BD.$$

I. Was zunächst die Construction der geforderten Geraden CD, so wie deren Möglichkeit und Unmöglichkeit betrifft, so ergiebt sich dieses Alles leicht wie folgt.

Man beschreibe um das Dreieck ABC (Taf. II. Fig. 1.) den Kreis und ziehe mit seiner Grundlinie parallel die Geraden U und V, deren gleicher Abstand p von derselben sich zu der Höhe h des Dreiecks verhält, wie $n:m$, so dafs also

$$h:p = m:n = q.$$

Zieht man nun weiter aus der Spitze C durch die Schnitte E und E_1, F un F_1 der Parallelen U, V und des Kreises die Geraden CE, CE_1, CF, CF_1, welche die Grundlinie in D und D_1, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ treffen, so sind CD, CD_1, $C\mathfrak{D}$, $C\mathfrak{D}_1$ die vier verschiedenen Geraden, welche der Forderung (I.) genügen. Denn vermöge des Kreises ist z. B.

$$CD.DE = AD.DB,$$

und zufolge der Construction

$$CD:DE = h:p = q,$$

folglich ist

$$CD^2 = q.AD.DB.$$

Von den vier Puncten der Grundlinie, nach welchen die verlangten Geraden gezogen sind, liegen allemal zwei, D und D_1, zwischen den Endpuncten der Grundlinie AB, wogegen die beiden andern, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$, auf ihrer Verlängerung, und zwar entweder auf jeder Seite einer, wie Fig. 1., oder beide auf einerlei Seite wie Fig. 2., liegen, je nachdem nämlich beziehlich $m > n$, oder $m < n$ ist. Ist insbesondere $m = n$ und $h = p$, so geht V durch die Spitze C, F vereiniget sich mit C, und dann fällt $C\mathfrak{D}_1$ auf V, so dafs der Punct $\mathfrak{D}_1$ sich ins Unendliche entfernt, und die Gerade $C\mathfrak{D}$ wird Tangente des Kreises im Puncte C.

Hiernach ist es auch klar, wie die construirten vier Geraden paarweise unmöglich oder imaginär werden können. Denn je nach Beschaffenheit der gegebenen Gröfsen m, n, h, kann die eine oder andere Parallele U oder V, oder es können beide zugleich jenseits des Kreises liegen, wo dann das eine oder beide Paar Gerade unmöglich werden. Beim Übergangsfall, wo eine der Parallelen U oder V den Kreis berührt, fallen das bezügliche Paar Gerade in eine zusammen.

Bemerkung. Die vier Geraden CD, CD_1, $C\mathfrak{D}$, $C\mathfrak{D}_1$, oder einfacher bezeichnet, d, d_1, δ, δ_1, bilden paarweise mit den Schenkeln des Dreiecks, CA und CB, oder a und b, gleiche Winkel, nämlich es ist

$$\text{Wink. } (ad) = (bd_1), \text{ und Wink. } (a\delta) = (b\delta_1),$$

$$\text{weil Bogen } AE = BE_1, \text{ und Bogen } AF = BF_1.$$

Es folgt daraus umgekehrt: *Dafs wenn man aus der Spitze eines Dreiecks nach der Grundlinie zwei Gerade zieht, welche mit den Schenkeln gleiche Winkel machen, und welche entweder beide innerhalb oder beide aufserhalb des Dreiecks liegen, dann die Quadrate dieser Geraden zu den Rechtecken unter den respectiven Abschnitten der Grundlinie allemal gleiches Verhältnifs haben, d. i.* $d^2 : AD.DB = d_1^2 : AD_1.D_1B$, *oder* $\delta^2 : A\mathfrak{D}.\mathfrak{D}B = \delta_1^2 : A\mathfrak{D}_1.\mathfrak{D}_1B$.

Ist insbesondere die Gerade CE_1 Durchmesser des Kreises (Fig. 1.), so ist der Winkel CEE_1 ein rechter, und dem zufolge CD oder d das Perpendikel aus der Spitze C auf die Grundlinie AB. Somit hat man den bekannten Satz: *„Zieht man aus einer Ecke eines Dreiecks den Durchmesser des umschriebenen Kreises und das Perpendikel auf die Gegenseite, so bilden dieselben mit den anliegenden Seiten gleiche Winkel."*

Nimmt man für einen Augenblick das Dreieck ABC als gegeben, dagegen p oder $q = k:p$ als unbestimmt an, so ist klar, dafs q ein *Minimum* wird, wenn die Parallele U oder V den Kreis berührt, in E_0 oder F_0 (Fig. 2.); dabei fallen d und d_1 in eine Gerade d_0, oder δ und δ_1 in eine Gerade δ_0 zusammen, und diese Geraden d_0 und δ_0 hälften also die Winkel (innern und äufsern) an der Spitze C. Seien D_0 und $\mathfrak{D}_0$ die Puncte, in welchen diese Geraden die Grundlinie treffen, so ist also einerseits $d_0^2 : AD_0 . BD_0$, und andererseits $\delta_0^2 : A\mathfrak{D}_0 . B\mathfrak{D}_0$ ein Minimum. — Ist insbesondere das Dreieck an der Spitze C rechtwinklig, so ist:

$$d_0^2 : AD_0 . BD_0 = \delta_0^2 : A\mathfrak{D}_0 . B\mathfrak{D}_0.$$

II. Was nun die zweite Frage: Die Grenzlage der Spitze C betrifft, wenn die Grundlinie AB als fest und q als gegeben angenommen wird, so läfst sich dieselbe getrennt, das eine Mal in Betracht der inneren Geraden d, d_1 und das andere Mal in Rücksicht der äufsern Geraden δ, δ_1, wie folgt leicht beantworten.

A. Wir haben bereits gesehen, dafs d und d_1 nur so lange möglich sind, als die Parallele U den Kreis schneidet, und dafs also der Zustand, wo U den Kreis nur noch berührt, die Grenze bildet. Dabei vereinigt sich der Punct E_1 mit E, D_1 mit D, und die Gerade d_1 mit d. Der Punct E (Fig. 3.) ist die Mitte des Bogens ABC, und sein Ort — wenn das Dreieck und der ihm umschriebene Kreis sich ändern — ist die auf der Grundlinie AB, in deren Mitte M, senkrechte Gerade Y. Die Gerade d hälftet den Winkel (ab) an der Spitze C. Wird unter diesen Umständen $AD = a_1$, $BD = b_1$, und $a_1 + b_1 = 2\gamma$, oder $MA = MB = \gamma$ gesetzt, so hat man zunächst

$$1.\quad d^2 = q . a_1 b_1,$$

$$2.\quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

Da nach einem bekannten Satze über das Dreieck:

$$ab = d^2 + a_1 b_1,$$

so ist ferner (1.):

$$3.\quad ab = (1+q) . a_1 b_1 = \frac{1+q}{q} . d^2.$$

Aus (2.) und (3.) folgt:

$$4.\quad \sqrt{(1+q)} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1},$$

und daraus weiter

$$5.\quad a+b = (a_1+b_1)\sqrt{(1+q)} = 2\gamma\sqrt{(1+q)},$$

d. h. die Summe der Schenkel $a+b$ ist constant. Man setze diese Constante

$$2\gamma\sqrt{(1+q)} = 2\alpha, \quad \text{und} \quad \alpha^2-\gamma^2 = \beta^2,$$

so ist

6. $\frac{\alpha}{\gamma} = \sqrt{(1+q)} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, oder

7. $\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = 1+q = \frac{ab}{a_1 b_1}$; $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{q}{1+q} = \frac{d^2}{ab}$; $\frac{\beta^2}{\gamma^2} = q = \frac{d^2}{a_1 b_1}$,

8. $d = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(ab)} = \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{(a_1 b_1)}$.

Man setze ferner $CE = e$, $DE = f$ und $AE = BE = g$, so ist

$$d:f = h:p = q, \quad \text{und} \quad e = d+f,$$

oder

$$9. \quad d = q.f, \quad \text{und} \quad e = (1+q).f = \frac{1+q}{q}d,$$

und weiter:

$$10. \quad e:d:f = \alpha^2:\beta^2:\gamma^2;$$

$$11. \quad de = ab; \quad df = a_1 b_1; \quad ef = \frac{1}{q}ab = \frac{\gamma^2}{\beta^2}.ab.$$

Da die Dreiecke DEB und DAC ähnlich sind, so ist

$$12. \quad \frac{g}{f} = \frac{a}{a_1} = \frac{\alpha}{\gamma} = \text{etc. (6.)},$$

und weiter:

$$13. \quad g = \frac{\alpha}{\gamma}.f = \frac{\gamma}{\alpha}.e = \frac{\alpha\gamma}{\beta^2}.d = \frac{\gamma}{\beta}.\sqrt{(ab)}.$$

Wird der Winkel (ab) oder ACB durch φ bezeichnet, und bemerkt, dafs Winkel $BAE = \frac{1}{2}\varphi$, so ist

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\gamma}{g} = \frac{\beta}{\sqrt{(ab)}},$$

oder

$$14. \quad \sqrt{(ab)}.\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \beta.$$

Die vorstehenden Gleichungen enthalten nebst der Lösung der obigen Aufgabe zugleich auch viele, theils bekannte, Sätze über die Ellipse, nämlich in Worten enthalten sie folgendes:

„Alle Dreiecke ABC, deren Spitzen C in der verlangten Grenze liegen, haben die gemeinsame Eigenschaft, dafs die Gerade d den Winkel (ab) an der Spitze hälftet; dafs die Schenkel a und b zu den ihnen anliegenden Abschnitten a_1 und b_1 der Grundlinie constantes Verhältnifs haben, nämlich wie $\sqrt{(1+q)}:1$; dafs daher auch die Summe 2α der

Schenkel constant ist und sich zur Grundlinie 2γ *ebenfalls wie* $\sqrt{(1+q)}:1$ *verhält* (6.); *u. s. w.*" Oder:

„*Die gesuchte Grenze ist eine Ellipse, welche die Endpuncte A, B der festen Grundlinie zu Brennpuncten hat, und deren grofse Axe* 2α *sich zur Grundlinie oder doppelten Excentricität* 2γ *verhält, wie* $\sqrt{(1+q)}:1$, *oder deren halbe grofse Axe* α, *halbe kleine Axe* β *und Excentricität* γ *sich verhalten, wie* $\sqrt{(1+q)}:\sqrt{q}:1$."

„*Jede Ellipse hat folgende Eigenschaften: Zieht man aus irgend einem Puncte C derselben die beiden Leitstrahlen a, b und errichtet die Normale CE, so theilt letztere das Stück AB der Hauptaxe X zwischen den Brennpuncten allemal in solche Abschnitte,* a_1 *und* b_1, *welche zu den ihnen anliegenden Leitstrahlen constantes Verhältnifs haben, und zwar wie* $\gamma:\alpha$, *d. h. wie die Excentricität zur halben grofsen Axe.*" „*Ebenso hat das Rechteck unter den genannten Abschnitten,* a_1b_1, *zum Quadrat der Normale* d^2 — *diese bis an die Hauptaxe X genommen* — *constantes Verhältnifs, nämlich wie* $\gamma^2:\beta^2$, *d. h. wie das Quadrat der Excentricität zum Quadrat der halben kleinen Axe.*" „*Desgleichen hat das Quadrat der Normale,* d^2, *zum Rechteck unter den Leitstrahlen ab, constantes Verhältnifs, wie* $\beta^2:\alpha^2$, *d. h. wie die Quadrate der halben Axen; u. s. w.* (7.)." „*Die drei Abschnitte der Normale, zwischen ihrem Fufspunct C und ihren Schnittpuncten D, E mit den Axen X, Y haben unter sich constantes Verhältnifs, und zwar wie die Quadrate der halben Axen und der Excentricität, nämlich es verhält sich* $e:d:f=\alpha^2:\beta^2:\gamma^2$ (10.); *also verhalten sich die Stücke, d und e, der Normale bis an die Axen X, Y umgekehrt wie die Quadrate der respectiven halben Axen; u. s. w.*" „*Das Rechteck, de, unter den Stücken d, e der Normale bis an die Axen ist gleich dem Rechteck, ab, unter den Leitstrahlen; u. s. w.* (11.)." — „*Die Gerade g, welche einen der Brennpuncte mit dem Schnittpunct E der Normale und der zweiten Axe Y verbindet, verhält sich zum Stück der Normale bis an diese Axe, e, wie die Excentricität zur halben grofsen Axe* (13.), *und zum Stück der Normale zwischen den Axen, f, wie die halbe grofse Axe zur Excentricität* (13.); *so dafs also g die mittlere Proportionale zwischen e und f, oder* $g^2=ef$ *ist, u. s. w.*" — „*Die mittlere Proportionale,* $\sqrt{(ab)}$, *zwischen den Leitstrahlen, a und b, multiplicirt in den Cosinus ihres halben Winkels,* $\frac{1}{2}\varphi$, *ist constant, nämlich gleich der halben kleinen Axe* β (14.)."

Man setze den Halbmesser $CM = \beta_1$, und denke sich den conjugirten Halbmesser $MH = \alpha_1$ gezogen, so ist letzterer bekanntlich gleich der mittleren Proportionale zwischen den Leitstrahlen a und b aus C, also $\alpha_1 = \sqrt{(ab)}$ und somit ist (14.)

$$\alpha_1 . \cos \tfrac{1}{2}\varphi = \beta.$$

Wird der Winkel, welchen die Leitstrahlen aus dem Scheitel H einschliefsen, durch ψ bezeichnet, so ist eben so

$$\beta_1 . \cos \tfrac{1}{2}\psi = \beta.$$

Nun ist bekanntlich $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha^2 + \beta^2$; daher folgt für die Winkel φ und ψ leicht die interessante Relation:

$$15. \quad \tang \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \tang \tfrac{1}{2}\psi^2 = \frac{\gamma^2}{\beta^2} = \frac{1}{q},$$

d. h. „*Die Winkel, welche die zwei Paar Leitstrahlen aus den Scheiteln C, H irgend zweier conjugirten Halbmesser der Ellipse unter sich bilden, haben die Eigenschaft, dafs die Summe der Quadrate der Tangenten der halben Winkel constant ist, nämlich gleich ist dem Quadrat der Excentricität dividirt durch das Quadrat der halben kleinen Axe.*"

Für die Axen-Scheitel ist $\tang \tfrac{1}{2}\varphi^2 = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$ und $\tang \tfrac{1}{2}\psi^2 = 0$, was auch stimmt.

Für die besondere Ellipse, deren Axen sich verhalten, wie die Diagonale des Quadrats zur Seite, oder bei welcher $\alpha^2 = 2\beta^2 = 2\gamma^2$, hat man

$$16. \quad \tang \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \tang \tfrac{1}{2}\psi^2 = 1.$$

Für diese besondere Ellipse treten überhaupt in den obigen Gleichungen und Sätzen ähnliche interessante Modificationen ein. Sie entspricht der vorgelegten Aufgabe für den speciellen Fall, wo das Quadrat der aus der Spitze C des Dreiecks zu ziehenden Geraden, CD oder d, dem Rechteck unter den Abschnitten, AD und BD, der Grundlinie gleich, oder $q = 1$ sein soll.

B. In Rücksicht der äufsern Geraden δ und δ_1 findet nun Analoges Statt. Nämlich sie sind nur so lange möglich, als die Parallele V den Kreis schneidet; berührt sie ihn, so befindet sich C in der gesuchten Grenze, und alsdann vereinigt sich der Punct F_1 mit F, $\mathfrak{D}_1$ mit $\mathfrak{D}$, und die Gerade δ_1 mit δ, und es ist der Punct F die Mitte des Bogens AFB, so dafs sein Ort dieselbe, auf der Grundlinie AB in deren Mitte M senkrecht stehende Axe Y ist, und dafs δ den äufsern Winkel an der Spitze C des Dreiecks hälftet.

Für diesen Fall setze man

$$A\mathfrak{D} = a_2;\quad B\mathfrak{D} = b_2;\quad \text{und}\quad AB = 2\gamma = b_2 - a_2,$$

so hat man gleicherweise, wie oben (A.):

1. $\delta^2 = q . a_2 b_2,$

2. $\frac{a}{a_2} = \frac{b}{b_2},$

3. $ab = a_2 b_2 - \delta^2 = (1-q).a_2 b_2 = \frac{1-q}{q}.\delta^2,$

4. $\sqrt{(1-q)} = \frac{a}{a_2} = \frac{b}{b_2},$

5. $b - a = (b_2 - a_2).\sqrt{(1-q)} = 2\gamma\sqrt{(1-q)},$

d. h. die Differenz der Schenkel a, b des Dreiecks ist constant. Man setze

$$2\gamma\sqrt{(1-q)} = 2\alpha,\quad \text{und}\quad \gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2,$$

so ist

6. $\frac{\alpha}{\gamma} = \sqrt{(1-q)} = \frac{a}{a_2} = \frac{b}{b_2};$

7. $\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = 1 - q = \frac{ab}{a_2 b_2};\quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{q}{1-q} = \frac{\delta^2}{ab};\quad \frac{\beta^2}{\gamma^2} = q = \frac{\delta^2}{a_2 b_2};$

8. $\delta = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(ab)} = \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{(a_2 b_2)}.$

Wird $CF = e$, $\mathfrak{D}F = f$, und $AF = BF = g$ gesetzt, so ist ferner

$$\delta : f = h : p = q,\quad \text{und}\quad e = f - \delta,\quad \text{oder}$$

9. $\delta = q.f,$ und $e = (1-q)f = \frac{1-q}{q}.\delta;$

10. $e : \delta : f = \alpha^2 : \beta^2 : \gamma^2;$

11. $\delta e = ab;\quad \delta f = a_2 b_2;\quad ef = \frac{1}{q}ab = \frac{\gamma^2}{\beta^2}.ab.$

Da die Dreiecke $\mathfrak{D}BF$ und $\mathfrak{D}CA$ ähnlich, so ist weiter:

12. $\frac{g}{f} = \frac{a}{a_2} = \frac{\alpha}{\gamma} = \text{etc. (6.)},$ oder

13. $g = \frac{\alpha}{\gamma}f = \frac{\gamma}{\alpha}e = \frac{\alpha\gamma}{\beta^2}\delta = \frac{\gamma}{\beta}\sqrt{(ab)}.$

Wird der äufsere Winkel an der Spitze C durch φ_1 bezeichnet, so hat man

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1 = \frac{\gamma}{g} = \frac{\beta}{\sqrt{(ab)}},\quad \text{oder}$$

14. $\sqrt{(ab)}.\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1 = \beta.$

Diese verschiedenen Gleichungen besagen in Worten Ähnliches, wie die obigen (A.), z. B.

„Alle Dreiecke, deren Spitzen C in der gesuchten Grenze liegen, haben die Eigenschaft, dafs die Gerade δ den äufsern Winkel an der Spitze hälftet; dafs die Schenkel a, b zu den ihnen anliegenden Abschnitten a_2, b_2 der Grundlinie constantes Verhältnifs haben, wie $\surd(1-q):1$, (4.) *und dafs daher die Differenz* 2α *der Schenkel* ($b-a$, *oder* $a-b$) *constant ist* (5.) *und sich zur Grundlinie* 2γ *ebenfalls wie* $\surd(1-q):1$ *verhält* (6.), *u. s. w.*" Oder:

„Die gesuchte Grenze ist im gegenwärtigen Falle eine Hyperbel, welche die Endpuncte A, B der festen Grundlinie zu Brennpuncten hat, und deren Hauptaxe 2α *sich zur Grundlinie oder doppelten Excentricität* 2γ *verhält, wie* $\surd(1-q):1$, *oder deren Halbaxen* α, β *und Excentricität* γ *sich verhalten, wie* $\surd(1-q):\surd q:1$, *(wenn* β *als reell angesehen wird).*"

Für die Hyperbel enthalten die Gleichungen analoge Eigenschaften, wie oben für die Ellipse, was ich nur anzudeuten brauche.

Wie man sieht mufs hier $q<1$, und also $\delta^2>a_2b_2$ sein, wenn die Hyperbel *reell* sein soll.

Ist insbesondere $q=\frac{1}{2}$, so wird die Hyperbel *gleichseitig*, nämlich $\alpha=\beta=\frac{1}{2}\gamma\surd 2$, und dann treten in den Formeln und Sätzen Modificationen ein, wie oben bei der speciellen Ellipse, bei welcher $q=1$.

Bemerkung. Die in der Aufgabe (II.) verlangte Grenze besteht demnach im Allgemeinen aus zwei Kegelschnitten, einer Ellipse und einer Hyperbel, welche confocal sind und zudem die zweite Axe 2β gemein haben (abgesehen davon, dafs dieselbe für die Hyperbel imaginär ist); ihre Hauptaxen verhalten sich, wie $\surd(1+q):\surd(1-q)$. Die Kegelschnitte schneiden einander in vier Puncten C_0, und zwar rechtwinklig. Somit giebt es vier solche besondere (einander gleiche) Dreiecke ABC_0, deren Spitzen C_0 in beiden Kegelschnitten zugleich liegen. Für jedes dieser Dreiecke ist daher

$$d^2:a_1b_1 = \delta^2:a_2b_2 = q,$$

woraus man schliefst, dafs dieselben an der Spitze C_0 rechtwinklig sind (s. oben I. Bemerk.). Demnach folgt:

„Bleibt die Grundlinie AB constant und in fester Lage, während die Verhältnifszahl q sich ändert, so ändern sich auch die beiden Kegelschnitte, aber der geometrische Ort ihrer vier Schnittpuncte C_0 *ist ein Kreis, welcher die feste Grundlinie zum Durchmesser hat.*" Oder

„Soll ein Dreieck ABC_0, dessen Grundlinie AB in fester Lage gegeben, die Eigenschaft haben, dafs die Quadrate der beiden Geraden d und δ, welche die Winkel φ und φ_1 an der Spitze C_0 hälften, sich zu den Rechtecken unter den respectiven Abschnitten der Grundlinie gleich verhalten, so mufs es an der Spitze rechtwinklig sein, oder so ist der Ort seiner Spitze C_0 ein Kreis, welcher die Grundlinie zum Durchmesser hat."

Werden die beiden Kegelschnitte, Ellipse und Hyperbel, oder kürzer E und H, gezeichnet gedacht, so theilen sie zusammen die Ebene in 7 Theile oder Räume R. Von diesen Räumen liegen: 1) zwei sich gleiche R_1, innerhalb E und H zugleich; 2) einer R_e innerhalb E allein; 3) zwei gleiche R_h innerhalb H allein; und endlich 4) zwei gleiche R_0 aufserhalb E und H. Liegt nun die Spitze C des Dreiecks ABC entweder: 1) in einem der beiden Räume R_1, so sind sowohl zwei Gerade d (d. h. d und d_1) als zwei Gerade δ möglich; 2) im Raume R_e, so sind nur zwei Gerade d möglich; 3) in einem der zwei Räume R_h, so finden nur zwei Gerade δ Statt; und endlich 4) in einem der zwei Räume R_0, so findet weder d noch δ Statt, d. h. die Aufgabe (I.) ist unmöglich.

Zweite Auflösung.

Von der in der Aufgabe (II.) verlangten Grenze, kann man sich durch folgende Betrachtung eine klare Anschauung verschaffen.

Wird in der gegebenen Grundlinie AB der Theilungspunct D irgend wo angenommen, so ist, wenn zudem auch q gegeben, die Länge der Geraden CD oder d bestimmt, da $d^2 = q.AD.BD$ sein soll. Daher ist für jeden Theilungspunct D der Ort der Spitze C des Dreiecks ein Kreis, der D zum Mittelpunct und d zum Radius hat. Und daher ist klar, dafs die gemeinsame Enveloppe E aller dieser Kreise D die gesuchte Grenze ist. Jeder Kreis wird von der Enveloppe E in denjenigen zwei Puncten C berührt, in welchen er von dem ihm zunächst folgenden geschnitten wird, oder, wenn man sich so ausdrücken darf, in welchen er von dem mit ihm zusammenfallenden (oder von sich selbst) geschnitten wird. In jedem andern Puncte C_1 wird er von einem der übrigen Kreise geschnitten, aber nur von einem. Jene zwei Berührungspuncte C lassen sich z. B. durch die Eigenschaft der Ähnlichkeitspuncte zweier Kreise leicht geometrisch bestimmen.

Es seien D und D_1 zwei der genannten Kreise, und F und F_1 seien ihre Ähnlichkeitspuncte: so sind diese (nicht allein zu den Mittelpuncten D

und D_1, sondern zugleich auch) zu den gegebenen Puncten A und B harmonisch, was leicht zu erweisen ist. Eine äufsere gemeinschaftliche Tangente t, die also durch den äufsern Ähnlichkeitspunct F geht, berühre die Kreise beziehlich in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$, und der diesen Puncten zunächst liegende Schnittpunct der Kreise heifse C_1. Bleibt nun D fest, während D_1 ihm näher rückt, bis er endlich mit ihm zusammenfällt, so rücken die Puncte $\mathfrak{C}$ und C_1 auf dem festen Kreise D einander auch näher, bis sie zuletzt sich in einen Punct C vereinigen, welcher der verlangte Berührungspunct ist; dabei fällt auch $\mathfrak{C}_1$ in C, und der innere Ähnlichkeitspunct F_1, der stets zwischen D und D_1 liegt, fällt in D. Demnach werden die zwei Puncte C, in welchen ein beliebiger Kreis D von der Enveloppe E berührt wird, wie folgt gefunden:

„Zu den drei Puncten A, D, B suche man den vierten, dem D zugeordneten, harmonischen Punct F, und lege aus ihm Tangenten an den Kreis D, so sind deren Berührungspuncte die verlangten zwei Puncte C."

Zieht man aus einem der construirten Puncte C nach den Puncten A, D, B, F Strahlen a, d, b, f, so sind diese auch harmonisch; und da d und f zu einander rechtwinklig (als Radius und Tangente des Kreises D), so hälften sie die von a und b gebildeten Winkel. Hierdurch gelangt man, für die Bestimmung des Orts von C, zu denselben drei Fundamentalgleichungen, wie bei der ersten Auflösung (II. A. 1., 2., 3.), woraus also, wie dort, folgt, dafs die Enveloppe E eine Ellipse sei.

Der Kreis D kann mit der Enveloppe E *reelle* oder *imaginäre* Berührung haben. Ob das Eine oder Andere Statt findet, hängt davon ab, oder wird bei der obigen Construction daran erkannt, ob aus F Tangenten an den Kreis D *möglich* sind oder *nicht*, also ob F *aufserhalb* oder *innerhalb* des Kreises liegt, oder ob d *kleiner* oder *gröfser* als DF ist. Es finden immer beiderlei Kreise Statt, und der besondere Fall, wo gerade $d = DF$, oder zur Unterscheidung, $d_0 = D_0F_0$, bildet den Übergang von den einen zu den andern. Bei diesem Übergangsfalle vereinigen sich beide Berührungspuncte C_0 mit F_0, und der Kreis D_0 wird der Krümmungskreis der Ellipse E im Scheitel F_0 ihrer Hauptaxe 2α. Die Lage des Mittelpuncts D_0 wird durch die zwei Gleichungen

$$d_0^2 = q.AD_0.BD_0, \quad \text{und} \quad MA^2 = MD_0.MF_0,$$

oder, wenn $MD_0 = x$ und $MA = MB = \gamma$ gesetzt wird, durch

$$d_0^2 = q(\gamma^2 - x^2), \quad \text{und} \quad \gamma^2 = x(x + d_0)$$

bestimmt. Daraus ergiebt sich:

$$x = \frac{\gamma}{\sqrt{(1+q)}} = \frac{\gamma^2}{\alpha}; \quad \text{und} \quad d_0 = \alpha - x = \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

Von den auf diese Weise bestimmten zwei Puncten D_0 und D_0^1 liege der erstere nach A und der andere nach B hin. Die Mittelpuncte der beiderlei Kreise D vertheilen sich nun so: „Die Strecke $D_0D_0^1$ enthält die Mittelpuncte aller *reell* berührenden Kreise D, wogegen die Mittelpuncte der *imaginär* berührenden Kreise D in den beiden Strecken AD_0 und BD_0^1 liegen." Dabei ist

$$D_0D_0^1 = \frac{2\gamma^2}{\alpha}, \quad \text{und} \quad AD_0 = BD_0^1 = \frac{\gamma}{\alpha}(\alpha-\gamma).$$

Die Berührungspuncte C der Kreise D mit der Enveloppe E können ferner auch auf folgende umständlichere Art gefunden werden, was hier noch um eines unten folgenden Satzes willen in Betracht gezogen werden soll.

Zieht man in allen Kreisen D parallele Durchmesser $GG_1 = 2d$ nach einer beliebigen Richtung R, so liegen ihre Endpuncte G und G_1 jedesmal in irgend einem Kegelschnitte K [denn da $d^2 = q.AD.BD$, so ist $y^2 = q(\gamma - x)(\gamma + x)$, wenn man $d = y$, $MD = x$ und $MA = \gamma$ setzt]. Wird nun an diesen Kegelschnitt K im Puncte G die Tangente GF gelegt, so trifft diese die Axe X im nämlichen Puncte F, aus welchem die an den Kreis D gelegten Tangenten die verlangten Berührungspuncte C geben (wie bei der obigen Construction). — Für den oben genannten Übergangsfall, d. h. für den besondern Kreis D_0, hat man dabei das Merkmal: dafs die Tangente GF mit der Richtung R und mit der Axe X gleiche Winkel bildet, oder dafs $D_0F = D_0G$ ist; und je nachdem sie mit R einen *gröfsern* oder *kleinern* Winkel bildet, als mit X, berührt der zugehörige Kreis D die Enveloppe E *reell* oder *imaginär*. Bei dem besondern Kegelschnitte K_0, der entsteht wenn R zu X senkrecht, bildet also für jenen Fall die Tangente GF mit der Axe X einen Winkel von 45°, und je nachdem sie mit derselben einen *kleinern* oder *gröfsern* Winkel bildet, berühren sich D und E *reell* oder *imaginär*. — Da beim Übergangsfall $D_0F = D_0G = D_0G_1$, so folgt, dafs die Tangenten GF und G_1F dabei einen rechten Winkel bilden. Beiläufig mag noch bemerkt werden, dafs aus der Bestimmungsart der Kegelschnitte K unmittelbar folgt, dafs dieselben die Grundlinie AB zum gemeinsamen Durchmesser haben (somit unter sich und mit E concentrisch sind), und dafs der demselben conjugirte Durchmesser für jeden K der zugehörigen Richtung R parallel und für alle K von constanter Gröfse ist, nämlich er ist zugleich ein Durchmesser $2d$

desjenigen Kreises D oder D_m, dessen Mittelpunct in M fällt, so dafs also $2d_m = 2\beta = 2\gamma\sqrt{q}$. Ferner folgt, dafs jeder Kegelschnitt K die Enveloppe E in zwei Puncten H und H_1, in den Endpuncten eines ihnen gemeinsamen Durchmessers, berührt; dieser Durchmesser ist dadurch bestimmt, dafs die Normalen (der E) in seinen Endpuncten der jedesmaligen Richtung R parallel sind. Demzufolge ist E zugleich auch die Enveloppe der Schaar Kegelschnitte K, welche sämmtlich Ellipsen sind und innerhalb der Ellipse E liegen. Jener oben erwähnte besondere K_0 hat mit E die Axe 2β gemein und berührt sie in den Scheiteln derselben. — Für die obige specielle Ellipse, die eintritt, wenn $q = 1$, und bei der $\alpha = \beta\sqrt{2} = \gamma\sqrt{2}$, ist AB für jeden Kegelschnitt K einer der gleichen conjugirten Durchmesser, indem $2d_m = 2\beta = 2\gamma$; und daher wird in diesem Falle K_0 ein Kreis über dem Durchmesser AB.

Wird oben anstatt des Theilungspuncts D, zwischen A und B, ein Theilungspunct $\mathfrak{D}$ in der Verlängerung der Grundlinie AB, also jenseits A oder B angenommen, und wird sodann mit der dadurch bestimmten Geraden δ um ihn ein Kreis $\mathfrak{D}$ beschrieben, so gelangt man zu analogen Resultaten. Nämlich die Enveloppe E aller Kreise $\mathfrak{D}$ ist eine Hyperbel; die Kreise zerfallen in zwei Abtheilungen, die einen haben mit E *reelle*, die andern *imaginäre* Berührung, und der Übergang von den einen zu den andern geschieht durch die Krümmungskreise $\mathfrak{D}_0$ in den Hauptscheiteln der Hyperbel E, etc. Ferner: Zieht man in den Kreisen je ein System parallele Durchmesser GG_1, so liegen deren Endpuncte in einer Hyperbel K, welche die Hyperbel E in zwei Puncten H und H_1, in den Endpuncten eines gemeinsamen Durchmessers (eines *reellen* oder *imaginären*) berührt; u. s. w.

Bemerkung. Dafs die obigen Kreise D eine Ellipse E zur Enveloppe haben, und dafs die Endpuncte G und G_1 je eines Systems paralleler Durchmesser derselben in einer andern Ellipse K liegen, u. s. w., davon kann man sich durch stereometrische Betrachtung, durch Projection, eine klare unmittelbare Anschauung wie folgt verschaffen.

Man denke durch den Mittelpunct M einer Kugel eine feste Ebene p, die sie in einem Hauptkreise P schneidet; ferner einen der Kugel umschriebenen (geraden) Cylinder T, dessen Axe t, die immer durch M geht, gegen die Ebene p unter beliebigem Winkel λ geneigt ist, und welcher die Kugel in einem Hauptkreise $\mathfrak{C}$ berührt, der mit dem Kreise P einen Durchmesser QR oder Y gemein hat. Der Cylinder T schneidet die Ebene p in einer

Ellipse E, die M zum Mittelpunct und QR zur kleinen Axe (2β) hat. Sei Z der auf der Ebene p senkrechte Kugeldurchmesser, und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dessen Endpuncte. Jede durch Z gelegte Ebene schneidet die Kugel in einem Hauptkreise $\mathfrak{K}$; geht die Ebene insbesondere durch Z und Y, so heifse der Kreis $\mathfrak{K}_0$. Jeder Kreis $\mathfrak{K}$ hat mit dem festen Kreise $\mathfrak{C}$ einen Durchmesser $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1$ gemein. Alle Kreise $\mathfrak{K}$ haben den Durchmesser $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ (oder Z) gemein, und die demselben conjugirten Durchmesser haben sie einzeln mit dem Kreise P gemein. Eine mit der Ebene p parallele, aber bewegliche, Ebene p_1 schneidet die Kugel in einem kleinen Kreise $\mathfrak{D}$, dessen Mittelpunct $\mathfrak{D}$ den Durchmesser $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zum Ort hat. Der Kreis $\mathfrak{D}$ schneidet den festen Kreis $\mathfrak{C}$ in zwei Puncten $\mathfrak{C}$, die reell oder imaginär sein können, nämlich es giebt zwei besondere Kreise $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_0^1$, welche den Kreis $\mathfrak{C}$ nur berühren, und über diese hinaus schneiden sich $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}$ nicht mehr reell, aber die Schnittlinie $\mathfrak{C}\mathfrak{C}$ ihrer verlängerten Ebenen bleibt immerhin ihre *ideelle* gemeinschaftliche Chorde. Die Schaar Kreise $\mathfrak{D}$ werden von der Ebene jedes Kreises $\mathfrak{K}$ in einem System paralleler Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ geschnitten, deren Endpuncte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ in $\mathfrak{K}$ liegen; u. s. w.

Werden nun diese auf der Kugel beschriebenen Elemente nach der Richtung der Cylider-Axe t auf die feste Ebene p projicirt, so ergiebt sich folgendes:

Der Kreis P entspricht sich selbst. Dem Kreise $\mathfrak{C}$ entspricht die Ellipse E; dem senkrechten Durchmesser Z entspricht die grofse Axe X von E; den Endpuncten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ entsprechen die Brennpuncte A und B von E. Jedem Kreise $\mathfrak{D}$ entspricht ein ihm gleicher Kreis D, dessen Mittelpunct D die Strecke AB der Axe X zum Ort hat; den zwei Schnittpuncten $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}$ entsprechen die zwei Berührungspuncte C von D und E; den besondern zwei Kreisen $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_0^1$ entsprechen die Krümmungskreise D_0 und D_0^1 in den Scheiteln der grofsen Axe X; und überhaupt je nachdem der Kreis $\mathfrak{D}$ den Kreis $\mathfrak{C}$ schneidet oder nicht, hat D mit E reelle oder imaginäre Berührung, und der Schnittlinie $\mathfrak{C}\mathfrak{C}$ der Ebenen von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}$ entspricht immer die *reelle* oder *ideelle* Berührungssehne CC von D und E. Die Kreise $\mathfrak{K}$ gehen in eine Schaar Ellipsen K über; je einem System paralleler Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ der Kreise $\mathfrak{D}$ entsprechen parallele Durchmesser GG_1 der Kreise D, deren Endpuncte G und G_1 in je einer Ellipse K liegen; den Schnittpuncten $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$ entsprechen die Berührunspuncte H und H_1 von K und E, und HH_1 ist allemal gemeinsamer Durchmesser der

letztern; dem gemeinsamen Durchmesser $\mathfrak{AB}$ aller Kreise $\mathfrak{K}$ entspricht der gemeinsame Durchmesser *AB* aller Ellipsen *K*, und die diesen beiden Durchmessern beiderseits conjugirten Durchmesser fallen zusammen und sind zugleich die Durchmesser des Kreises *P*. Dem besondern Kreise $\mathfrak{K}_0$ entspricht die besondere Ellipse K_0, u. s. w.

Die Verhältnifszahl oder der Coëfficient q wird hierbei bestimmt durch

$$q = \operatorname{tang} \lambda^2.$$

Ist insbesondere der Winkel $\lambda = 45°$, so ist $q = 1$, und dann wird *E* die mehrerwähnte besondere Ellipse, bei der $\alpha = \beta\sqrt{2}$.

Anstatt der Kugel können auch andere Umdrehungsflächen zweiter Ordnung zu Hülfe genommen werden, nämlich die Sphäroïde und das zweitheilige Umdrehungs-Hyperboloïd. Dabei ist gleicherweise die feste Ebene *p* durch den Mittelpunct *M* der Fläche und senkrecht zu ihrer Drehaxe *Z* anzunehmen. Beim Hyperboloïd ist dann der umschriebene Cylinder *T* ein *hyperbolischer*, und sein Schnitt *E* mit der Ebene *p* ist eine Hyperbel, und ebenso werden alle Kegelschnitte *K* Hyperbeln, u. s. w.

Bei diesen Fällen wird die Gröfse q durch den Winkel λ und durch die zwei verschiedenen Axen 2α, 2β der jedesmaligen Fläche bestimmt, nämlich es ist

$$q = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \operatorname{tang} \lambda^2,$$

wo 2α die ungleiche Axe ist, die in der Drehaxe *Z* liegt.

---

§. II.

Die vorstehende Untersuchung führte auf ein System Kreise, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren. Aber es kamen dabei einerseits nicht alle Kreise in Betracht, welche den Kegelschnitt doppelt berühren, und andererseits stellten sich nicht alle Arten Kegelschnitte ein. Dies giebt Anlafs diesen Gegenstand für sich etwas ausführlicher zu erörtern. Es bieten sich dabei noch einige nicht ganz uninteressante Eigenschaften und Sätze dar.

1. Ein gegebener Kegelschnit *K* kann von zwei Systemen oder zwei Schaaren Kreise *P* und *Q* doppelt berührt werden, deren Mittelpuncte in den beiden Axen *X* und *Y* des Kegelschnitts liegen, und zwar ist jeder Punct in der einen oder der andern Axe als Mittelpunct eines solchen Kreises anzusehen, der reell oder imaginär ist. Die Kreise *P*, deren Mittelpuncte in

der Hauptaxe X liegen, berühren den Kegelschnitt K von Innen und liegen ganz innerhalb desselben, wogegen die Kreise Q, deren Mittelpuncte in der zweiten Axe Y liegen, denselben entweder von Aufsen berühren, oder ihn umschliefsen und von ihm von Innen berührt werden. Die erste Kreisschaar P besteht aus reellen und imaginären Kreisen, wogegen die andere Schaar Kreise Q sämmtlich reell sind. Die reellen Kreise P der ersten Schaar zerfallen in zwei Abtheilungen, wovon die einen mit K *reelle* und die andern *imaginäre* Berührung haben, (was bereits im Vorhergehenden sich herausstellte). Bei den Kreisen Q hängt es von der Art des Kegelschnitts K ab, ob ihn dieselben alle reell berühren, oder ob sie, ebenso wie jene, in zwei Abtheilungen zerfallen, wovon die einen ihn reell und die andern imaginär berühren.

Sei $AA_1 = 2\alpha$ die Hauptaxe, in X, und $BB_1 = 2\beta$ die zweite Axe, in Y, ferner F und F_1 die Brennpuncte (in X) und $FF_1 = 2\gamma$; seien ferner $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ beziehlich die Krümmungsmittelpuncte der Axen-Scheitel A und A_1, B und B_1, und sei endlich M der Mittelpunct des Kegelschnitts K: so läfst sich das Gesagte bei den verschiedenartigen Kegelschnitten wie folgt specieller angeben.

a. ***Bei der Ellipse.*** 1) Die Kreise P werden von der Ellipse umschlossen. Die Mittelpuncte der *reellen* Kreise P sind auf die Strecke FF_1 beschränkt, und jeder derselben berührt die Ellipse reell oder imaginär, je nachdem sein Mittelpunct in der Strecke $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, oder in einer der beiden Strecken $\mathfrak{A}F$ oder $\mathfrak{A}_1F_1$ liegt. Der Kreis P wird am gröfsten, ein *Maximum*, wenn er M zum Mittelpunct und $BB_1 = 2\beta$ zum Durchmesser hat; er wird um so kleiner, je weiter sein Mittelpunct von M absteht, bis er in den Grenzen F und F_1 sich auf seinen Mittelpunct reducirt. 2) Die Kreise Q umschliefsen die Ellipse und berühren sie reell oder imaginär, nachdem der Mittelpunct in der Strecke $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, oder auf der einen oder andern Seite jenseits dieser Strecke liegt. Der Kreis Q wird ein *Minimum*, wenn er M zum Mittelpunct und $AA_1 = 2\alpha$ zum Durchmesser hat; er wird um so gröfser, je weiter sein Mittelpunct von M absteht. — In beiden Fällen findet der Übergang von den reell zu den imaginär berührenden Kreisen bei den Krümmungskreisen in den Scheiteln der respectiven Axen AA_1 und BB_1 Statt.

b. ***Bei der Hyperbel.*** 1) Die Kreise P werden von der Hyperbel umschlossen. Die Mittelpuncte der reellen Kreise P liegen zu beiden Seiten jenseits der Strecke FF_1, von deren Endpuncten an bis ins Unendliche, und

jeder Kreis P berührt die Hyperbel reell oder imaginär, nachdem sein Mittelpunct jenseits der Strecke $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, oder in einer der beiden Strecken $\mathfrak{A}F$ oder $\mathfrak{A}_1F_1$ liegt; in den Grenzpuncten F und F_1 wird der Radius des Kreises $=0$, etc. 2) Die Kreise Q berühren die Hyperbel von Aufsen, jeder berührt beide Zweige derselben, und alle berühren *reell*, so dafs jeder Punct der unbegrenzten Axe Y Mittelpunct eines die Hyperbel reell und doppelt berührenden Kreises Q ist. Der Kreis Q wird ein Minimum, wenn er M zum Mittelpunct und $AA_1=2\alpha$ zum Durchmesser hat; er wird um so gröfser, je weiter sein Mittelpunct von M entfernt.

c. *Bei der Parabel.* 1) Die Kreise P werden von der Parabel umschlossen. Die Mittelpuncte der reellen Kreise P liegen von F an nach dem Innern der Parabel, bis ins Unendliche, und jeder Kreis P berührt die Parabel reell oder imaginär, je nachdem sein Mittelpunct jenseits $\mathfrak{A}$, oder in der Strecke $F\mathfrak{A}$ liegt; bei F wird der Radius des Kreises $=0$, etc. 2) Hier ist die zweite Axe Y unendlich entfernt; als ihr entsprechende Kreise Q kann man die gesammten Tangenten der Parabel ansehen.

Bemerkung I. Die Radien der Kreise P und Q, welche nach deren Berührungspuncten mit dem Kegelschnitte K gezogen werden, sind zugleich die Normalen des letztern. Somit sind umgekehrt die beiden Kreisschaaren durch die Normalen des Kegelschnitts K bestimmt, nämlich dieselben bis an die Axen X und Y genommen, sind die Radien der respectiven Kreise. Aber wie aus dem Obigen ersichtlich, erhält man hierdurch nicht die ganze Kreisschaar P, sondern nur diejenige Abtheilung derselben, welche mit K *reelle* Berührung haben. Ebenso verhält es sich mit der zweiten Kreisschaar Q, im Falle, wo K eine Ellipse ist. —

II. Von den zwei Kreisschaaren P und Q, die einen Kegelschnitt K doppelt berühren, will ich hier beiläufig folgenden Satz angeben:

„*Die gemeinschaftliche Secante SS irgend zweier Kreise aus der nämlichen Schaar und ihre Berührungssehnen CC und C_1C_1 mit dem Kegelschnitte K sind parallel, und die erstere liegt immer in der Mitte zwischen den beiden letztern.*" (Dabei können die genannten drei Geraden reell oder ideell sein.) Oder:

„*Werden zwei gegebene Kreise N und N_1 von irgend einem Kegelschnitte K doppelt berührt, aber beide gleichartig, so sind die beiden Berührungssehnen CC und C_1C_1 immer mit der gemeinschaftlichen Secante SS der Kreise parallel, und stehen gleichweit von ihr ab.*" — Die zwei

äufsern, so wie die zwei innern gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise N und N_1 sind als ein solcher Kegelschnitt K anzusehen: und für diesen besondern Fall ist der Satz bekannt. — Übrigens findet der Satz auch etwas allgemeiner Statt, was ich bei einer andern Gelegenheit nachzuweisen mir vorbehalte.

III. Die zweite Schaar Kreise Q haben, unter andern, folgende besondere Eigenschaft:

„Zieht man aus den Brennpuncten F und F_1 nach allen Tangenten des Kegelschnitts K Strahlen unter demselben beliebigen Winkel φ, so liegen ihre Fufspuncte allemal in einem solchen Kreise Q, so dafs durch Änderung des Winkels φ die ganze Schaar Kreise Q erhalten wird." Oder umgekehrt: *„Bewegt sich ein beliebiger gegebener Winkel φ so, dafs der eine Schenkel stets einen festen Kegelschnitt K berührt, während der andere beständig durch einen der beiden Brennpuncte F oder F_1 desselben geht, so beschreibt sein Scheitel einen solchen Kreis Q, welcher den Kegelschnitt doppelt berührt (reell oder imaginär) und seinen Mittelpunct in der zweiten Axe Y des letztern hat.* — Für den besondern Fall, wo $\varphi = 90^0$, ist der Satz allgemein bekannt; ebenso für den Fall, wo K insbesondere eine Parabel, aber φ beliebig ist, und wobei der Kreis Q unendlich grofs, d. h. eine Gerade, eine Tangente der Parabel wird. — Zur weitern Entwickelung dieses Satzes und seines Zusammenhanges mit andern Eigenschaften, ist hier nicht der geeignete Ort.

2. Kürze halber wollen wir die obige Annahme (1.): „dafs X die erste, oder die Hauptaxe des gegebenen Kegelschnitts K sei," für einen Augenblick aufheben, und vielmehr es unbestimmt lassen, ob X die erste oder zweite Axe, und ob die ihr zugehörige Kreisschaar P die erste oder zweite sei, wobei dann gleicherweise unbestimmt bleibt, ob die in X liegende Axe $AA_1 = 2\alpha$, so wie die Brennpuncte F und F_1, und deren Abstand $FF_1 = 2\gamma$, u. s. w. reell oder imaginär seien. Alsdann braucht man nur von einer Kreisschaar P zu sprechen und kann doch die übereinstimmenden Eigenschaften beider Schaaren zugleich beschreiben.

Einige schon im Frühern angedeutete Sätze (§. I, 2te Auflös.) lauten nun vollständiger wie folgt:

„Werden in einer Schaar Kreise P, welche einen gegebenen Kegelschnitt K doppelt berühren, nach beliebiger Richtung R parallele Durchmesser GG_1 gezogen, so liegen deren Endpuncte G und G_1 in irgend

einem andern Kegelschnitte K_1, *welcher* FF_1 *zum Durchmesser hat, der mit den Brennpuncten* F *und* F_1 *zugleich reell oder imaginär ist. Der diesem Durchmesser* FF_1 *conjugirte Durchmesser* $G^0G_1^0$ *in* K_1, *ist der Richtung* R *parallel, nämlich er ist zugleich der Durchmesser* GG_1 *desjenigen Kreises* P, *dessen Mittelpunct in* M *liegt, und somit ist er auch gleich der andern Axe* $BB_1 = 2\beta$ *des gegebenen Kegelschnitts* K (1.), *und mit derselben zugleich reell oder imaginär. Daher ist die Summe der Quadrate dieser conjugirten Durchmesser* FF_1 *und* $G^0G_1^0$ *von* K_1 *gleich dem Quadrat der Axe* $AA_1 = 2\alpha$ *von* K." Werden diese conjugirten Durchmesser von K_1, als solche, durch $2f$ und $2g$ bezeichnet, so ist $f=\gamma$ und $g=\beta$, und da in K $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$, so ist auch, wie behauptet,

$$g^2+f^2 = \alpha^2.$$

Ferner: *Der Kegelschnitt* K_1 *berührt den gegebenen* K *in denjenigen zwei Puncten* H *und* H_1, *in welchen die Normalen, auf* K, *der Richtung* R *parallel sind, somit in den Endpuncten eines gemeinsamen Durchmessers* $HH_1 = 2h$. *Die diesem Durchmesser in beiden Kegelschnitten* K *und* K_1 *conjugirten Durchmesser* $LL = 2l$ *und* $L_1L_1 = 2l_1$ *fallen also aufeinander, und die Differenz ihrer Quadrate ist gleich dem Quadrat der andern Axe* BB_1 *des gegebenen Kegelschnitts* K. Denn in Rücksicht auf K_1 ist $h^2+l_1^2 = g^2+f^2 = \alpha^2$, und in Bezug auf K ist $h^2+l^2 = \alpha^2+\beta^2$, folglich ist

$$l^2 - l_1^2 = \beta^2.$$

Wird die Richtung R so viel wie möglich geändert, so entsteht eine Schaar Kegelschnitte K_1, oder abgekürzt $S.K_1$, welche insgesammt folgende Eigenschaften haben.

„*Die* $S.K_1$ *haben* FF_1 *zum gemeinsamen Durchmesser und sind daher unter sich und mit* K *concentrisch. Die diesem Durchmesser conjugirten Durchmesser* $G^0G_1^0$ *in der* $S.K_1$ *sind zugleich die gesammten Durchmesser desjenigen Kreises* P, *welcher* M *zum Mittelpunct hat, also alle gleich und auch gleich der andern Axe* BB_1 *des* K. *Daher ist für alle* K_1 *die Summe der Quadrate conjugirter Durchmesser constant, und zwar gleich dem Quadrat der fixirten Axe* AA_1 *des* K (*denn es ist* $g^2+f^2=\alpha^2$). *Der über der Axe* $AA_1 = 2\alpha$, *als Durchmesser, beschriebene Kreis* M *hat daher die Eigenschaft, dafs die aus irgend einem Puncte in seines Umfanges an je einen* K_1 *gelegten Tangenten allemal einen rechten Winkel bilden. Die* $S.K_1$ *haben den gegebenen Kegelschnitt* K *zur gemeinsamen Enveloppe, nämlich jeder von jenen berührt diesen in den End-*

puncten eines ihnen gemeinsamen Durchmessers HH_1, *und zwar in denjenigen Puncten, in welchen die Normalen der zugehörigen Richtung R parallel sind. Die diesem Durchmesser* HH_1 *in dem jedesmaligen* K_1 *und in K conjugirten Durchmesser* $L_1L_1 = 2l_1$ *und* $LL = 2l$ *fallen aufeinander, und die Differenz ihrer Quadrate ist constant, nämlich gleich dem Quadrat der andern Axe* $BB_1 = 2\beta$ *des K (oder* $l^2 - l_1^2 = \beta^2$, *oben)." — „Legt man aus irgend einem Puncte p des gemeinsamen Durchmessers* FF_1, *oder dessen Verlängerung, an jeden* K_1 *zwei Tangenten pg und* pg_1, *so liegen die Berührungspuncte g und* g_1 *sämmtlich in einem der Kreise P, und die Berührungssehnen* gg_1 *sind Durchmesser desselben, und schneiden sich somit in einem Punct." — „Die S.* K_1 *sind unter sich und im Allgemeinen auch mit K von gleicher Art, nur wenn K eine Ellipse und X ausdrücklich die zweite oder kleine Axe derselben ist, sind die S.* K_1 *anderer Art, nämlich Hyperbeln."*

Gemäfs einer frühern Bemerkung (1. I.) kann man den ersten Satz auch so aussprechen:

„Werden die Normalen eines Kegelschnitts K bis an eine seiner Axen X gezogen und um die Puncte, in welchen sie diese treffen, so herumbewegt, bis sie irgend einer gegebenen Richtung R parallel sind, so liegen ihre Endpuncte allemal in irgend einem andern Kegelschnitte K_1, *welcher jenen ersten in den Endpuncten eines ihnen gemeinsamen Durchmessers* HH_1 *berührt, und welcher allemal den Abstand* FF_1 *der in der Axe X liegenden Brennpuncte des K von einander zum Durchmesser hat. U. s. w.*

3. Aus dem Vorhergehenden ergeben sich durch Umkehrung folgende Sätze.

„Zieht man in einem gegebenen Kegelschnitte K_1 *ein System paralleler Sehnen* GG_1 *nach beliebiger Richtung R, so liegen ihre Mitten P in einem Durchmesser* $FF_1 = 2f$ *desselben; und beschreibt man über den Sehnen, als Durchmesser, Kreise P, so haben diese irgend einen bestimmten andern Kegelschnitt K zur Enveloppe, und zwar berühren sie ihn doppelt, jeder in zwei Puncten C. Eine Axe* $AA_1 = 2\alpha$ *des K fällt auf den Durchmesser* FF_1 *und die ihr zugehörigen Brennpuncte fallen in dessen Endpuncte F und* F_1, *so dafs also* $FF_1 = 2\gamma$ *die doppelte Excentricität des K und dieser mit* K_1 *concentrisch ist. Die andere Axe* $BB_1 = 2\beta$ *des K ist dem zum System der Sehnen* GG_1 *gehörigen, und*

dem FF_1 conjugirten, Durchmesser $G^0G_1^0 = 2g$ des K_1 gleich. Daher ist das Quadrat jener Axe AA_1 des K gleich der Summe der Quadrate der conjugirten Durchmesser FF_1 und $G^0G_1^0$ des K_1. Die aus einem Scheitel A der Axe AA_1 an K_1 gelegten Tangenten $A\mathfrak{G}$ und $A\mathfrak{G}_1$ bilden einen rechten Winkel, und die Berührungssehne $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ gehört mit zum System Sehnen GG_1, sie ist der Durchmesser des Krümmungskreises, oder ihre Mitte ist der Krümmungsmittelpunct $\mathfrak{A}$ des Kegelschnitts K in jenem Scheitel A (§. I. 2te Auflösung). — *Der Kegelschnitt K berührt den gegebenen K_1 in den Endpuncten eines ihnen gemeinsamen Durchmessers HH_1, und zwar in denjenigen Puncten H und H_1, in welchen die Normalen des K_1 der Richtung R und somit auch den Tangenten in F und F_1 an K_1 parallel sind. Daher sind die Brennpuncte F und F_1 und die Berührungspuncte H und H_1 des K zugleich auch die Berührungspuncte der Seiten eines dem K_1 umschriebenen Rechtecks. Die dem Durchmesser $HH_1 = 2h$ beidseitig conjugirten Durchmesser $2l$ und $2l_1$ fallen aufeinander und es ist*

$$l^2 - l_1^2 = \beta^2 = g^2."$$

Wird die Richtung R so viel wie möglich geändert, so entsteht auf diese Weise, bei demselben gegebenen Kegelschnitte K_1 eine Schaar Kegelschnitte K, oder $S.K$, welche folgende gemeinsame Eigenschaft haben.

„*Die $S.K$ haben mit K_1 denselben Mittelpunct M. Alle K haben eine gleiche Axe AA_1, deren Quadrat der Summe der Quadrate je zweier conjugirter Durchmesser des K_1 gleich ist; daher sind sämmtliche Axen AA_1 Durchmesser eines Kreises M, welcher in Bezug auf K_1 der Ort der Scheitel der ihm umschriebenen rechten Winkel ist. Die in den Axen AA_1 liegenden Brennpuncte F und F_1 der $S.K$ sind zugleich die Endpuncte je eines Durchmessers FF_1 des K_1, und somit ist K_1 ihr geometrischer Ort. Der genannte Kreis M ist ferner für jeden Kegelschnitt K der Ort der Fufspuncte der aus seinen Brennpuncten F und F_1 auf seine Tangenten gefällten Perpendikel.*" — „*Die andern Axen BB_1 der $S.K$ sind respective den einzelnen Durchmessern des K_1 gleich, nämlich je dem, der dem Durchmesser FF_1 conjugirt ist. Der Ort der Endpuncte dieser Axen BB_1 ist eine Curve 4ten Grades* *)." — „*Jeder Kegelschnitt K berührt den gegebenen K_1 in den Endpuncten eines ihnen gemeinsamen*

---

*) Die Gleichung der genannten Curve ist

$$(x^2+y^2)(a^2x^2+b^2y^2+a^2b^2) = (a^2+b^2)(a^2x^2+b^2y^2),$$

wobei a, b die Halbaxen des gegebenen Kegelschnitts K_1 sind.

Durchmessers HH_1, in welchen Endpuncten nämlich die Normalen der jedesmaligen Richtung R parallel sind; die beiden Brennpuncte F und F_1 und die beiden Berührungspuncte H und H_1 jedes K sind immer zugleich die Berührungspuncte der zwei Paar Gegenseiten eines dem K_1 umschriebenen Rechtecks, und es giebt allemal einen zweiten K, welcher verwechselt H und H_1 zu Brennpuncten und F und F_1 zu Berührungspuncten hat. Und umgekehrt: Die zwei Paar Berührungspuncte der Gegenseiten eines jeden dem K_1 umschriebenen Rechtecks entsprechen in diesem Sinne zweien Kegelschnitten K." — *„Die gemeinsame Enveloppe aller K besteht aus zwei Theilen, aus dem gegebenen Kegelschnitte K_1 und aus dem genannten Kreise M; letzterer berührt jeden K in den Endpuncten A und A_1 seiner Axe AA_1."* — *„Das dem K_1 eingeschriebene Viereck, dessen Ecken in den Berührungspuncten eines umschriebenen Rechtecks liegen, wie FHF_1H_1, ist ein Parallelogramm, seine Seiten sind den Diagonalen des Rechtecks parallel, und von den sich anliegenden Seiten desselben ist die Summe oder der Unterschied constant, und zwar gleich der Diagonale des Rechtecks, also $FH+F_1H=AA_1=2a$. Die im vorstehenden Satze genannte besondere Sehne $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$, Durchmesser des Krümmungskreises P_0 im Scheitel A jedes K, berührt oder hat zur Enveloppe einen bestimmten Kegelschnitt M_1, nämlich die Polarfigur des Kreises M in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt K_1; dieser Kegelschnitt M_1 hat ebenfalls M zum Mittelpunct. Der Ort der Mitten der Sehnen $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ oder der Krümmungsmittelpuncte $\mathfrak{A}$ aller K in ihren Axen-Scheiteln A (und A_1), ist eine Curve 4ten Grades*), die M zum Mittelpunct und zudem die Eigenschaft hat, dafs je zwei Durchmesser derselben, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}^0\mathfrak{A}_1^0$, welche auf irgend zwei conjugirte Durchmesser FF_1, und $G^0G_1^0$ von K_1 fallen, constante Summe oder constanten Unterschied haben, und zwar dafs $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \pm \mathfrak{A}^0\mathfrak{A}_1^0 = AA_1 = 2a$ ist, und dafs ferner die Durchmesser $\mathfrak{A}^0\mathfrak{A}_1^0$ der Curve einzeln den Durchmessern $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ der genannten Krümmungskreise P_0 gleich sind."* Denn auf je zwei conjugirte Durchmesser FF_1 und $G^0G_1^0$ des K_1 (Fig. 4.) fallen immer die Diagonalen AA_1 und $A^0A_1^0$ eines umgeschriebenen Rechtecks $AA^0A_1A_1^0$, und auch umgekehrt, und dabei sind die Seiten des zugehörigen eingeschriebenen Parallelo-

---

*) Die Gleichung dieser Curve ist

$$(a^2+b^2)(a^2y^2+b^2x^2)^2 = a^4b^4(y^2+x^2),$$

wo a und b die Halbaxen des K_1 sind.

gramms $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ (gleichbedeutend mit dem genannten FHF_1H_1) den Diagonalen des Rechtecks parallel, so dafs $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{G}\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{A}^0\mathfrak{A}_1^0 = \mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$, und somit $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}^0\mathfrak{A}_1^0 = \mathfrak{G}\mathfrak{G}_3 + \mathfrak{G}\mathfrak{G}_1 = AA_1 = 2\alpha$ ist. Übrigens ist auch nach früherem (§. I. 2te Auflös.) $M\mathfrak{A} = \frac{f^2}{\alpha}$ und $M\mathfrak{A}^0 = \frac{g^2}{\alpha}$, und somit $M\mathfrak{A} + M\mathfrak{A}^0 = \frac{f^2+g^2}{\alpha} = \alpha$.

Es folgt ferner:

„Die Tangenten jedes Kegelschnitts K schneiden alle den Kreis M; und umgekehrt: jede Sehne mn des Kreises M, die den gegebenen Kegelschnitt K_1 nicht schneidet, berührt irgend zwei bestimmte Kegelschnitte K, und zwar sind diese dadurch bestimmt, dafs die auf die Sehne, in deren Endpuncten m und n, errichteten Perpendikel mm_1 und nn_1 den K_1 in den zwei Paar Brennpuncten F und F_1 derselben schneiden. Wenn insbesondere die Sehne mn den gegebenen Kegelschnitt K_1 berührt, in einem Puncte H, so berühren ihn auch die Perpendikel mm_1 und nn_1 in einem Puncten-Paar F und F_1, und alsdann fallen die zwei K in einen zusammen, welcher die Sehne mn und den K_1 in jenem Puncte H zugleich berührt; etc."

Die S. K sind im Allgemeinen mit K_1 von gleicher Art; wenn jedoch K_1 eine Hyperbel ist, so können die S. K sowohl Ellipsen als Hyperbeln sein, so wie auch imaginär werden." — Überhaupt treten bei den angegebenen Eigenschaften verschiedene Modificationen ein, wenn der gegebene Kegelschnitt K_1 eine Parabel, oder eine besondere Hyperbel (gleichseitig, oder mit stumpfen Asymptotenwinkel) ist.

Aus der Bestimmungsart und aus den angegebenen Eigenschaften des dem K_1 eingeschriebenen Parallelogramms FHF_1H_1 (oder $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$, Fig. 4.) geht hervor, dafs seine Winkel durch die respectiven Normalen (und Tangenten) des K_1 gehälftet werden, so dafs daher, im Falle K_1 eine Ellipse ist, sein Umfang ein Maximum sein mufs *), was den interessanten Satz giebt:

„Unter allen einer gegebenen Ellipse K_1 eingeschriebenen Vierecken hat dasjenige den gröfsten Umfang, dessen Ecken in den Berührungspuncten der Seiten eines der Ellipse umschriebenen Rechtecks liegen; es giebt unendlich viele solche Vierecke, nämlich jeder Punct der

---

*) S. meine Abhandl. im *Journal des mathém. de Mr. Liouville, tome VI*, oder im *Journ. f. Mathem. Bd. 24 S. 151 von Crelle.*

Ellipse ist Ecke eines solchen Vierecks, dessen Umfang ein Maximum ist: aber alle diese gröfsten Umfänge sind einander gleich, und zwar gleich der doppelten Diagonale des genannten Rechtecks, oder gleich der vierfachen Sehne, welche zwei Axen-Scheitel der Ellipse verbindet, also $= 4\sqrt{(a^2+b^2)} = 4\alpha$. *Alle diese Vierecke von gröfstem Umfange, die sämmtlich Parallelogramme, sind zugleich einer bestimmten andern Ellipse* M_1 *umgeschrieben, deren Axen* $2a_1$, $2b_1$ *auf die gleichnamigen Axen* $2a$, $2b$ *der gegebenen Ellipse* K_1 *fallen, und welche mit letzterer confocal ist. Nämlich zwischen den Axen beider Ellipsen finden folgende Gröfsen-Relationen Statt:*

$$1.\quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a^2}{b^2}; \qquad 2.\quad a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2;$$

und daraus

$$3.\quad a_1 = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \quad \textit{und} \quad b_1 = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}};$$

$$4.\quad a^2 = a_1(a_1+b_1) \quad \textit{und} \quad b^2 = b_1(a_1+b_1);$$

$$5.\quad (a_1+b_1)^2 = a^2+b^2 = \alpha^2;$$

$$6.\quad a_1 b_1 = \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2};$$

$$7.\quad ab = (a_1+b_1)\sqrt{(a_1 b_1)}; \text{ etc.}"$$

Hierbei will ich noch eines interessanten Umstandes erwähnen. Aus einem Satze nämlich, der zu meinen Untersuchungen über Maximum und Minimum gehört, läfst sich leicht darthun, dafs die nämlichen genannten Vierecke (FHF_1H_1 oder $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$) in Bezug auf die zweite Ellipse M_1 zugleich auch die Eigenschaft haben, dafs sie unter allen ihr umschriebenen Vierecken den kleinsten Umfang haben, so dafs man mit dem vorstehenden zugleich den folgenden Satz hat:

„Unter allen einer gegebenen Ellipse M_1 *umschriebenen Vierecken hat dasjenige den kleinsten Umfang, bei welchem die Normalen in den Berührungspuncten seiner Seiten eine Raute (gleichseitiges Viereck) bilden. Es giebt unendlich viele solche Vierecke, deren Umfang ein Minimum ist, jede Tangente der Ellipse ist Seite eines derselben, aber der Umfang ist bei allen gleich, und zwar gleich der doppelten Summe der Axen der Ellipse, also* $= 4a_1 + 4b_1$. *Alle diese Vierecke, Parallelogramme, sind zugleich einer bestimmten andern Ellipse* K_1 *eingeschrieben, und haben unter allen ihr eingeschriebenen Vierecken den gröfsten Umfang; etc.*"

Für je zwei Ellipsen, deren gleichnamige Axen aufeinander liegen und nach Gröfse den obigen Gleichungen (1.) und (2.) genügen, finden also die angegebenen Eigenschaften Statt, nämlich: dafs unendlich viele Parallelogramme der einen ein- und zugleich der andern sich umschreiben lassen, und dafs der Umfang derselben constant ist, und dafs dieser Umfang bei der ersten Ellipse ein Maximum, dagegen bei der andern ein Minimum ist, in Bezug auf alle andern Vierecke, welche jener ein- und dieser umgeschrieben sind. Auf je zwei conjugirte Durchmesser der innern Ellipse M_1 fallen die Diagonalen FF_1 und HH_1 eines der genannten Parallelogramme, sie werden durch die äufsere Ellipse K_1 begrenzt.

Der Inhalt der verschiedenen Parallelogramme (FHF_1H_1) ist nicht constant, so wenig als der Inhalt der zugehörigen (der Ellipse K_1 umschriebenen) Rechtecke, *„vielmehr ist jener ein Maximum oder ein Minimum, und dieser gleichzeitig umgekehrt ein Minimum oder ein Maximum, wenn die Seiten des Parallelogramms beziehlich den gleichen conjugirten Durchmessern oder den Axen der Ellipse K_1 parallel sind, oder wenn die Diagonalen des Rechtecks auf jene Durchmesser oder auf diese Axen fallen."* Wird der Inhalt des Rechtecks durch R und der Inhalt des zugehörigen Parallelogramms durch P bezeichnet, so ist stets

$$R.P = 8a^2b^2 = 8a_1b_1(a_1+b_1)^2,$$

also das Product der Inhalte constant. Werden ferner die Maxima der Inhalte R und P durch R_m und P_m, und die Minima durch R_n und P_n bezeichnet, so hat man

$$R_m = 2(a^2+b^2) = 2(a_1+b_1)^2, \quad \text{und} \quad R_n = 4ab = 4(a_1+b_1)\sqrt{(a_1b_1)};$$

$$P_n = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} = 4a_1b_1, \quad \text{und} \quad P_m = 2ab = 2(a_1+b_1)\sqrt{(a_1b_1)};$$

$$R_m \pm R_n = 2(a\pm b)^2;$$

$$P_m \pm P_n = 2(\sqrt{a_1}\pm\sqrt{b_1})^2\sqrt{(a_1b_1)}; \text{ etc.}$$

Über die der Ellipse K_1 umgeschriebenen Rechtecke $AA^0A_1A_1^0$ und die zugehörigen eingeschriebenen Parallelogramme $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ (oder FHF_1H_1) will ich hier noch folgende Eigenschaften angeben. Man bezeichne die Brennpuncte der Ellipse K_1 durch B und B_1, und setze $BB_1 = 2b$.

„Die vier Ecken jedes der genannten Rechtecke liegen mit den beiden Brennpuncten B und B_1 in einer gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}$, welche mit der Ellipse K_1 concentrisch ist, nämlich AA_1, $A^0A_1^0$, BB_1 zu Durchmessern und M zum Mittelpuncte hat; und ebenso liegen die Ecken des

Parallelogramms $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ *mit den Brennpuncten* B *und* B_1 *in einer andern gleichseitigen Hyperbel* $\mathfrak{H}_1$, *welche mit* $\mathfrak{H}$ *den Durchmesser* BB_1 *gemein hat, und also mit ihr und mit* K_1 *concentrisch ist. Die Hauptaxen* $2a$ *und* $2a_1$ *dieser beiden zusammengehörigen gleichseitigen Hyperbeln* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{H}_1$ *bilden einen constanten Winkel von* 45°, *und zudem ist die Summe der Biquadrate dieser Axen constant, und zwar dem Biquadrate jenes Durchmessers* BB_1 *oder* $2b$ *gleich, oder*

$$a^4 + a_1^4 = b^4.$$

Die auf diese Weise bestimmten zwei Schaaren gleichseitige Hperbeln, $S(\mathfrak{H})$ *und* $S(\mathfrak{H}_1)$, *sind im Ganzen nur eine und dieselbe Schaar,* $S(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1)$, *und als solche einfach dadurch bestimmt, dafs sie den reellen Durchmesser* BB_1 *gemein haben. Ihre Tangenten in den Scheiteln ihrer Hauptaxen berühren sämmtlich diejenige,* $\mathfrak{H}_0$, *unter ihnen, welche die gröfste Axe, nämlich den Durchmesser* BB_1 *zur Hauptaxe hat. Daher liegen die Hauptscheitel der* $S(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1)$ *in einer Lemniscate, welche* BB_1 *zur Axe und* M *zum Mittelpuncte hat.*" In dem Gesagten ist somit auch der Satz enthalten: „*Die Lemniscate hat die Eigenschaft, dafs die Summe der Biquadrate je zweier Durchmesser derselben, welche einen Winkel von* 45° *einschliefsen, constant, und zwar dem Biquadrat ihrer Axe gleich ist.*"

Durch Umkehrung folgt:

„*Jede gleichseitige Hyperbel* $\mathfrak{H}$ (*oder* $\mathfrak{H}_1$), *welche mit einer gegebenen Ellipse* K_1 *concentrisch ist und durch deren Brennpuncte* B, B_1 *geht, schneidet dieselbe in den Ecken* ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$) *irgend eines ihr eingeschriebenen Parallelogramms, oder in den Berührungspuncten der Seiten eines ihr umgeschriebenen Rechtecks.*" Oder:

„*Die Schaar gleichseitige Hyperbeln* $\mathfrak{H}$, *welche einen nach Gröfse und Lage gegebenen Durchmesser* BB_1 *gemein haben, besitzen die Eigenschaft, dafs die Tangenten in ihren Hauptscheiteln sämmtlich eine und dieselbe und zwar diejenige,* $\mathfrak{H}_0$, *unter ihnen berühren, welche jenen Durchmesser zur Hauptaxe hat; dafs ihre Hauptscheitel in einer Lemniscate liegen, welche denselben Durchmesser* BB_1 *zur Axe hat, und dafs auch ihre Brennpuncte in einer Lemniscate liegen, etc.*" Und ferner: „*Jeder mit den Hyperbeln concentrische Kreis* M, *dessen Durchmesser gröfser als* BB_1, *schneidet jede derselben in den Ecken eines Rechtecks* $AA^{\text{II}}A_1A_1^{\text{II}}$, *und alle diese Rechtecke sind einer und derselben Ellipse* K_1, *welche die Endpuncte* B *und* B_1 *jenes Durchmessers zu Brennpuncten hat, umge-*

schrieben und berühren sie in solchen 4 Puncten etc." Oder: „*Jede Ellipse K_1, welche die Endpuncte des Durchmessers BB_1 zu Brennpuncten hat, schneidet jede Hyperbel $\mathfrak{H}$ in den Ecken eines Parallelogramms, alle diese Parallelogramme haben gleichen Umfang und sind zugleich einer andern Ellipse M_1 umgeschrieben, welche mit jener concentrisch ist; u. s. w.* —

4. Die obige Betrachtung der beiden Kreisschaaren P und Q (1. u. f.), welche einen gegebenen Kegelschnitt K doppelt berühren, ist übrigens nur ein besonderer Fall von der allgemeinen Betrachtung, wo der gegebene Kegelschnitt K von solchen beliebigen andern Kegelschnitten P und Q berührt werden soll, welche durch zwei gegebene Puncte a und b gehen. Denn unter dieser Bedingung finden bekanntlich gleicherweise zwei Kegelschnitt-Schaaren P und Q Statt, welche die Eigenschaft haben, dafs ihre Berührungssehnen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ mit K beziehlich durch zwei feste Puncte p und q in der Geraden ab gehen. Diese Puncte p und q sind auch dadurch bestimmt, dafs sie sowohl zu den gegebenen Puncten a und b, als auch zu den Schnitten s und t der Geraden ab und des Kegelschnitts K zugeordnete harmonische Puncte sind. In jenem speciellen Falle nun, wo blofs verlangt wird, die Kegelschnitte P und Q sollen Kreise sein, werden durch diese Bedingung die Puncte a und b stillschweigend gesetzt, aber sie sind imaginär und liegen auf der unendlich entfernten Geraden ab der Ebene; dagegen bleiben die genannten festen Puncte p und q reell und liegen nach den Richtungen der Axen X und Y des Kegelschnitts K auf der unendlich entfernten Geraden ab, so dafs die Berührungssehnen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ beziehlich diesen Axen parallel laufen.

5. Wollte man die obige Betrachtung in der Art umkehren, dafs man zwei beliebige Kreise M und N als gegeben annähme und sodann die sämmtlichen Kegelschnitte K berücksichtigte, welche dieselben doppelt berühren, so würde man zu neuen Resultaten gelangen, deren Entwickelung hier zu weit führen würde. Aber auch diese Betrachtung wäre wiederum nur ein besonderer Fall von derjenigen, wo statt der gegebenen Kreise zwei beliebige Kegelschnitte M und N angenommen werden, und worüber ich das Nähere bei einer andern Gelegenheit mitzutheilen mir vorbehalte. Hier will ich mich auf folgende, darauf bezügliche Angaben beschränken.

Die Aufgabe:

„*Einen Kegelschnitt K zu finden, welcher jeden von drei gegebenen Kegelschnitten M, N, O doppelt berührt,*"

ist im Allgemeinen mehr als bestimmt, und nur unter gewissen beschränkenden Bedingungen möglich. Diese Bedingungen lassen sich wie folgt näher angeben.

Ein Kegelschnitt hat unendlich viele Trippel zugeordnete harmonische Pole x, y, z und zugeordnete harmonische Gerade X, Y, Z. Je zwei (in derselben Ebene liegende) Kegelschnitte haben ein solches Trippel zugeordnete harmonische Pole x, y, z und Gerade X, Y, Z gemein, und zwar sind jene die Ecken und diese die Seiten eines und desselben Dreiecks, oder sie haben drei Paar sich zugehörige Pole und Polaren x und X, y und Y, z und Z gemein (Abhäng. geom. Gestalten §. 44. S. 165 u. 166). Ferner haben die zwei Kegelschnitte drei Paar gemeinschaftliche Secanten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ (reell oder imaginär), welche sich beziehlich in jenen Polen x, y, z schneiden.

Nun seien a und A irgend eins der drei Paare sich zugehörige gemeinschaftliche Pole und Polaren der gegebenen Kegelschnitte M und N; ein eben solches Paar seien b und B von den Kegelschnitten M und O, und ein gleiches Paar seien c und C von den Kegelschnitten N und O; ferner seien α und α_1, β und β_1, γ und γ_1 die in den Polen a, b, c sich schneidenden gemeinschaftlichen Secanten der respectiven Kegelschnitte M und N, M und O, N und O; und endlich seien A_1, B_1, C_1 die Seiten bc, ac, ab des Dreiecks abc, so wie a_1, b_1, c_1 die Ecken des Dreiseits ABC: so sind die genannten Bedingungen folgende:

„Die Dreiecke abc und ABC (oder $a_1b_1c_1$) müssen perspectivisch sein, d. h. die drei Geraden aa_1, bb_1, cc_1 durch ihre entsprechenden Ecken müssen sich in einem Puncte treffen, oder, was gleichbedeutend, die drei Schnittpuncte ihrer entsprechenden Seiten (A und A_1, B und B_1, C und C_1) müssen in einer Geraden liegen; und ferner müssen die Seiten B_1 und C_1 zu den Secanten α und α_1, so wie die Seiten A_1 und C_1 zu den Secanten β und β_1, und ebenso die Seiten A_1 und B_1 zu den Secanten γ und γ_1 harmonisch sein."

Finden sich diese Bedingungen erfüllt, so giebt es einen Kegelschnitt K, welcher die drei gegebenen Kegelschnitte M, N und O doppelt berührt, und zwar sind dann die Seiten A_1, B_1, C_1 des Dreiecks abc zugleich seine Berührungssehnen mit den respectiven Kegelschnitten M, N, O; auch sind a und A, b und B, c und C drei Paar sich entsprechende Pole und Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt K, und dieser ist durch dieselben bestimmt. Und umgekehrt: wenn ein Kegelschnitt K irgend drei andere Kegelschnitte

M, N, O doppelt berührt, so finden die genannten Eigenschaften Statt. — Läfst man jeden der drei Kegelschnitte *M, N, O* entweder 1) in zwei Puncte oder 2) in zwei Gerade übergehen, so resultiren aus den angegebenen Bedingungen die bekannten *Pascal*'schen und *Brianchon*'schen Sätze über das einem Kegelschnitte *K* ein- oder umgeschriebene Sechseck. Ferner erhält man andere specielle Sätze, wenn von den drei Kegelschnitten *M, N, O* entweder 3) zwei in zwei Paar Puncte und der dritte in ein Paar Gerade, oder 4) einer in zwei Puncte und jeder der beiden übrigen in zwei Gerade übergeht.

6. In Rücksicht auf blofs einfache Berührung der Kegelschnitte unter einander ist meines Wissens bis jetzt noch wenig geschehen. In älterer und selbst bis in die neueste Zeit hat man sich fast ausschliefslich nur mit dem sehr beschränkten Falle, mit dem Berührungsproblem bei Kreisen beschäftigt, aber nicht mit den entsprechenden Aufgaben bei den allgemeinen Kegelschnitten. Die letztern sind aber auch in der That ungleich schwieriger. Um dies zu zeigen, wird es genügen, hier nur die folgende Hauptaufgabe hervorzuheben, nämlich

„Einen Kegelschnitt K zu finden, welcher irgend fünf gegebene Kegelschnitte berührt."

Beschränkt man sich darauf, nur die Anzahl der fraglichen Kegelschnitte *K*, nicht diese selbst zu finden, so läfst sich schon an gewissen speciellen Fällen ermessen, dafs dieselbe bedeutend gröfser sein mufs, als bei dem Problem über die Kreise, wo bekanntlich drei gegebene Kreise von 8 verschiedenen andern Kreisen berührt werden können. Denn z. B. schon für den Fall, wo jeder der fünf gegebenen Kegelschnitte aus zwei Geraden besteht, giebt es 32 Kegelschnitte *K*, welche der Aufgabe genügen; und eben so viele giebt es, wenn jeder der gegebenen Kegelschnitte aus zwei Puncten besteht. Und wenn ferner von den fünf gegebenen Kegelschnitten drei aus drei Paar Geraden und zwei aus zwei Paar Puncten bestehen, so finden schon 128 Auflösungen Statt; und eben so viele finden Statt, wenn zwei der gegebenen Kegelschnitte aus zwei Paar Geraden und die drei übrigen aus drei Paar Puncten bestehen. Diese respectiven 32 und 128 Kegelschnitte *K* sind übrigens auch selbst leicht zu finden, und zwar auf elementarem Wege, wie aus meinem kleinen Buche *) zu ersehen ist. Hiernach wird man um so mehr

*) Die geom. Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. §. 20. S. 97 u. 99. Berlin 1833, bei F. Dümmler.

eine hohe Zahl von Lösungen zu gewärtigen haben, wenn die gegebenen fünf Kegelschnitte beliebig sind *).

Durch eine gewisse geometrische Betrachtung glaube ich nun gefunden zu haben:

„Dafs fünf beliebige gegebene Kegelschnitte im Allgemeinen (und höchstens) von 7776 andern Kegelschnitten K berührt werden."

Mein Verfahren erhebt sich stufenweise bis zur vorgelegten Aufgabe. Nämlich zuerst stelle ich die Frage:

„Wie viele Kegelschnitte K giebt es, welche durch vier gegebene Puncte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt berühren?"

Hier ist leicht zu beweisen, dafs es im Allgemeinen 6 solche Kegelschnitte *K* giebt. Sodann ist die zweite Frage:

„Wie viele Kegelschnitte K können durch drei gegebene Puncte gehen und zwei gegebene Kegelschnitte berühren?"

Hier stellt sich heraus, dafs es $6.6 = 36$ solche Kegelschnitte giebt. Und wird auf diese Weise fortgefahren, so gelangt man zuletzt zu $6^5 = 7776$ Kegelschnitten *K*, welche der obigen Aufgabe entsprechen.

Bemerkung.

7. In Bezug auf den obigen Satz über die der Ellipse ein- oder umgeschriebenen Vierecke von beziehlich *gröfstem* oder *kleinstem* Umfange ist zu bemerken, dafs derselbe nur ein einzelner Fall eines umfassendern Satzes ist, welchen ich hier, nebst noch einigen andern Sätzen mittheilen will, die sämmtlich aus meinen anderweitigen Untersuchungen über Maximum und Minimum entnommen sind.

„Einer gegebenen Ellipse lassen sich unendlich viele solche convexe n Ecke einschreiben, deren Umfang ein Maximum ist, nämlich jeder Punct der Ellipse ist Ecke eines solchen n Ecks. Alle diese n Ecke sind zugleich einer bestimmten andern Ellipse umgeschrieben, und in Rücksicht auf alle andern derselben umgeschriebenen convexen n Ecke ist ihr Umfang ein Minimum." Oder auch umgekehrt:

„Einer gegebenen Ellipse lassen sich unendlich viele solche convexe n Ecke umschreiben, deren Umfang ein Minimum ist, nämlich jede

---

*) Selbst bei den genannten besondern Fällen läfst sich schon eine weit gröfsere Zahl von Lösungen nachweisen, als die angegebene, wenn bemerkt wird, dafs ein Kegelschnitt *K* einen andern, welcher 1) aus zwei Geraden oder 2) aus zwei Puncten besteht, schon berührt, wenn er nur 1) durch den Schnittpunct der Geraden geht, oder 2) die durch die Puncte gezogene Gerade berührt.

Tangente der Ellipse ist Seite eines solchen n Ecks; und alle diese n Ecke sind zugleich einer bestimmten andern Ellipse eingeschrieben und haben unter allen ihr eingeschriebenen convexen n Ecken den gröfsten Umfang, und zwar haben alle denselben Umfang."

Dieser Satz gilt nicht allein für die gewöhnlichen n Ecke von nur einem Umlaufe, sondern eben so für diejenigen von $2, 3, 4, \ldots u$ Umläufen, welche trotzdem ihre Seiten einander durchkreuzen, dennoch convex sein können (so z. B. bilden die 5 Diagonalen eines regelmäfsigen Fünfecks ein convexes Fünfeck von zwei Umläufen). Nämlich etwas allgemeiner gefafst hat man statt des vorstehenden Satzes den folgenden.

„*Von irgend einem Puncte A eines gegebenen Kegelschnitts K gehe ein Lichtstrahl unter beliebigem Winkel α aus und treffe den Kegelschnitt in einem zweiten Puncte B, werde hier von demselben reflectirt, oder (falls der reflectirte Strahl den Kegelschnitt nicht trifft) so gebrochen, dafs der gebrochene Strahl gerade die entgegengesetzte Richtung des reflectirten hat, eben so geschehe es in allen folgenden Puncten $C, D, E, \ldots$, in welchen der Lichtstrahl den Kegelschnitt trifft: so berührt der Lichtstrahl fortwährend einen bestimmten andern Kegelschnitt K_1; und läfst man sodann ferner von einem beliebigen andern Puncte A_1 des ersten Kegelschnitts K einen neuen Lichtstrahl A_1B_1 so ausgehen, dafs er den zweiten Kegelschnitt K_1 berührt, dann aber von dem ersten, eben so wie der erste Lichtstrahl, wiederholt reflectirt oder gebrochen wird, so berührt er gleicherweise auch fortwährend den nämlichen zweiten Kegelschnitt K_1.*"

Bei diesem Satze findet je einer von zwei verschiedenen Fällen Statt, nämlich der Lichtstrahl kehrt entweder

a) nach bestimmter Anzahl, u, Umläufen in den Anfangspunct A zurück, oder

b) er kehrt nie (oder nur nach unendlich vielen Umläufen) dahin zurück.

Im ersten Falle (*a*) durchläuft der Lichtstrahl die Seiten eines geschlossenen Vielecks N, etwa von n Seiten und u Umläufen, welches dem Kegelschnitte K ein- und zugleich dem Kegelschnitte K_1 umgeschrieben ist; und dabei kehrt der Lichtstrahl unter gleichem Winkel α nach dem Anfangspuncte A zurück, wie er von da ausgegangen ist, so dafs er bei fortgesetzter Bewegung das nämliche n Eck N wiederholt beschreibt. Und in diesem Falle beschreibt dann ferner auch jener genannte zweite Lichtstrahl A_1B_1, der von einem beliebigen andern Anfangspuncte A_1 ausgeht, allemal ebenfalls ein ge-

schlossenes, mit dem vorigen gleichnamiges, Polygon N_1, d. h. von gleicher Seitenzahl n und gleicher Umlaufszahl u.

Ist nun der erste Kegelschnitt K eine *Ellipse* und soll das Polygon N *convex* sein, so ist dann auch der zweite Kegelschnitt K_1 eine Ellipse, und alsdann haben die verschiedenen n Ecke N, N_1, ... die oben genannte Eigenschaft: *dafs sie unter allen der Ellipse K eingeschriebenen oder der Ellipse K_1 umgeschriebenen gleichartigen n Ecken beziehlich den gröfsten oder kleinsten Umfang haben, und dafs sie unter sich gleichen Umfang haben.*

Der Leitstrahl aus einem Brennpunct der Ellipse K nach jeder Ecke des n Ecks N (oder N_1, ...) theilt den zugehörigen Polygonwinkel in irgend zwei Theile x und y: wird die Summe der Cosinusse aller dieser Winkeltheile x, y mit der halben grofsen Axe der Ellipse K multiplicirt, so erhält man den Umfang U des n Ecks; oder in Zeichen

$$U = a.\Sigma(\cos x + \cos y) = 2a.\Sigma[\cos\tfrac{1}{2}(x+y).\cos\tfrac{1}{2}(x-y)].$$

In der oben citirten (3. Note) Abhandlung über Maximum und Minimum finden sich die Bedingungen angegeben, unter denen der Umfang eines geradlinigen Polygons N, welches einem beliebigen Curven-Polygon P oder einer einzelnen Curve P oder einem andern gleichnamigen geradlinigen Polygon P *eingeschrieben* ist, ein Minimum oder ein Maximum wird. Den dortigen Sätzen sind die nachfolgenden zur Seite zu stellen.

α. „Unter allen einem gegebenen (geradlinigen) n Eck N umgeschriebenen n Ecken kann der Umfang nur bei demjenigen, N_1, ein Minimum sein, welches die Eigenschaft hat, dafs in Betracht jeder Seite desselben das aus der in ihr liegenden Ecke des n Ecks N auf sie errichtete Perpendikel mit den beiden Strahlen, welche die an dieser Seite liegenden Aufsenwinkel des n Ecks N_1 hälften, in einem Puncte zusammentrifft.

Mag auch die Construction des n Ecks N_1 schwierig sein, so ist dagegen, wenn umgekehrt dasselbe als gegeben angenommen wird, alsdann dasjenige n Eck N, welchem es mit kleinstem Umfange umgeschrieben ist, sehr leicht zu construiren, wie aus dem Satze selbst erhellet.

β. „Unter allen einem gegebenen Curven-Polygon P, oder einer einzelnen gegebenen Curve P umgeschriebenen geradlinigen Polygonen P_1 von gleicher Seitenzahl, kann nur bei demjenigen der Umfang ein Minimum sein, welches die Eigenschaft hat, dafs in Betracht jeder Seite

desselben die Normale in ihrem Berührungspuncte mit den beiden Geraden, welche die der Seite anliegenden Aufsenwinkel des Polygons P_1 hälften, in irgend einem Puncte zusammentrifft."

Diese beiden Sätze (α. und β.) finden übrigens auf analoge Weise auch für die sphärischen Figuren Statt.

Für den speciellen Fall, wo das umzuschreibende Polygon P_1 nur ein Dreieck sein soll, hat die angegebene Bedingung (β.) zur Folge: ***„dafs die drei Normalen in den Berührungspuncten der Seiten des Dreiecks sich in einem und demselben Puncte treffen.***" Und in Rücksicht des ersten Satzes (α.) folgt ebenso: ***„dafs die in den Ecken des Dreiecks N auf die Seiten des Dreiecks N_1 errichteten drei Normalen in einem Puncte zusammentreffen.***"

Crelle, Journal d. Math. Bd. 37. Heft 2.

Facsimile einer Handschrift von Guido Grandi.

Rmo Pre Sig. Mio Prone Colmo

Godo infinitamte della memoria che V. P. Rma tiene d'un Umilmo suo Servre, pregiandomi più della sua gentilissa amicizia e dottissima corrispondenza, che di quante Badie, o Governi posso avere nella Religne; La ringrzo però, ciò non ostante, del cortese uffizio di congratulazione, che si degna di passar meco in ordine del governo conferitomi di S. Miche in Borgo di cota Città, e gliene attesto infinite obbligni. Non mancherò d'essere, con più comodo, da Monsr Bianchini per servirla della notizia, di cui mi ricerca, siccome altresì alla Certosa farò diligenza per vedere la medesima consegnata; che è quanto in fretta posso rispondere per ora alla compitissa sua, essendo occupatissimo in spedire la posta, che qta sera è assai copiosa. Mi riverisca tutta la dottissa Conversazione, e mi conservi il suo affetto, protestandomi d'essere sempre a' suoi riveriti comandi

Di V. P. Rma

Roma 3 Aprile 1717

Umo Obblmo Serve
D. Guido Grandi

10.

Über die Factoren der algebraisch lösbaren irreductibeln Gleichungen vom sechsten Grade und ihrer Resolventen.

(Von Herrn Dr. *E. Luther*, Privatdocenten an der Universität zu Königsberg.)

Bei der durch den Titel bezeichneten Untersuchung werden wir denselben Weg einschlagen, welcher in einem früher von uns mitgetheilten Aufsatze „De criteriis, quibus cognoscatur, an aequatio quinti gradus algebraice resolvi possit" verfolgt ist, um die Factoren der Resolventen einer algebraisch lösbaren irreductibeln Gleichung vom fünften Grade zu finden. Es wird aber nöthig sein, vorher die sämmtlichen Sätze zusammenzustellen, auf welche sich die Untersuchung stützt. Dies wird in den fünf ersten Paragraphen geschehen.

§. 1.

Jede algebraische Function y von gegebenen Gröfsen $x, x', x'', \ldots$ läfst sich bekanntlich aus folgenden Gröfsen rational zusammensetzen:

$$1. \quad \begin{cases} x, & x', & x'', & \ldots \\ \sqrt[n]{p}, & \sqrt[n']{p'}, & \sqrt[n'']{p''}, & \ldots \\ \sqrt[n_1]{p_1}, & \sqrt[n_1']{p_1'}, & \sqrt[n_1'']{p_1''}, & \ldots \\ \sqrt[n_2]{p_2}, & \sqrt[n_2']{p_2'}, & \sqrt[n_2'']{p_2''}, & \ldots \\ \ldots & & & \\ \sqrt[n_\mu]{p_\mu}, & \sqrt[n_\mu']{p_\mu'}, & \sqrt[n_\mu'']{p_\mu''}, & \ldots \end{cases}$$

Die sämmtlichen n sind Primzahlen; die Gröfsen p unter den Wurzelzeichen bezeichnen rationale Functionen sämmtlicher Gröfsen, oder einiger derselben, welche in den vorhergehenden horizontalen Reihen vorkommen, so dafs also die $p, p', p'', \ldots$ rationale Functionen von $x, x', x'', \ldots$; die $p_1, p_1', p_1'', \ldots$ rationale Functionen von $x, x', x'', \ldots \sqrt[n]{p}, \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''}, \ldots$ sind; u. s. f.

Offenbar läfst sich annehmen, dafs es unmöglich sei, *eine* der Wurzelgröfsen durch eine rationale Function der übrigen, welche in derselben hori-

zontalen Reihe vorkommen, und durch die Gröfsen in den vorhergehenden horizontalen Reihen auszudrücken: denn wäre es möglich, so könnte dieselbe, als nicht unumgänglich nöthig, bei der Bildung des Ausdrucks von y weggelassen werden.

Diejenigen Wurzelgröfsen in (1.), welche in den Gröfsen p der folgenden horizontalen Reihen nicht vorkommen, nennen wir *äufsere Wurzelgröfsen*. Nach dieser Definition ist leicht zu sehen:

1) Dafs die sämmtlichen Wurzelgröfsen der letzten horizontalen Reihe äufsere Wurzelgröfsen sind, dafs aber auch unter den Wurzelgröfsen der andern Reihen äufsere vorkommen können;

2) Dafs diese äufsern Wurzelgröfsen nicht durch die Wurzelgröfsen in den folgenden horizontalen Reihen, also überhaupt nicht durch die übrigen Wurzelgröfsen rational ausgedrückt werden können.

§. 2.

Abel hat gezeigt, dafs sich jede algebraische Function y von x, x', x ,.... auf die Form

$$2.\quad q_0+q_1p^{\frac{1}{n}}+q_2p^{\frac{2}{n}}+\ldots\, q_{n-1}p^{\frac{n-1}{n}}$$

bringen läfst, wo $p^{\frac{1}{n}}$ eine äufsere Wurzelgröfse bezeichnet und $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ rationale Functionen von den übrigen zur Bildung der Function y nöthigen Wurzelgröfsen und von $x, x', x'', \ldots$ sind. Er hat ferner gezeigt, dafs in diesem Ausdrucke immer $q_1 = 1$ gemacht werden kann. Dies geschieht dadurch, dafs man

$$q_1^n p = \pi,$$

oder wenn die Coëfficienten q_1 bis $q_{\nu-1}$ der Null gleich sind,

$$q_\nu^n p^\nu = \pi$$

setzt. Alsdann erhält der Ausdruck (2.) die Form

$$3.\quad q_0+\pi^{\frac{1}{n}}+k_2\pi^{\frac{2}{n}}+\ldots\, k_{n-1}\pi^{\frac{n-1}{n}};$$

wo $k_2 \ldots k_{n-1}$ rationale Functionen von $p, p_1, p_2, \ldots q_{n-1}$ bezeichnen. Es ist aber einleuchtend, dafs, wenn q_1 oder q_ν äufsere Wurzelgröfsen enthalten, diese in der Form (3.) nicht als äufsere Wurzelgröfsen erscheinen. Dadurch also, dafs man den Coëfficienten q_1 oder q_ν des Ausdrucks (2.) $= 1$ macht, wird die Anzahl der äufsern Wurzelgröfsen scheinbar verringert; aufser wenn q_1 oder q_ν keine äufsern Wurzelgröfsen enthalten. Dieser letzte Fall findet aber immer Statt, wenn y nur *eine* äufsere Wurzelgröfse $p^{\frac{1}{n}}$ enthält.

Da es für die vorliegende Untersuchung von Wichtigkeit ist, dafs man einer algebraischen Function immer diejenige Form gebe, welche zuläfst, dafs alle äufsern Wurzelgröfsen auch als äufsere auftreten, so sprechen wir folgenden Satz aus:

Eine algebraische Function y von x, x', x'', ..., welche m äufsere Wurzelgröfsen enthält, kann immer auf die Form

$$q_0+q_1p^{\frac{1}{n}}+q_2p^{\frac{2}{n}}+\ldots q_{n-1}p^{\frac{n-1}{n}}$$

gebracht werden, wo $p^{\frac{1}{n}}$ eine äufsere Wurzelgröfse ist und $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ rationale Functionen von x, x', x'' und den übrigen Wurzelgröfsen bezeichnen, unter welchen $m-1$ äufsere vorkommen.

In dem besondern Falle wenn $m=1$ ist, d. h. wenn die Function y nur eine äufsere Wurzelgröfse enthält, kann dieselbe auf die Form

$$q_0+p^{\frac{1}{n}}+q_2p^{\frac{2}{n}}+\ldots q_{n-1}p^{\frac{n-1}{n}}$$

gebracht werden, wo $p^{\frac{1}{n}}$ die einzige äufsere Wurzelgröfse bezeichnet und $q_0, q_2, \ldots q_{n-1}$ rationale Functionen von x, x', x'', ... und den übrigen Wurzelgröfsen sind.

§. 3.

Eine Gleichung:

$$r_0+r_1p^{\frac{1}{n}}+r_2p^{\frac{2}{n}}+\ldots r_{n-1}p^{\frac{n-1}{n}}=0,$$

wo $r_0, r_1, r_2, \ldots r_{n-1}, p$ algebraische Functionen gegebener Gröfsen x, x', x'', ... sind, durch welche sich $p^{\frac{1}{n}}$ nicht rational ausdrücken läfst, kann nur bestehen, wenn die Gleichungen

$$r_0=0,\quad r_1=0,\quad r_2=0,\quad \ldots\quad r_{n-1}=0$$

Statt finden.

Dieser Satz ist von *Abel* im §. 2. seines Beweises der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen höherer Grade allgemein zu lösen, aufgestellt und bewiesen (S. dieses Journal Bd. I. S. 65).

Aus diesem Satze geht unmittelbar der folgende Satz von *Abel* hervor:

Die Werthe

$$y_1 = q_0+q_1p^{\frac{1}{n}} + \ldots q_{n-1}p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$y_2 = q_0+q_1\alpha p^{\frac{1}{n}} + \ldots q_{n-1}\alpha^{n-1}p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = q_0+q_1\alpha^{n-1}p^{\frac{1}{n}} + \ldots q_{n-1}\alpha p^{\frac{n-1}{n}}$$

eines algebraischen Ausdrucks y*, welche man erhält, wenn man der äufsern Wurzelgröfse* $p^{\frac{1}{n}}$ *alle ihre Werthe:* $p^{\frac{1}{n}}, \alpha p^{\frac{1}{n}}, \ldots \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}}$ *giebt, sind sämmtlich von einander verschieden.*

§. 4.

Aus den beiden vorstehenden Sätzen folgt:

Jeder algebraische Ausdruck

$$y = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + \ldots q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

welcher m *äufsere Wurzelgröfsen* $p^{\frac{1}{n}}, p_1^{\frac{1}{n_1}}, p_2^{\frac{1}{n_2}}, \ldots p_{(m-1)}^{\frac{1}{n(m-1)}}$ *enthält, hat wenigstens* $n.n_1.n_2 \ldots n_{(m-1)}$ *verschiedene Werthe.*

Der zweite Satz in §. 3. besagt, dafs die Werthe

$$\begin{aligned} y_1 &= q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + \ldots q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}, \\ y_2 &= q_0 + q_1 \alpha p^{\frac{1}{n}} + \ldots q_{n-1} \alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= q_0 + q_1 \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + \ldots q_{n-1} \alpha p^{\frac{n-1}{n}} \end{aligned}$$

des Ausdrucks y alle von einander verschieden sind. Da der Ausdruck y mehrere äufsere Wurzelgröfsen enthält, so müssen wenigstens einige der Gröfsen $q_0, q_1, \ldots q_{n-1}$ Functionen der äufsern Wurzelgröfsen $p_1^{\frac{1}{n_1}}, p_2^{\frac{1}{n_2}}, \ldots$ sein. Giebt man daher der äufsern Wurzelgröfse $p_1^{\frac{1}{n_1}}$ irgend einen andern Werth $\omega p_1^{\frac{1}{n_1}}$, wo ω irgend eine imaginäre n_1^{te} Wurzel der Einheit bezeichnet, so erhält man folgendes neue System von Werthen:

$$1. \quad \begin{cases} y_1' = q_0' + q_1' p^{\frac{1}{n}} + \ldots q_{n-1}' p^{\frac{n-1}{n}}, \\ y_2' = q_0' + q_1' \alpha p^{\frac{1}{n}} + \ldots q_{n-1}' \alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = q_0' + q_1' \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + \ldots q_{n-1}' \alpha p^{\frac{n-1}{n}}. \end{cases}$$

Aus dem zweiten Satze in §. 3. folgt unmittelbar, dafs alle Werthe dieses Systems von einander verschieden sind, und zugleich, dafs die Werthe des einen Systems den correspondirenden Werthen des andern nicht gleich sein können.

Daher bleibt nur noch zu beweisen, dafs irgend ein Werth

$$2.\quad q_0 + \alpha_0 q_1 p^{\frac{1}{n}} + \ldots \alpha_0^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

des ersten Systems einem Werthe

$$3.\quad q_0' + \alpha_1 q_1' p^{\frac{1}{n}} + \ldots \alpha_1^{n-1} q_{n-1}' p^{\frac{n-1}{n}}$$

des zweiten Systems nicht gleich sein könne. Setzt man beide Werthe gleich, so findet sich

$$4.\quad (q_0 - q_0') + (\alpha_0 q_1 - \alpha_1 q_1') p^{\frac{1}{n}} + \ldots (\alpha_0^{n-1} q_{n-1} - \alpha_1^{n-1} q_{n-1}') p^{\frac{n-1}{n}} = 0.$$

Da sich nun $p^{\frac{1}{n}}$ nicht rational durch die Coëfficienten

$$(q_0 - q_0'),\quad (\alpha_0 q_1 - \alpha_1 q_1'),\quad \ldots\quad (\alpha_0^{n-1} q_{n-1} - \alpha_1^{n-1} q_{n-1}')$$

ausdrücken lassen darf, weil alsdann $p^{\frac{1}{n}}$ zur Bildung des Ausdrucks y nicht nothwendig wäre, so müssen, wenn die Gleichung (4.) bestehen soll, die Coëfficienten einzeln der Null gleich sein. Es müssen demnach folgende Gleichungen Statt finden:

$$5.\quad q_0 - q_0' = 0,$$

$$6.\quad \alpha_0 q_1 - \alpha_1 q_1' = 0,\quad \ldots\quad \alpha_0^{n-1} q_{n-1} - \alpha_1^{n-1} q_{n-1}' = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen kann nach §. 3. nur Statt haben, wenn q_0 keine Function der äufsern Wurzelgröfse $p_1^{\frac{1}{n_1}}$ ist. Die übrigen Gleichungen können, wie sich sogleich zeigen wird, nur bestehen, wenn die Gröfsen $q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ entweder einzeln der Null gleich, oder in dem Falle wo $n_1 = n$, solche Functionen von $p_1^{\frac{1}{n}}$ sind, dafs weder $p^{\frac{1}{n}}$, noch $p_1^{\frac{1}{n}}$, zur Bildung des Ausdrucks y nöthig ist.

Hieraus folgt, dafs die Gleichung (4.) nur allein in dem Falle möglich ist, wenn y, der Annahme zuwider, weder eine Function von $p^{\frac{1}{n}}$, noch von $p_1^{\frac{1}{n_1}}$ ist.

Um zu beweisen, dafs die Gleichungen (6.) nur dann bestehen können, wenn die Gröfsen $q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ entweder einzeln der Null gleich, oder falls $n_1 = n$, solche Functionen von $p_1^{\frac{1}{n}}$ sind, dafs weder $p^{\frac{1}{n}}$, noch $p_1^{\frac{1}{n}}$, zur Bildung des Ausdrucks y nöthig ist, entwickele man dieselben nach den Potenzen von $p_1^{\frac{1}{n_1}}$, indem man setzt:

$$7.\quad \begin{cases} q_1 = k_0 + k_1 p_1^{\frac{1}{n_1}} + \dots\, k_{n_1-1} p_1^{\frac{n_1-1}{n_1}}, \\ q_2 = k_0' + k_1' p_1^{\frac{1}{n_1}} + \dots\, k_{n_1-1}' p_1^{\frac{n_1-1}{n_1}}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ q_{n-1} = k_0^{(n-2)} + k_1^{(n-2)} p_1^{\frac{1}{n_1}} + \dots\, k_{n_1-1}^{(n-2)} p_1^{\frac{n_1-1}{n_1}}; \end{cases}$$

wo die Gröfsen k rationale Functionen von x, x', x'', ... und den übrigen Wurzelgröfsen sind, welche aufser $p^{\frac{1}{n}}$ und $p_1^{\frac{1}{n_1}}$ in y vorkommen. Substituirt man diese Ausdrücke (7.) und die aus ihnen hervorgehenden

$$\begin{aligned} q_1' &= k_0 + k_1 \omega p_1^{\frac{1}{n_1}} + \dots\, k_{n_1-1} \omega^{n_1-1} p_1^{\frac{n_1-1}{n_1}}, \\ q_2' &= k_0' + k_1' \omega p_1^{\frac{1}{n_1}} + \dots\, k_{n_1-1}' \omega^{n_1-1} p_1^{\frac{n_1-1}{n_1}}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ q_{n-1}' &= k_0^{(n-2)} + k_1^{(n-2)} \omega p_1^{\frac{1}{n_1}} + \dots\, k_{n_1-1}^{(n-2)} \omega^{n_1-1} p_1^{\frac{n_1-1}{n_1}} \end{aligned}$$

in die Gleichungen (6.), so ergiebt sich

$$8.\quad \begin{cases} (\alpha_0-\alpha_1)k_0 + (\alpha_0-\alpha_1\omega)k_1 p_1^{\frac{1}{n_1}} + \dots\, (\alpha_0-\alpha_1\omega^{n_1-1})k_{n_1-1} p_1^{\frac{n_1-1}{n_1}} = 0, \\ (\alpha_0^2-\alpha_1^2)k_0' + (\alpha_0^2-\alpha_1^2\omega)k_1' p_1^{\frac{1}{n_1}} + \dots\, (\alpha_0^2-\alpha_1^2\omega^{n_1-1})k_{n_1-1}' p_1^{\frac{n_1-1}{n_1}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ (\alpha_0^{n-1}-\alpha_1^{n-1})k_0^{(n-2)} + (\alpha_0^{n-1}-\alpha_1^{n-1}\omega)k_1^{(n-2)} p_1^{\frac{1}{n_1}} + \dots\, (\alpha_0^{n-1}-\alpha_1^{n-1}\omega^{n_1-1})k_{n_1-1}^{(n-2)} p_1^{\frac{n_1-1}{n_1}} = 0. \end{cases}$$

Da $p_1^{\frac{1}{n_1}}$ sich nicht rational durch die Coëfficienten dieser Gleichungen ausdrücken lassen darf, weil sonst $p_1^{\frac{1}{n_1}}$ eine rationale Function der übrigen Wurzelgröfsen in y wäre, so müssen, damit die Gleichungen (8.) bestehen können, die Coëfficienten derselben einzeln der Null gleich sein. Wenn aber die sämmtlichen Coëfficienten der Null gleich sind, so müssen entweder alle Gröfsen k einzeln der Null gleich sein, oder es mufs unter den Gröfsen

$$9.\quad \begin{cases} (\alpha_0-\alpha_1), & (\alpha_0-\alpha_1\omega), & \dots & (\alpha_0-\alpha_1\omega^{n_1-1}), \\ (\alpha_0^2-\alpha_1^2), & (\alpha_0^2-\alpha_1^2\omega), & \dots & (\alpha_0^2-\alpha_1^2\omega^{n_1-1}), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_0^{n-1}-\alpha_1^{n-1}), & (\alpha_0^{n-1}-\alpha_1^{n-1}\omega), & \dots & (\alpha_0^{n-1}-\alpha_1^{n-1}\omega^{n_1-1}) \end{cases}$$

wenigstens *eine* vorkommen, welche der Null gleich ist. Die erste verticale Reihe der Tafel (9.) kann, da n eine Primzahl ist, keine Gröfse enthalten, welche der Null gleich ist. Käme unter den übrigen Gröfsen der Tafel (9.)

eine Gröfse vor, welche der Null gleich wäre, so müfste eine Gleichung

$$\alpha_0^\nu - \alpha_1^\nu \omega^{\nu_1} = 0$$

Statt finden, in welcher ν irgend eine der Zahlen 1, 2, 3, ... $n-1$ und ν_1 irgend eine der Zahlen 1, 2, 3, ... n_1-1 bezeichnet. Alsdann wäre aber

$$\alpha_0^\nu = \alpha_1^\nu \omega^{\nu_1},$$
$$\alpha_0^{\nu.n} = \alpha_1^{\nu.n} \omega^{\nu_1.n},$$
$$1 = \omega^{\nu_1.n};$$

welche Gleichung, da n und n_1 Primzahlen sind und $\nu_1 < n_1$ ist, nie bestehen kann, aufser in dem speciellen Falle

$$n_1 = n.$$

In dem allgemeinen Falle, wenn n_1 nicht $= n$ ist, müfsten also, wenn die Gleichungen (8.) bestehen sollten, alle Gröfsen k, und folglich auch alle Gröfsen q, einzeln der Null gleich sein.

Wenn aber $n_1 = n$ ist, so bezeichnet ω eine der imaginären $n$ten Wurzeln der Einheit α, α^2, α^3, ... α^{n-1}. Alsdann sind unter den Gröfsen der Tafel (9.) folgende:

$$(\alpha_0 - \alpha_1\omega^\nu), \quad (\alpha_0^2 - \alpha_1^2\omega^{2\nu}), \quad \ldots\ldots \quad (\alpha_0^{n-1} - \alpha_1^{n-1}\omega^{(n-1)\nu})$$

der Null gleich, und folglich ist in jeder horizontalen Reihe der Tafel (9.) *eine* Gröfse der Null gleich. Da aber bekanntlich die Reihe

$$\omega^\nu, \quad \omega^{2\nu}, \quad \omega^{3\nu}, \quad \ldots\ldots \quad \omega^{(n-1)\nu}$$

alle $n-1$ Wurzeln

$$\omega, \quad \omega^2, \quad \omega^3, \quad \ldots\ldots \quad \omega^{n-1}$$

enthält, so können in keiner verticalen Reihe der Tafel (9.) mehrere Gröfsen vorkommen, welche der Null gleich sind. Es ergiebt sich demnach

$$q_1 = k_\nu p_1^{\frac{\nu}{n}},$$
$$q_2 = k'_{2\nu} p_1^{\frac{2\nu}{n}} \quad \text{oder, wenn } 2\nu > n \text{ ist,} \quad q_2 = \frac{k'_{(2\nu-n)}}{p_1} p_1^{\frac{2\nu}{n}}$$

u. s. f.

Bezeichnet man nun die Coëfficienten von $p_1^{\frac{\nu}{n}}$, $p_1^{\frac{2\nu}{n}}$, ... $p_1^{\frac{(n-1)\nu}{n}}$ in den Ausdrücken von q_1, q_2, ... q_{n-1} resp. mit k_1, k_2, ... k_{n-1}, so erhält man

$$q_1 = k_1 p_1^{\frac{\nu}{n}}, \quad q_2 = k_2 p_1^{\frac{2\nu}{n}}, \quad \ldots\ldots \quad q_{n-1} = k_{n-1} p_1^{\frac{(n-1)\nu}{n}};$$

wo k_1, k_2, ... k_{n-1} rationale Functionen von x, x', x'', ... und den übrigen Wurzelgröfsen sind, die aufser $p^{\frac{1}{n}}$ und $p_1^{\frac{1}{n}}$ in y vorkommen. Substituiren

wir diese Ausdrücke in den Ausdruck für y:

$$q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots\ldots q_{n-1} p_1^{\frac{n-1}{n}};$$

so erhalten wir

$$q_0 + k_1 p_1^{\frac{\nu}{n}} p^{\frac{1}{n}} + k_2 p_1^{\frac{2\nu}{n}} p^{\frac{2}{n}} + \ldots\ldots k_{n-1} p_1^{\frac{(n-1)\nu}{n}} p^{\frac{n-1}{n}};$$

welcher Ausdruck von der Form ist, dafs die Wurzelgröfsen $p^{\frac{1}{n}}$ und $p_1^{\frac{1}{n}}$ bei der Bildung des Ausdrucks y durch *eine* Wurzelgröfse $\{p_1^{\nu}.p\}^{\frac{1}{n}}$ ersetzt werden können, q. e. d.

§. 5.

In den §§. 3. und 4. des oben erwähnten Aufsatzes „De criteriis, quibus etc." sind die beiden folgenden Sätze bewiesen:

1) *Die Anzahl der Werthe eines algebraischen Ausdrucks ist immer ein Product aus den Exponenten gewisser Wurzelgröfsen, welche in ihm enthalten sind. Die Exponenten aller äufsern Wurzelgröfsen müssen nothwendig unter den Factoren dieses Products vorkommen.*

2) *Wenn einer Gleichung, deren Coëfficienten rationale Functionen von x, x', x'', ... sind, der Werth eines algebraischen Ausdrucks aus x, x', x'', ... genügt, so sind sämmtliche Werthe dieses Ausdrucks Wurzeln der Gleichung.*

Das bisher Gesagte möge als Einleitung zu der nun folgenden Untersuchung angesehen werden. Aus demselben geht unmittelbar hervor:

1) Dafs die Wurzeln einer algebraisch lösbaren irreductibeln Gleichung vom sechsten Grade die sechs verschiedenen Werthe eines algebraischen Ausdrucks sein müssen; und

2) Dafs ein algebraischer Ausdruck, welcher sechs verschiedene Werthe hat, eine Quadrat- und eine Cubikwurzel enthalten mufs, von denen wenigstens *eine* eine äufsere Wurzelgröfse ist.

Es kann demnach ein solcher Ausdruck drei verschiedene Formen *) annehmen, je nachdem die äufsere Wurzel die Quadratwurzel oder die Cubik-

*) Diese drei verschiedenen Formen sind drei verschiedene Hauptformen. Jede dieser Hauptformen zerfällt in zwei Nebenformen, je nachdem nur die nothwendige Quadrat- und Cubikwurzel in dem Ausdrucke vorkommen, oder noch eine Quadratwurzel darin enthalten ist. Dafs in einem Ausdrucke von sechs Werthen nur diese Wurzelgröfsen vorkommen können, ist leicht zu sehen. Wir werden in den Anmerkungen die erwähnte, nicht unbedingt nothwendige Quadratwurzel die *mögliche Quadratwurzel* nennen.

wurzel ist, oder endlich beide Wurzeln äufsere Wurzelgröfsen sind. Jeder dieser drei Fälle erfordert eine besondere Untersuchung.

§. 6.

Es sei y ein algebraischer Ausdruck aus $x, x', x'', \ldots$, welcher sechs verschiedene Werthe hat und eine Quadratwurzel als einzige äufsere Wurzelgröfse enthält. Die sechs Werthe von y seien:

$$10. \quad \begin{cases} y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{2}}, \\ y_2 = q_0' + p'^{\frac{1}{2}}, \\ y_3 = q_0'' + p''^{\frac{1}{2}}, \\ y_4 = q_0 - p^{\frac{1}{2}}, \\ y_5 = q_0' - p'^{\frac{1}{2}}, \\ y_6 = q_0'' - p''^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

wo q_0 und p algebraische Functionen von $x, x', x'', \ldots$ sind und q_0', q_0'', p', p'' die Werthe von q_0 und p bezeichnen, welche man erhält, wenn man der in ihnen vorkommenden Cubikwurzel ihre andern Werthe giebt.

Die Gröfsen q_0, p enthalten aufser der nothwendigen Cubikwurzel möglicherweise noch andere Wurzelgröfsen. Einer oder mehrere der in ihnen vorkommenden Wurzelgröfsen kann ein anderer Werth gegeben werden, so dafs sich aus den Werthen (10.) der Reihe noch die folgenden sechs Werthe des Ausdrucks y ergeben:

$$\begin{array}{l} Q_0 + P^{\frac{1}{2}}, \\ Q_0' + P'^{\frac{1}{2}}, \\ Q_0'' + P''^{\frac{1}{2}}, \\ Q_0 - P^{\frac{1}{2}}, \\ Q_0' - P'^{\frac{1}{2}}, \\ Q_0'' - P''^{\frac{1}{2}}. \end{array}$$

Da aber der Ausdruck y nur sechs verschiedene Werthe hat, so müssen die sechs vorstehenden Werthe mit den Werthen (10.), in irgend einer Ordnung genommen, übereinstimmen. Es mufs demnach eine Gleichung

$$11. \quad Q_0 + P^{\frac{1}{2}} = q_0^{(0)} + \beta_0 p^{(0)\frac{1}{2}}$$

Statt finden, wo $q_0^{(0)}$ eine der Gröfsen q_0, q_0', q_0'' und $p^{(0)}$ die correspondirende der Gröfsen p, p', p'' bezeichnet und β_0 eine zweite Wurzel der Einheit vorstellt.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\begin{aligned} P^{\frac{1}{2}} &= \{q_0^{(0)} - Q_0\} + \beta_0 p^{(0)\frac{1}{2}}, \\ P &= \{q_0^{(0)} - Q_0\}^2 + p^{(0)} + 2\beta_0 \{q_0^{(0)} - Q_0\} p^{(0)\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Da nun $p^{(0)\frac{1}{2}}$ nicht rational durch $q_0^{(0)}$, $p^{(0)}$, Q_0 und P sich ausdrücken lassen darf, so mufs nach dem ersten Satz in §. 3. der Coëfficient von $p^{(0)\frac{1}{2}}$ der Null gleich sein: also ist

$$2\beta_0\{q_0^{(0)} - Q_0\} = 0;$$

mithin erhalten wir:

$$Q_0 = q_0^{(0)},$$
$$P^{\frac{1}{2}} = \beta_0 p^{(0)\frac{1}{2}},$$

und folglich ist, wenn

$$Q_0 + P^{\frac{1}{2}} = q_0^{(0)} + \beta_0 p^{(0)\frac{1}{2}},$$

auch

$$Q_0 - P^{\frac{1}{2}} = q_0^{(0)} - \beta_0 p^{(0)\frac{1}{2}}.$$

Auf dieselbe Weise wie die Gleichung (11.) lassen sich auch die Gleichungen

$$Q_0' + P'^{\frac{1}{2}} = q_0^{(1)} + \beta_1 p^{(1)\frac{1}{2}},$$
$$Q_0'' + P''^{\frac{1}{2}} = q_0^{(2)} + \beta_2 p^{(2)\frac{1}{2}}$$

discutiren. Demnach ist leicht zu sehen, dafs man folgendes System von Gleichungen erhält:

$$Q_0 + P^{\frac{1}{2}} = q_0^{(0)} + \beta_0 p^{(0)\frac{1}{2}},$$
$$Q_0' + P'^{\frac{1}{2}} = q_0^{(1)} + \beta_1 p^{(1)\frac{1}{2}},$$
$$Q_0'' + P''^{\frac{1}{2}} = q_0^{(2)} + \beta_2 p^{(2)\frac{1}{2}},$$
$$Q_0 - P^{\frac{1}{2}} = q_0^{(0)} - \beta_0 p^{(0)\frac{1}{2}},$$
$$Q_0' - P'^{\frac{1}{2}} = q_0^{(1)} - \beta_1 p^{(1)\frac{1}{2}},$$
$$Q_0'' - P''^{\frac{1}{2}} = q_0^{(2)} - \beta_2 p^{(2)\frac{1}{2}},$$

wo $q_0^{(0)}$, $q_0^{(1)}$, $q_0^{(2)}$ und $q_1^{(0)}$, $q_1^{(1)}$, $q_1^{(2)}$, respect. q_0, q_0', q_0'' und q_1, q_1', q_1'' in irgend einer Ordnung genommen bezeichnen, und β_0, β_1, β_2 zweite Wurzeln der Einheit vorstellen. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich mit einiger Überlegung Folgendes.

12. *Die Gröfsen*

$Q_0 \quad Q_0' \quad Q_0'' \quad P \quad P' \quad P''$

können der Reihe nach die folgenden Werthe annehmen:

$$\begin{array}{cccccc}
q_0 & q_0' & q_0'' & p & p' & p'' \\
q_0' & q_0'' & q_0 & p' & p'' & p \\
q_0'' & q_0 & q_0' & p'' & p & p' \\
q_0 & q_0'' & q_0' & p & p'' & p' \\
q_0'' & q_0' & q_0 & p'' & p' & p \\
q_0' & q_0 & q_0'' & p' & p & p''
\end{array}$$ *).

*) Die drei letzten Reihen von Werthen für Q_0, Q_0', Q_0'', P, P', P'' rühren von der möglichen Quadratwurzel her.

Ferner können, wenn . . $P \quad P' \quad P''$
die Werthe . . . . $p \quad p' \quad p''$
haben, die Quadratwurzeln $P^{\frac{1}{2}} \quad P'^{\frac{1}{2}} \quad P''^{\frac{1}{2}}$
der Reihe nach die folgenden Werthe annehmen:

$$13.\quad \left\{\begin{array}{ccc} +p^{\frac{1}{2}} & +p'^{\frac{1}{2}} & +p''^{\frac{1}{2}} \\ -p^{\frac{1}{2}} & +p'^{\frac{1}{2}} & +p''^{\frac{1}{2}} \\ +p^{\frac{1}{2}} & -p'^{\frac{1}{2}} & +p''^{\frac{1}{2}} \\ +p^{\frac{1}{2}} & +p'^{\frac{1}{2}} & -p''^{\frac{1}{2}} \\ -p^{\frac{1}{2}} & -p'^{\frac{1}{2}} & -p''^{\frac{1}{2}} \\ +p^{\frac{1}{2}} & -p'^{\frac{1}{2}} & -p''^{\frac{1}{2}} \\ -p^{\frac{1}{2}} & +p'^{\frac{1}{2}} & -p''^{\frac{1}{2}} \\ -p^{\frac{1}{2}} & -p'^{\frac{1}{2}} & +p''^{\frac{1}{2}}. \end{array}\right.$$

§. 7.

$$14.\quad y^6 - Ay^5 + By^4 - Cy^3 + Dy^2 - Ey + F = 0$$

sei eine algebraisch-lösbare, irreductible Gleichung, deren Coëfficienten rationale Functionen der Gröfsen x, x', x'', ... sind. Die Wurzeln dieser Gleichung seien die sechs Werthe

$$15.\quad \left\{\begin{array}{l} y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{2}}, \\ y_2 = q_0' + p'^{\frac{1}{2}}, \\ y_3 = q_0'' + p''^{\frac{1}{2}}, \\ y_4 = q_0 - p^{\frac{1}{2}}, \\ y_5 = q_0' - p'^{\frac{1}{2}}, \\ y_6 = q_0'' - p''^{\frac{1}{2}} \end{array}\right.$$

eines algebraischen Ausdrucks aus x, x', x'', ..., welcher eine Quadratwurzel als einzige äufsere Wurzelgröfse hat. Giebt man alsdann den Functionen q_0, q_0', q_0'', p, p', p'' nach der Tabelle (12.) alle Werthe, deren sie fähig sind, so ist einleuchtend, dafs die Wurzeln der Gleichung (14.) auf folgende Weise:

$$\begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ y_2 & y_3 & y_1 & y_5 & y_6 & y_4 \\ y_3 & y_1 & y_2 & y_6 & y_4 & y_5 \\ y_1 & y_3 & y_2 & y_4 & y_6 & y_5 \\ y_3 & y_2 & y_1 & y_6 & y_5 & y_4 \\ y_2 & y_1 & y_3 & y_5 & y_4 & y_6 \end{array}$$

in einander übergehen. Giebt man ferner den Wurzelgröfsen $p^{\frac{1}{2}}$, $p'^{\frac{1}{2}}$, $p''^{\frac{1}{2}}$ alle Werthe nach der Tabelle (13.), so ist ersichtlich, dafs die Wurzeln auf fol-

gende Weise:

$$\begin{array}{cccccc}
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\
y_4 & y_2 & y_3 & y_1 & y_5 & y_6 \\
y_1 & y_5 & y_3 & y_4 & y_2 & y_6 \\
y_1 & y_2 & y_6 & y_4 & y_5 & y_3 \\
y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \\
y_1 & y_5 & y_6 & y_4 & y_2 & y_3 \\
y_4 & y_2 & y_6 & y_1 & y_5 & y_3 \\
y_4 & y_5 & y_3 & y_1 & y_2 & y_6
\end{array}$$

in einander übergehen. Hieraus folgt:

Wenn die Wurzeln der Gleichung (14.) *die durch die Gleichungen* (15.) *angegebene Form haben, so kann jede rationale Function der Wurzeln* y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, *welche für die 48 Versetzungen*

16.

123456	423156	153426	126453
231564	531264	261534	234561
312645	612345	342615	315642
132465	432165	162435	135462
321654	621354	351624	324651
213546	513246	243516	216543
456123	156423	426153	453126
564231	264531	534261	561234
645312	345612	615342	642315
465132	165432	435162	462135
654321	354621	624351	651324
546213	246513	516243	543216

ungeändert bleibt, nur einen Werth haben, mufs also eine rationale Function der Gröfsen x, x', x'', ... *sein.*

§. 8.

Man setze:

$$y_1+y_4 = Y_1,$$
$$y_2+y_5 = Y_2,$$
$$y_3+y_6 = Y_3.$$

Ferner setze man:

$$\{Y_1+\gamma Y_2+\gamma^2 Y_3\}^3 = O_1,$$
$$\{Y_1+\gamma^2 Y_2+\gamma Y_3\}^3 = O_2,$$

wo γ und γ^2 die imaginären dritten Wurzeln der Einheit bezeichnen. Alsdann ist

$$\Theta_1 + \Theta_2 = T^{XV}$$

eine der Wurzeln der Resolventen des *Lagrange* vom 15ten Grade (S. Traité de la résolution des équations numériques par *Lagrange*. Note XIII.).

Es ist aber

$$T^{XV} = 3\{y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2+y_6^2\} - \{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6\}^2$$
$$+ 9\{y_1y_4(y_1+y_4)+y_2y_5(y_2+y_5)+y_3y_6(y_3+y_6)\}$$
$$+18\{y_1y_2y_3+y_1y_2y_6+y_1y_3y_5+y_1y_5y_6+y_2y_3y_4+y_2y_4y_6+y_3y_4y_5+y_4y_5y_6\};$$

welcher Ausdruck für die 48 Versetzungen (16.) ungeändert bleibt. Setzt man in denselben für die Wurzeln y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 die Ausdrücke (15.), so erhält man zufolge des vorhergehenden Paragraphs, eine rationale Function der Gröfsen x, x', x'', ... Wir haben also folgendes Resultat gewonnen:

Wenn die Wurzeln einer algebraisch-lösbaren, irreductibeln Gleichung vom sechsten Grade, deren Coëfficienten rationale Functionen von x, x', x'' sind, eine Quadratwurzel als einzige äufsere Wurzelgröfse enthalten, so hat die Resolvente des Lagrange vom 15ten Grade einen in Bezug auf x, x', x'', ... rationalen Factor vom ersten Grade.

§. 9.

$$y^2 - u_1 y + v_1 = 0,$$
$$y^2 - u_2 y + v_2 = 0,$$
$$y^2 - u_3 y + v_3 = 0$$

seien die drei Factoren der Gleichung (14.), von denen der erste die Wurzeln y_1, y_4, der zweite die Wurzeln y_2, y_5, der dritte die Wurzeln y_3, y_6 hat. Alsdann sind die Coëfficienten u_1 u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 die Wurzeln der zwei Gleichungen

$$17.\quad \begin{cases} u^3 - Ru^2 + Su - T = 0, \\ v^3 - R_1 v^2 + S_1 v - T_1 = 0, \end{cases}$$

deren Coëfficienten folgende Functionen von den Wurzeln der Gleichung (14.) sind:

$$R = y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6,$$
$$S = y_1y_2+y_1y_3+y_1y_5+y_1y_6+y_2y_3+y_2y_4+y_2y_6+y_3y_4+y_3y_5+y_4y_5 +y_4y_6+y_5y_6,$$
$$T = y_1y_2y_3+y_1y_2y_6+y_1y_3y_5+y_1y_5y_6+y_2y_3y_4+y_2y_4y_6+y_3y_4y_5+y_4y_5y_6,$$
$$R_1 = y_1y_4+y_2y_5+y_3y_6,$$
$$S_1 = y_1y_2y_4y_5+y_1y_3y_4y_6+y_2y_3y_5y_6,$$
$$T_1 = y_1y_2y_3y_4y_5y_6.$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dafs

$$R = A \quad \text{und} \quad T_1 = F$$

ist und dafs die übrigen Coëfficienten S, T, R_1, S_1 solche Functionen von y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 sind, welche für die 48 Versetzungen (16.) ungeändert bleiben. Mithin sind die sämmtlichen Coëfficienten der Gleichungen (17.) rationale Functionen von x, x', x'', ... und es ist demnach folgender Satz bewiesen:

Eine algebraisch-lösbare, irreductible Gleichung vom sechsten Grade, deren Coëfficienten rationale Functionen von x, x', x'', ... sind und deren Wurzeln eine Quadratwurzel als einzige äufsere Wurzelgröfse enthalten, läfst sich immer in drei Factoren vom zweiten Grade zerlegen, deren Coëfficienten Wurzeln von Gleichungen dritten Grades sind, die rationale Functionen von x, x', x'', ... zu Coëfficienten haben.

§. 10.

Es sei jetzt y ein algebraischer Ausdruck aus x, x', x'', ..., welcher sechs verschiedene Werthe hat und eine Cubikwurzel als einzige äufsere Wurzelgröfse enthält. Die sechs Werthe von y seien:

$$18. \quad \begin{cases} y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{3}} + q_2 p^{\frac{2}{3}}, \\ y_2 = q_0 + \gamma p^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 q_2 p^{\frac{2}{3}}, \\ y_3 = q_0 + \gamma^2 p^{\frac{1}{3}} + \gamma q_2 p^{\frac{2}{3}}, \\ y_4 = q_0' + p'^{\frac{1}{3}} + q_2' p'^{\frac{2}{3}}, \\ y_5 = q_0' + \gamma p'^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 q_2' p'^{\frac{2}{3}}, \\ y_6 = q_0' + \gamma^2 p'^{\frac{1}{3}} + \gamma q_2' p'^{\frac{2}{3}}, \end{cases}$$

wo q_0, q_2 und p algebraische Functionen von x, x', x'', ... sind und q_0', q_2', p' die Werthe von q_0, q_2, p bezeichnen, welche man erhält, wenn man der in ihnen vorkommenden nothwendigen Quadratwurzel ihren andern Werth giebt. γ stellt eine der imaginären dritten Wurzeln der Einheit vor.

Die Gröfsen q_0, q_2, p enthalten aufser der nothwendigen Quadratwurzel möglicherweise noch andere Wurzelgröfsen. Einer oder mehreren der in ihnen vorkommenden Wurzelgröfsen kann ein anderer Werth gegeben werden, so dafs man aus den Werthen (18.) der Reihe nach die folgenden sechs Werthe des Ausdrucks y erhält:

$$\begin{aligned}
&Q_0 + P^{\frac{1}{3}} + Q_2 P^{\frac{2}{3}},\\
&Q_0 + \gamma P^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 Q_2 P^{\frac{2}{3}},\\
&Q_0 + \gamma^2 P^{\frac{1}{3}} + \gamma Q_2 P^{\frac{2}{3}},\\
&Q_0' + P'^{\frac{1}{3}} + Q_2' P'^{\frac{2}{3}},\\
&Q_0' + \gamma P'^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 Q_2' P'^{\frac{2}{3}},\\
&Q_0' + \gamma^2 P'^{\frac{1}{3}} + \gamma Q_2' P'^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Da aber der Ausdruck y nur sechs verschiedene Werthe hat, so müssen die sechs vorstehenden Werthe mit den Werthen (18.), in irgend einer Ordnung genommen, übereinstimmen.

Bei dieser Gleichsetzung sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden. In dem ersten Falle werden die drei Ausdrücke, in denen P vorkommt, dreien Ausdrücken gleichgesetzt, die entweder alle p, oder alle p' enthalten; in dem zweiten Falle findet sich in diesen Ausdrücken sowohl p, als p'. In beiden Fällen müssen aber unter den drei Ausdrücken zwei vorkommen, die entweder beide p, oder beide p' enthalten. Es komme p doppelt vor. Alsdann finden die zwei Gleichungen

$$19. \quad \begin{cases} Q_0 + \delta P^{\frac{1}{3}} + \delta^2 Q_2 P^{\frac{2}{3}} = q_0 + \delta' p^{\frac{1}{3}} + \delta'^2 q_2 p^{\frac{2}{3}}, \\ Q_0 + \varepsilon P^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^2 Q_2 P^{\frac{2}{3}} = q_0 + \varepsilon' p^{\frac{1}{3}} + \varepsilon'^2 q_2 p^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

Statt, wo sowohl δ und ε, als δ' und ε', zwei von einander verschiedene dritte Wurzeln der Einheit bezeichnen. Eliminirt man aus diesen Gleichungen $Q_2 P^{\frac{2}{3}}$, so ergiebt sich eine Gleichung von der Form

$$20. \quad P^{\frac{1}{3}} = r_0 + r_1 p^{\frac{1}{3}} + r_2 p^{\frac{2}{3}},$$

wo r_0, r_1, r_2 rationale Functionen von Q_0, q_0, q_2 bezeichnen, und hieraus

$$P = t_0 + t_1 p^{\frac{1}{3}} + t_2 p^{\frac{2}{3}},$$

wo t_0, t_1, t_2 rationale Functionen von r_0, r_1, r_2, p, also auch von Q_0, q_0, q_2, p sind. Da aber $p^{\frac{1}{3}}$ nicht rational durch Q_0, q_0, q_2, p, P sich ausdrücken lassen darf, so müssen nach dem ersten Satze in §. 3. die Gleichungen

$$t_1 = 0 \quad \text{und} \quad t_2 = 0$$

Statt finden. Mithin ist auch

$$P = \{r_0 + \gamma r_1 p^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 r_2 p^{\frac{2}{3}}\}^3,$$

also

$$\gamma^\nu P^{\frac{1}{3}} = r_0 + \gamma r_1 p^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 r_2 p^{\frac{2}{3}}.$$

Nach der Gleichung (20) ist aber:

$$\gamma^\nu P^{\frac{1}{3}} = \gamma^\nu r_0 + \gamma^\nu r_1 p^{\frac{1}{3}} + \gamma^\nu r_2 p^{\frac{2}{3}};$$

also folgt

$$(\gamma^r-1)r_0+(\gamma^r-\gamma)r_1p^{\frac{1}{3}}+(\gamma^r-\gamma^2)r_2p^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Es darf aber $p^{\frac{1}{3}}$ nicht rational durch r_0, r_1, r_2, p sich ausdrücken lassen; also müssen die Coëfficienten

$$(\gamma^r-1)r_0,\quad (\gamma^r-\gamma)r_1,\quad (\gamma^r-\gamma^2)r_2$$

einzeln der Null gleich sein. Unter den Ausdrücken γ^r-1, $\gamma^r-\gamma$, $\gamma^r-\gamma^2$ kann aber, da 3 eine Primzahl ist, nur allein der Ausdruck $\gamma^r-\gamma^r$ der Null gleich sein. Es müssen mithin zwei der Functionen r_0, r_1, r_2 gleich Null sein. Hieraus folgt, mit Berücksichtigung der Gleichung (20.), dafs eine der Gleichungen:

$$P^{\frac{1}{3}} = r_0,\qquad P^{\frac{1}{3}} = r_1p^{\frac{1}{3}},\qquad P^{\frac{1}{3}} = r_2p^{\frac{2}{3}}$$

Statt finden mufs. Die erste derselben kann nicht bestehen, da $P^{\frac{1}{3}}$ nicht rational durch Q_0, q_0, q_2 sich ausdrücken lassen darf. Es mufs mithin

$$P^{\frac{1}{3}} = r_1p^{\frac{1}{3}},\quad \text{eder} \quad = r_2p^{\frac{2}{3}}$$

sein. Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (19.), se erhält man entweder

$$\{Q_0-q_0\}+\{\delta r_1-\delta'\}p^{\frac{1}{3}}+\{\delta^2Q_2r_1^2-\delta'^2q_2\}p^{\frac{2}{3}} = 0,$$
$$\{Q_0-q_0\}+\{\varepsilon r_1-\varepsilon'\}p^{\frac{1}{3}}+\{\varepsilon^2Q_2r_1^2-\varepsilon'^2q_2\}p^{\frac{2}{3}} = 0,$$

oder

$$\{Q_0-q_0\}+\{\delta^2Q_2r_2^2p-\delta'\}p^{\frac{1}{3}}+\{\delta r_2-\delta'^2q_2\}p^{\frac{2}{3}} = 0,$$
$$\{Q_0-q_0\}+\{\varepsilon^2Q_2r_2^2p-\varepsilon'\}p^{\frac{1}{3}}+\{\varepsilon r_2-\varepsilon'^2q_2\}p^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, da nach dem ersten Satze in §. 3. die Gröfsen in den Klammern einzeln der Null gleich sein müssen, entweder

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon},\qquad Q_0 = q_0,\qquad Q_2 = q_2,\qquad P^{\frac{1}{3}} = \frac{\delta'}{\delta}p^{\frac{1}{3}},$$

oder

$$\frac{\delta'^2}{\delta} = \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon},\qquad Q_0 = q_0,\qquad Q_2 = \frac{1}{pq_2^2},\qquad P^{\frac{1}{3}} = \frac{\delta'^2}{\delta}q_2p^{\frac{2}{3}},$$

und hieraus

$$Q_0+\zeta P^{\frac{1}{3}}+\zeta^2Q_2P^{\frac{2}{3}} = q_0+\zeta\frac{\delta'}{\delta}p^{\frac{1}{3}}+\zeta^2\frac{\delta'^2}{\delta^2}q_2p^{\frac{2}{3}},$$

oder

$$Q_0+\zeta P^{\frac{1}{3}}+\zeta^2Q_2P^{\frac{2}{3}} = q_0+\zeta^2\frac{\delta'}{\delta^2}p^{\frac{1}{3}}+\zeta\frac{\delta'^2}{\delta}q_2p^{\frac{2}{3}}.$$

In beiden Fällen ergiebt sich

$$Q_0+\zeta P^{\frac{1}{3}}+\zeta^2Q_2P^{\frac{2}{3}} = q_0+\zeta'p^{\frac{1}{3}}+\zeta'^2q_2p^{\frac{2}{3}},$$

wo ζ die von δ und ε, ζ' die von δ' und ε' verschiedene dritte Wurzel der Einheit ist.

Hieraus folgt, dafs von den beiden zuerst aufgestellten Fällen nur der *erste* möglich ist, dafs also die drei Ausdrücke, in denen P vorkommt, nur dreien Ausdrücken (18.) gleich gesetzt werden können, die alle entweder p, oder alle p' enthalten.

Demnach ist leicht zu sehen, dafs wir folgendes System von Gleichungen erhalten werden:

$$
\begin{aligned}
Q_0 + P^{\frac{1}{3}} + Q_2 P^{\frac{2}{3}} &= q_0^{(0)} + \gamma_0 p^{(0)\frac{1}{3}} + \gamma_0^2 q_2^{(0)} p^{(0)\frac{2}{3}},\\
Q_0 + \gamma P^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 Q_2 P^{\frac{2}{3}} &= q_0^{(0)} + \gamma_1 p^{(0)\frac{1}{3}} + \gamma_1^2 q_2^{(0)} p^{(0)\frac{2}{3}},\\
Q_0 + \gamma^2 P^{\frac{1}{3}} + \gamma Q_2 P^{\frac{2}{3}} &= q_0^{(0)} + \gamma_2 p^{(0)\frac{1}{3}} + \gamma_2^2 q_2^{(0)} p^{(0)\frac{2}{3}},\\
Q_0' + P'^{\frac{1}{3}} + Q_2' P'^{\frac{2}{3}} &= q_0^{(1)} + \gamma_3 p^{(1)\frac{1}{3}} + \gamma_3^2 q_2^{(1)} p^{(1)\frac{2}{3}},\\
Q_0' + \gamma P'^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 Q_2' P'^{\frac{2}{3}} &= q_0^{(1)} + \gamma_4 p^{(1)\frac{1}{3}} + \gamma_4^2 q_2^{(1)} p^{(1)\frac{2}{3}},\\
Q_0' + \gamma^2 P'^{\frac{1}{3}} + \gamma Q_2' P'^{\frac{2}{3}} &= q_0^{(1)} + \gamma_5 p^{(1)\frac{1}{3}} + \gamma_5^2 q_2^{(1)} p^{(1)\frac{2}{3}},
\end{aligned}
$$

wo entweder $q_0^{(0)}$, $q_2^{(0)}$, $p^{(0)}$ respective q_0, q_2, p, und $q_0^{(1)}$, $q_2^{(1)}$, $p^{(1)}$ respective q_0', q_2', p' oder umgekehrt bezeichnen, und γ_0, γ_1, γ_2, so wie γ_3, γ_4, γ_5 die dritten Wurzeln der Einheit sind.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch einige Überlegung Folgendes:

21. *Die Gröfsen* Q_0, Q_0', P, P', $Q_2^3P^2$, $Q_2'^3P'^2$ *können der Reihe nach die folgenden Werthe annehmen:*

Q_0	Q_0'	P	P'	$Q_2^3P^2$	$Q_2'^3P'^2$
q_0	q_0'	p	p'	$q_2^3p^2$	$q_2'^3p'^2$
q_0'	q_0	p'	p'	$q_2'^3p'^2$	$q_2^3p^2$
q_0	q_0'	$q_2^3p^2$	p'	p	$q_2'^3p'^2$
q_0'	q_0	$q_2'^3p'^2$	p	p'	$q_2^3p^2$
q_0	q_0'	p	$q_2'^3p'^2$	$q_2^3p^2$	p'
q_0'	q_0	p'	$q_2^3p^2$	$q_2'^3p'^2$	p
q_0	q_0'	$q_2^3p^2$	$q_2'^3p'^2$	p	p'
q_0'	q_0	$q_2'^3p'^2$	$q_2^3p^2$	p'	p *).

*) Die sechs letzten Reihen von Werthen für Q_0, Q_0', P, P', $Q_2^3P^2$, $Q_2'^3P'^2$ rühren von der möglichen Quadratwurzel her.

Ferner können, wenn	P	P'
die Werthe	p	p'
haben, die Cubikwurzeln	$P^{\frac{1}{3}}$	$P'^{\frac{1}{3}}$
der Reihe nach die folgenden Werthe annehmen:		
	$p^{\frac{1}{3}}$	$p'^{\frac{1}{3}}$
	$\gamma p^{\frac{1}{3}}$	$p'^{\frac{1}{3}}$
	$\gamma^2 p^{\frac{1}{3}}$	$p'^{\frac{1}{3}}$
22.	$p^{\frac{1}{3}}$	$\gamma p'^{\frac{1}{3}}$
	$\gamma p^{\frac{1}{3}}$	$\gamma p'^{\frac{1}{3}}$
	$\gamma^2 p^{\frac{1}{3}}$	$\gamma p'^{\frac{1}{3}}$
	$p^{\frac{1}{3}}$	$\gamma^2 p'^{\frac{1}{3}}$
	$\gamma p^{\frac{1}{3}}$	$\gamma^2 p'^{\frac{1}{3}}$
	$\gamma^2 p^{\frac{1}{3}}$	$\gamma^2 p'^{\frac{1}{3}}$

§. 11.

$$23.\quad y^6 - A_1 y^5 + B_1 y^4 - C_1 y^3 + D_1 y^2 - E_1 y + F_1 = 0$$

sei eine algebraisch-lösbare, irreductible Gleichung, deren Coëfficienten rationale Functionen der Gröfsen x, x', x'', ... sind. Die Wurzeln dieser Gleichung seien die sechs Werthe

$$24.\quad \begin{cases} y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{3}} + q_2 p^{\frac{2}{3}}, \\ y_2 = q_0 + \gamma p^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 q_2 p^{\frac{2}{3}}, \\ y_3 = q_0 + \gamma^2 p^{\frac{1}{3}} + \gamma q_2 p^{\frac{2}{3}}, \\ y_4 = q_0' + p'^{\frac{1}{3}} + q_2' p'^{\frac{2}{3}}, \\ y_5 = q_0' + \gamma p'^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 q_2' p'^{\frac{2}{3}}, \\ y_0 = q_0' + \gamma^2 p'^{\frac{1}{3}} + \gamma q_2' p'^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

eines algebraischen Ausdrucks aus x, x', x'', ..., welcher eine Cubikwurzel als einzige äufsere Wurzelgröfse hat. Giebt man alsdann den Functionen q_0, q_0', p, p', $q_2^3 p^2$, $q_2'^3 p'^2$ nach der Tafel (21.) alle Werthe, deren sie fähig sind, so ist einleuchtend, dafs die Wurzeln der Gleichung (23.) auf folgende Weise:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_4	y_5	y_0	y_1	y_2	y_3
y_1	y_3	y_2	y_4	y_5	y_6
y_4	y_6	y_5	y_1	y_2	y_3
y_1	y_2	y_3	y_4	y_6	y_5
y_4	y_5	y_6	y_1	y_3	y_2
y_1	y_3	y_2	y_4	y_6	y_5
y_4	y_6	y_5	y_1	y_3	y_2

in einander übergehen. Giebt man ferner den Wurzelgröfsen $p^{\frac{1}{3}}$, $p'^{\frac{1}{3}}$ alle Werthe nach der Tafel (22.), so ist es ersichtlich, dafs die Wurzeln auf folgende Weise:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_2	y_3	y_1	y_4	y_5	y_6
y_3	y_1	y_2	y_4	y_5	y_6
y_1	y_2	y_3	y_5	y_6	y_4
y_2	y_3	y_1	y_5	y_6	y_4
y_3	y_1	y_2	y_5	y_6	y_4
y_1	y_2	y_3	y_6	y_4	y_5
y_2	y_3	y_1	y_6	y_4	y_5
y_3	y_1	y_2	y_6	y_4	y_5

in einander übergehen. Hieraus folgt:

Wenn die Wurzeln der Gleichung* (23.) *die durch die Gleichungen* (24.) *angegebene Form haben, so kann jede rationale Function der Wurzeln* $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$, *welche für die 72 Versetzungen:

25.

123456	132456	123465	132465
231456	213456	231465	213465
312456	321456	312465	321465
123564	132564	123546	132546
231564	213564	231546	213546
312564	321564	312546	321546
123645	132645	123654	132654
231645	213645	231654	213654
312645	321645	312654	321654
456123	456132	465123	465132
456231	456213	465231	465213
456312	456321	465312	465321
564123	564132	546123	546132
564231	564213	546231	546231
564312	564321	546312	546321
645123	645132	654123	654132
645231	645213	654231	654213
645312	645321	654312	654321

ungeändert bleibt, nur einen Werth haben, mufs also eine rationale Function der Gröfsen* x, x', x'', ... *sein.

27 *

§. 12.

Man setze

$$y_1+y_2+y_3 = Y_1,$$
$$y_4+y_5+y_6 = Y_2.$$

Alsdann ist

$$\{Y_1-Y_2\}^2 = T^x$$

eine der Wurzeln der Resolventen des *Lagrange* vom 10ten Grade (S. Traité de la résolution des équations numériques par *Lagrange*. Note XIII.).

Es ist aber

$$T^x = y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2+y_6^2+2\{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3+y_4y_5+y_4y_6+y_5y_6\}$$
$$-2\{y_1y_4+y_1y_5+y_1y_6+y_2y_4+y_2y_5+y_2y_6+y_3y_4+y_3y_5+y_3y_6\},$$

welcher Ausdruck für die 72 Versetzungen (25.) ungeändert bleibt. Setzt man in denselben für die Wurzeln y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 die Ausdrücke (24.), so erhält man gemäfs dem vorhergehenden Paragraphen eine rationale Function der Gröfsen x, x', x'', ... Es ist also folgendes Resultat gewonnen:

Wenn die Wurzeln einer algebraisch-lösbaren, irreductibeln Gleichung vom sechsten Grade, deren Coëfficienten rationale Functionen von x, x', x'', ... sind, eine Cubikwurzel als einzige äufsere Wurzelgröfse enthalten, so hat die Resolvente des Lagrange vom 10ten Grade einen in Bezug auf x, x', x'', ... rationalen Factor vom ersten Grade.

§. 13.

$$y^3-u_1y^2+v_1y-w_1 = 0,$$
$$y^3-u_2y^2+v_2y-w_2 = 0$$

seien die zwei Factoren der Gleichung (23.), von denen der erste die Wurzeln y_1, y_2, y_3, der zweite die Wurzeln y_4, y_5, y_6 hat. Alsdann sind die Coëfficienten u_1, u_2; v_1, v_2 und w_1, w_2 die Wurzeln dreier Gleichungen:

26. $u^2-Uu+V=0,\quad v^2-U_1v+V_1=0,\quad w^2-U_2w+V_2=0,$

deren Coëfficienten die folgenden Functionen von den Wurzeln der Gleichung (23.) sind:

$$U = y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6,$$
$$V = y_1y_4+y_1y_5+y_1y_6+y_2y_4+y_2y_5+y_2y_6+y_3y_4+y_3y_5+y_3y_6,$$
$$U_1 = y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3+y_4y_5+y_4y_6+y_5y_6,$$
$$V_1 = y_1y_2y_4y_5+y_1y_2y_4y_6+y_1y_2y_5y_6+y_1y_3y_4y_5+y_1y_3y_4y_6+y_1y_3y_5y_6$$
$$+y_2y_3y_4y_5+y_2y_3y_4y_6+y_2y_3y_5y_6,$$
$$U_2 = y_1y_2y_3+y_4y_5y_6,$$
$$V_2 = y_1y_2y_3y_4y_5y_6.$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dafs

$$U = A_1 \quad \text{und} \quad V_2 = F_1$$

ist und dafs die übrigen Coëfficienten V, U_1, V_1, U_2 solche Functionen von y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 sind, welche für die 72 Versetzungen (25.) ungeändert bleiben. Mithin sind die sämmtlichen Coëfficienten der Gleichungen (26.) rationale Functionen von x, x', x'', ..., und es ist demnach der folgende Satz bewiesen:

Eine algebraisch-lösbare, irreductible Gleichung vom sechsten Grade, deren Coëfficienten rationale Functionen von x, x', x'', ... sind und deren Wurzeln eine Cubikwurzel als einzige äufsere Wurzelgröfse enthalten, läfst sich immer in zwei Factoren vom dritten Grade zerlegen, deren Coëfficienten Wurzeln von Gleichungen zweiten Grades sind, die rationale Functionen von x, x', x'', ... zu Coëfficienten haben.

§. 14.

Es sei endlich y ein algebraischer Ausdruck aus x, x', x'', ..., welcher sechs verschiedene Werthe hat und zwei äufsere Wurzelgröfsen enthält. Alsdann kann y nach §. 2. immer, wenn man die beiden äufsern Wurzelgröfsen durch $p^{\frac{1}{2}}$ und $\pi^{\frac{1}{3}}$ bezeichnet, sowohl auf die Form

$$q_0 + q_1 p^{\frac{1}{2}},$$

als auch auf die Form

$$k_0 + k_1 \pi^{\frac{1}{3}} + k_2 \pi^{\frac{2}{3}}$$

gebracht werden.

Für die *erste* Form seien die sechs verschiedenen Werthe von y folgende:

$$27. \quad \begin{cases} y_1 = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{2}}, \\ y_2 = q_0' + q_1' p^{\frac{1}{2}}, \\ y_3 = q_0'' + q_1'' p^{\frac{1}{2}}, \\ y_4 = q_0 - q_1 p^{\frac{1}{2}}, \\ y_5 = q_0' - q_1' p^{\frac{1}{2}}, \\ y_6 = q_0'' - q_1'' p^{\frac{1}{2}}; \end{cases}$$

wo q_0, q_1 algebraische Functionen von x, x', x'' sind, von denen jede oder eine die äufsere Cubikwurzel $\pi^{\frac{1}{3}}$ enthält, und q_0', q_0'', q', q_1'' die Werthe von q_0 und q_1 bezeichnen, welche man erhält, wenn man der Wurzel $\pi^{\frac{1}{3}}$ ihre andern Werthe giebt. Die Gröfsen q_0, q_1, p enthalten aufser der Cubikwurzel $\pi^{\frac{1}{3}}$ möglicherweise noch andere Wurzelgröfsen. Einer oder mehreren der in ihnen vorkommenden Wurzelgröfsen kann ein anderer Werth gegeben werden, so

dafs man aus den Werthen (27.) der Reihe nach die folgenden sechs Werthe des Ausdrucks y erhält:

$$28.\quad \begin{cases} Q_0 + Q_1 P^{\frac{1}{2}}, \\ Q_0' + Q_1' P^{\frac{1}{2}}, \\ Q_0'' + Q_1'' P^{\frac{1}{2}}, \\ Q_0 - Q_1 P^{\frac{1}{2}}, \\ Q_0' - Q_1' P^{\frac{1}{2}}, \\ Q_0'' - Q_1'' P^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

welche mit den Werthen (27.), in irgend einer Ordnung genommen, übereinstimmen müssen.

Für die *zweite* Form Folgendes die 6 verschiedenen Werthe von y:

$$29.\quad \begin{cases} y_1 = k_0 + k_1\pi^{\frac{1}{3}} + k_2\pi^{\frac{2}{3}}, \\ y_2 = k_0 + \gamma k_1\pi^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 k_2\pi^{\frac{2}{3}}, \\ y_3 = k_0 + \gamma^2 k_1\pi^{\frac{1}{3}} + \gamma k_2\pi^{\frac{2}{3}}, \\ y_4 = k_0' + k_1'\pi^{\frac{1}{3}} + k_2'\pi^{\frac{2}{3}}, \\ y_5 = k_0' + \gamma k_1'\pi^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 k_2'\pi^{\frac{2}{3}}, \\ y_6 = k_0' + \gamma^2 k_1'\pi^{\frac{1}{3}} + \gamma k_2'\pi^{\frac{2}{3}}, \end{cases}$$

wo k_0, k_1, k_2 algebraische Functionen von x, x', x'', ... sind, von denen alle oder einige die äufsere Quadratwurzel $p^{\frac{1}{2}}$ enthalten, und k_0', k_1', k_2' die Werthe von k_0, k_1, k_2 bezeichnen, welche man erhält, wenn man der Wurzel $p^{\frac{1}{2}}$ ihren andern Werth giebt. γ stellt eine der imaginären dritten Wurzeln der Einheit vor. Die Gröfsen k_0, k_1, k_3 und π enthalten aufser der Quadratwurzel $p^{\frac{1}{2}}$ möglicherweise noch andere Wurzelgröfsen. Einer oder mehreren der in ihnen vorkommenden Wurzelgröfsen kann ein anderer Werth gegeben werden, so dafs sich aus den Werthen (29.) der Reihe nach die folgenden sechs Werthe des Ausdrucks y ergeben:

$$30.\quad \begin{cases} K_0 + K_1\Pi^{\frac{1}{3}} + K_2\Pi^{\frac{2}{3}}, \\ K_0 + \gamma K_1\Pi^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 K_2\Pi^{\frac{2}{3}}, \\ K_0 + \gamma^2 K_1\Pi^{\frac{1}{3}} + \gamma K_2\Pi^{\frac{2}{3}}, \\ K_0' + K_1'\Pi^{\frac{1}{3}} + K_2'\Pi^{\frac{2}{3}}, \\ K_0' + \gamma K_1'\Pi^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 K_2'\Pi^{\frac{2}{3}}, \\ K_0' + \gamma^2 K_1'\Pi^{\frac{1}{3}} + \gamma K_2'\Pi^{\frac{2}{3}}, \end{cases}$$

welche mit den Werthen (29.), in irgend einer Ordnung genommen, übereinstimmen müssen.

Bei dieser Gleichsetzung gelangt man durch dieselben Betrachtungen wie in §. 10. zu folgendem Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
K_0 + K_1\Pi^{\frac{1}{3}} + K_2\Pi^{\frac{2}{3}} &= k_0^{(0)} + \gamma_0 k_1^{(0)}\pi^{\frac{1}{3}} + \gamma_0^2 k_2^{(0)}\pi^{\frac{2}{3}},\\
K_0 + \gamma K_1\Pi^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 K_2\Pi^{\frac{2}{3}} &= k_0^{(0)} + \gamma_1 k_1^{(0)}\pi^{\frac{1}{3}} + \gamma_1^2 k_2^{(0)}\pi^{\frac{2}{3}},\\
K_0 + \gamma^2 K_1\Pi^{\frac{1}{3}} + \gamma K_2\Pi^{\frac{2}{3}} &= k_0^{(0)} + \gamma_2 k_1^{(0)}\pi^{\frac{1}{3}} + \gamma_2^2 k_2^{(0)}\pi^{\frac{2}{3}},\\
K_0' + K_1'\Pi^{\frac{1}{3}} + K_2'\Pi^{\frac{2}{3}} &= k_0^{(1)} + \gamma_3 k_1^{(1)}\pi^{\frac{1}{3}} + \gamma_3^2 k_2^{(1)}\pi^{\frac{2}{3}},\\
K_0' + \gamma K_1'\Pi^{\frac{1}{3}} + \gamma^2 K_2'\Pi^{\frac{2}{3}} &= k_0^{(1)} + \gamma_4 k_1^{(1)}\pi^{\frac{1}{3}} + \gamma_4^2 k_2^{(1)}\pi^{\frac{2}{3}},\\
K_0' + \gamma^2 K_1'\Pi^{\frac{1}{3}} + \gamma K_2'\Pi^{\frac{2}{3}} &= k_0^{(1)} + \gamma_5 k_1^{(1)}\pi^{\frac{1}{3}} + \gamma_5^2 k_2^{(1)}\pi^{\frac{2}{3}},
\end{aligned}$$

wo entweder $k_0^{(0)}$, $k_1^{(0)}$, $k_2^{(0)}$ respective k_0, k_1, k_2, und $k_0^{(1)}$, $k_1^{(1)}$, $k_2^{(1)}$ respective k_0', k_1', k_2' oder umgekehrt bezeichnen, und γ_0, γ_1, γ_2, so wie γ_3, γ_4, γ_5 die dritten Wurzeln der Einheit sind.

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dafs, wenn man den Wurzelgröfsen in y ihre verschiedenen Werthe giebt, die drei Werthe von y, welche $+p^{\frac{1}{2}}$ enthalten, entweder nur in einander, oder alle drei in die drei Werthe von y übergehen, welche $-p^{\frac{1}{2}}$ enthalten. Wird dies bei Gleichsetzung der Werthe (27. und 28.) berücksichtigt, so gelangt man durch dieselben Betrachtungen wie in §. 6. zu folgendem Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
Q_0 + Q_1 P^{\frac{1}{2}} &= q_0^{(0)} + \beta q_1^{(0)} p^{\frac{1}{2}},\\
Q_0' + Q_1' P^{\frac{1}{2}} &= q_0^{(1)} + \beta q_1^{(1)} p^{\frac{1}{2}},\\
Q_0'' + Q_1'' P^{\frac{1}{2}} &= q_0^{(2)} + \beta q_1^{(2)} p^{\frac{1}{2}},\\
Q_0 - Q_1 P^{\frac{1}{2}} &= q_0^{(0)} - \beta q_1^{(0)} p^{\frac{1}{2}},\\
Q_0' - Q_1' P^{\frac{1}{2}} &= q_0^{(1)} - \beta q_1^{(1)} p^{\frac{1}{2}},\\
Q_0'' - Q_1'' P^{\frac{1}{2}} &= q_0^{(2)} - \beta q_1^{(2)} p^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

wo $q_0^{(0)}$, $q_0^{(1)}$, $q_0^{(2)}$ und $q_1^{(0)}$, $q_1^{(1)}$, $q_1^{(2)}$ respective q_0, q_0', q_0'' und q_1, q_1', q_1'', in irgend einer Reihenfolge genommen, bezeichnen, und β eine zweite Wurzel der Einheit vorstellt.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch einige Überlegung Folgendes:

31. *Die Gröfsen* Q_0 Q_0' Q_0'' Q_1^2P $Q_1'^2P$ $Q_1''^2P$ *können der Reihe nach die folgenden Werthe annehmen:*

q_0	q_0'	q_0''	q_1^2p	$q_1'^2p$	$q_1''^2p$
q_0'	q_0''	q_0	$q_1'^2p$	$q_1''^2p$	q_1^2p
q_0''	q_0	q_0'	$q_1''^2p$	q_1^2p	$q_1'^2p$
q_0	q_0''	q_0'	q_1^2p	$q_1''^2p$	$q_1'^2p$
q_0''	q_0'	q_0	$q_1''^2p$	$q_1'^2p$	q_1^2p
q_0'	q_0	q_0''	$q_1'^2p$	q_1^2p	$q_1''^2p$ *).

*) Die drei letzten Reihen von Werthen für Q_0, Q_0', Q_0'', Q_1^2P, $Q_1'^2P$, $Q_1''^2P$ rühren von der möglichen Quadratwurzel her.

Ferner können, wenn	$Q_1^2 P$	$Q_1'^2 P$	$Q_1''^2 P$
die Werthe	$q_1^2 p$	$q_1'^2 p$	$q_1''^2 p$
32. *haben, die Quadratwurzeln* . .	$Q_1 P^{\frac{1}{2}}$	$Q_1' P^{\frac{1}{2}}$	$Q_1'' P^{\frac{1}{2}}$
die folgenden Werthe annehmen:	$+q_1 p^{\frac{1}{2}}$	$+q_1' p^{\frac{1}{2}}$	$+q_1'' p^{\frac{1}{2}}$
	$-q_1 p^{\frac{1}{2}}$	$-q_1' p^{\frac{1}{2}}$	$-q_1'' p^{\frac{1}{2}}$

§. 15.

33. $$y^6 - A_2 y^5 + B_2 y^4 - C_2 y^3 + D_2 y^2 - E_2 y + F_2 = 0$$

sei eine algebraisch-lösbare, irreductible Gleichung, deren Coëfficienten rationale Functionen der Gröfsen x, x', x'', ... sind. Die Wurzeln dieser Gleichung seien die sechs Werthe:

34. $$\begin{cases} y_1 = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{2}}, \\ y_2 = q_0' + q_1' p^{\frac{1}{2}}, \\ y_3 = q_0'' + q_1'' p^{\frac{1}{2}}, \\ y_4 = q_0 - q_1 p^{\frac{1}{2}}, \\ y_5 = q_0' - q_1' p^{\frac{1}{2}}, \\ y_6 = q_0'' - q_1'' p^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

eines algebraischen Ausdrucks aus x, x', x'', ..., welcher zwei äufsere Wurzelgröfsen hat. Giebt man alsdann den Functionen q_0, q_0', q_0'', $q_1^2 p$, $q_1'^2 p$, $q_1''^2 p$ nach der Tafel (31.) alle Werthe, deren sie fähig sind, so ist es einleuchtend, dafs die Wurzeln der Gleichung (33.) auf folgende Weise:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_2	y_3	y_1	y_5	y_6	y_4
y_3	y_1	y_2	y_6	y_4	y_5
y_1	y_3	y_2	y_4	y_6	y_5
y_3	y_2	y_1	y_6	y_5	y_4
y_2	y_1	y_3	y_5	y_4	y_6

in einander übergehen. Giebt man ferner den Wurzelgröfsen $q_1 p^{\frac{1}{2}}$, $q_1' p^{\frac{1}{2}}$, $q_1'' p^{\frac{1}{2}}$ alle Werthe nach der Tafel (32.), so ist ersichtlich, dafs die Wurzeln auf folgende Weise:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3

in einander übergehen. Hieraus folgt:

Wenn die Wurzeln der Gleichung (33.) *die durch die Gleichungen* (34.) *angegebene Form haben, so kann jede rationale Function der Wurzeln* y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, *welche für die* 12 *Versetzungen*

35.

123456	456123
231564	564231
312645	645312
132465	465132
321654	654321
213546	546213

ungeändert bleibt, nur einen Werth haben, mufs also eine rationale Function der Gröfsen x, x', x'', ... sein.

§. 16.

Die 12 Versetzungen (35.) sind sowohl in den 48 Versetzungen (16.), als auch in den 72 Versetzungen (25.) enthalten. Es bleiben daher sowohl die Wurzeln T^{XV} und T^{X} der Resolventen, als auch die Coëfficienten S, T, R_1, S_1 in §. 9. und V, U_1, V_1, U_2 in §. 13. für die Versetzungen (33.) unverändert. Hieraus folgt:

1. Wenn die Wurzeln einer algebraisch-lösbaren, irreductibeln Gleichung vom sechsten Grade, deren Coëfficienten rationale Functionen von x, x', x'', ... sind, zwei äufsere Wurzelgröfsen enthalten, so haben beide Resolventen des Lagrange einen in Bezug auf x, x', x'', ... rationalen Factor vom ersten Grade.

2. Eine solche Gleichung vom sechsten Grade läfst sich immer, sowohl in drei Factoren vom zweiten, als auch in zwei Factoren vom dritten Grade zerlegen, deren Coëfficienten Wurzeln von Gleichungen respective dritten und zweiten Grades sind, die rationale Functionen von x, x', x'', ... zu Coëfficienten haben.

§. 17.

Aus allen Diesem folgt:

Die algebraisch-lösbaren, irreductibeln Gleichungen vom sechsten Grade, deren Coëfficienten rationale und deren Wurzeln algebraische Functionen von irgend welchen gegebenen Gröfsen x, x', x'', ... sind, zerfallen in drei Classen:

1) *In solche Gleichungen, welche drei quadratische Factoren haben, deren Coëfficienten Wurzeln von cubischen Gleichungen sind, die rationale Functionen von x, x', x'', ... zu Coëfficienten haben;*

2) *In solche, welche zwei cubische Factoren haben, deren Coëfficienten Wurzeln von quadratischen Gleichungen sind, die rationale Functionen x, x', x'', ... zu Coëfficienten haben;*

3) ***In solche, welche sowohl drei quadratische, als auch zwei cubische Factoren haben, deren Coëfficienten Wurzeln von respective cubischen und quadratischen Gleichungen sind, die rationale Functionen von $x, x', x'', \ldots$ zu Coëfficienten haben.***

Bei den Gleichungen von der ersten Classe hat die Resolvente ***vom 15ten Grade*** einen in Bezug auf $x, x', x'', \ldots$ rationalen Factor vom ersten Grade; bei den Gleichungen zweiter Classe hat die Resolvente ***vom 10ten Grade*** einen in Bezug auf $x, x', x'', \ldots$ rationalen Factor vom ersten Grade; bei den Gleichungen dritter Classe haben ***beide*** Resolventen einen in Bezug auf $x, x', x'', \ldots$ rationalen Factor vom ersten Grade.

Schliefslich wollen wir noch untersuchen, von welchem Grade für jede der drei angezeigten Classen von Gleichungen die übrigen, in Bezug auf $x, x', x'', \ldots$ rationale Factoren der Resolventen sind. Es ist zu dem Ende nicht nöthig, die 15 und 10 Wurzeln der Resolventen selbst zu betrachten, sondern wir können dieser Untersuchung einfachere Functionen der Wurzeln $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$, welche den Wurzeln der Resolventen ähnlich sind, zum Grunde legen. Die einfachste, der Wurzel T^{xv} ähnliche Function ist

$$y_1 y_4 + y_2 y_5 + y_3 y_6 = t^{xv};$$

die einfachste, der Wurzel T^x ähnliche Function ist

$$y_1 y_2 y_3 + y_4 y_5 y_6 = t^x;$$

denn t^{xv} und T^{xv}, so wie t^x und T^x, bleiben zusammen ungeändert und ändern sich zusammen für dieselben Versetzungen der Wurzeln $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$. Da ähnliche Functionen aus den Wurzeln einer Gleichung sich immer gegenseitig rational durch einander und durch die Coëfficienten der Gleichung ausdrücken lassen (S. ***Hermite's*** eleganten Beweis: Nouvelles Annales des Mathématiques; redigé par ***Terquem*** et ***Gerono.*** Tome I. page 329.), so wird Alles, was von der Rationalität der Factoren der beiden Gleichungen, deren Wurzeln die 15 Werthe von t^{xv} und die 10 Werthe von t^x sind, gesagt ist, auch von den Factoren der beiden Resolventen gelten.

§. 18.

Die 15 verschiedenen Werthe von t^{xv} sind:

$$y_1 y_4 + y_2 y_5 + y_3 y_6 = t_1, \qquad y_1 y_2 + y_3 y_6 + y_4 y_5 = t_5,$$
$$y_1 y_5 + y_2 y_4 + y_3 y_6 = t_2, \qquad y_1 y_4 + y_2 y_3 + y_5 y_6 = t_6,$$
$$y_1 y_4 + y_2 y_6 + y_3 y_5 = t_3, \qquad y_1 y_3 + y_2 y_5 + y_4 y_6 = t_7,$$
$$y_1 y_6 + y_2 y_5 + y_3 y_4 = t_4, \qquad y_1 y_2 + y_3 y_4 + y_5 y_6 = t_8,$$

$$y_1y_5+y_2y_3+y_4y_6=t_9,\qquad y_1y_2+y_3y_5+y_4y_6=t_{13},$$
$$y_1y_3+y_2y_6+y_4y_5=t_{10},\qquad y_1y_5+y_3y_4+y_2y_6=t_{14},$$
$$y_1y_3+y_2y_4+y_5y_6=t_{11},\qquad y_1y_6+y_2y_4+y_3y_5=t_{15}.$$
$$y_1y_6+y_2y_3+y_4y_5=t_{12},$$

Die 10 verschiedenen Werthe von t^x sind:

$$y_1y_2y_3+y_4y_5y_6=t_a,\qquad y_1y_2y_5+y_3y_4y_6=t_f,$$
$$y_1y_5y_6+y_2y_3y_4=t_b,\qquad y_1y_4y_5+y_2y_3y_6=t_g,$$
$$y_1y_3y_5+y_2y_4y_6=t_c,\qquad y_1y_4y_6+y_2y_3y_5=t_h,$$
$$y_1y_2y_6+y_3y_4y_5=t_d,\qquad y_1y_3y_6+y_2y_4y_5=t_i,$$
$$y_1y_3y_4+y_2y_5y_6=t_e,\qquad y_1y_2y_4+y_3y_5y_6=t_k.$$

Für die 48 Versetzungen (16.) bleibt ungeändert:

1) Die Function t_1,

2) Jede symmetrische Function aus t_a, t_b, t_c, t_d,

3) - - - - - - - - t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7,

4) - - - - - - - - t_e, t_f, t_g, t_h, t_i, t_k,

5) - - - - - - - - t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}.

Demnach bleiben die Coëfficienten jeder Gleichung, welche die Werthe *einer* Gruppe zu Wurzeln hat, für die 48 Versetzungen (16.) ungeändert. Bezeichnen nun y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 die Wurzeln einer Gleichung von der ersten Classe, und haben dieselben die durch die Gleichungen (15) angegebene Form, so sind nach §. 7. die Coëfficienten einer solchen Gleichung rationale Functionen von x, x', x'', ... Hieraus folgt, mit Berücksichtigung der in der Einleitung zu §. 18. gemachten Bemerkung:

Bei den Gleichungen von der ersten Classe hat im Allgemeinen *) *die Resolvente 15ten Grades drei in Bezug auf x, x', x'', ... rationale Factoren vom ersten, 6ten und 8ten Grade, und die Resolvente 10ten Grades zwei rationale Factoren vom 4ten und 6ten Grade.*

Für die 72 Versetzungen (25.) bleibt ungeändert:

1) Die Function t_a,

2) Jede symmetrische Function aus t_1, t_2, t_3, t_4, t_{14}, t_{15},

3) - - - - - - - - t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13},

4) - - - - - - - - t_b, t_c, t_d, t_e, t_f, t_g, t_h, t_i, t_k.

Demnach bleiben die Coëfficienten jeder Gleichung, welche die Werthe einer

*) In besonderen Fällen können die angegebenen rationalen Factoren noch weiter in rationale Factoren zerlegt werden; niemals aber in rationale Factoren vom *ersten* Grade, ohne dafs man mehrere gleiche Factoren erhält.

Gruppe zu Wurzeln hat, für die 72 Versetzungen (25.) ungeändert. Bezeichnen nun y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 die Wurzeln einer Gleichung von der zweiten Classe, und haben dieselben die durch die Gleichungen (24.) angegebene Form, so sind nach §. 11. die Coëfficienten einer solchen Gleichung rationale Functionen von x, x', x'', ... Hieraus folgt, mit Berücksichtigung der in der Einleitung zu §. 18. gemachten Bemerkung:

Bei den Gleichungen von der zweiten Classe hat im Allgemeinen die Resolvente 15ten Grades zwei in Bezug auf x, x', x'', ... rationale Factoren vom 6ten und 9ten Grade, und die Resolvente 10ten Grades zwei rationale Factoren vom ersten und 9ten Grade.

Für die 12 Versetzungen (35.) bleibt ungeändert:

1) Die Function t_1,
2) - - - t_a,
3) Jede symmetrische Function aus t_{14}, t_{15},
4) - - - - - - - - t_2, t_3, t_4,
5) - - - - - - - - t_5, t_6, t_7,
6) - - - - - - - - t_b, t_c, t_d,
7) - - - - - - - - t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13},
8) - - - - - - - - t_e. t_f, t_g, t_h, t_i, t_k.

Demnach bleiben die Coëfficienten jeder Gleichung, welche die Werthe einer Gruppe zu Wurzeln hat, für die 12 Versetzungen (35.) ungeändert. Bezeichnen nun y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 die Wurzeln einer Gleichung dritter Classe, und haben dieselben die durch die Gleichungen (34.) angegebene Form, so sind nach §. 15. die Coëfficienten einer solchen Gleichung rationale Functionen von x, x', x'', ... Hieraus folgt, mit Berücksichtigung der in der Einleitung zu §. 18. gemachten Bemerkung:

Bei den Gleichungen von der dritten Classe hat im Allgemeinen die Resolvente 15ten Grades drei in Bezug auf x, x', x'', ... rationale Factoren vom ersten, 2ten und 6ten Grade und zwei rationale Factoren vom dritten Grade, und die Resolvente 10ten Grades hat drei rationale Factoren vom ersten, dritten und 6ten Grade.

Königsberg im October 1847.

11.

Über unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiednen quadratischen Formen enthalten sind.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi.*)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 5. in diesem Bande.)

Gleichungen zwischen *drei* Doppelsummen.

Man kann der in der Einleitung aufgestellten Fundamentalgleichung die folgenden Formen geben:

$$\alpha) \qquad \Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})\} = \Sigma q^{ii}z^{i},$$

$$\beta) \quad (z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^{2})(1+q^{i+1}z^{-2})\} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(ii+i)}z^{2i+1},$$

$$\gamma) \quad (z-z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^{2})(1-q^{i+1}z^{-2})\} = \Sigma(-1)^{i}q^{\frac{1}{2}(ii+i)}z^{2i+1},$$

wo, wie immer, für den Index i unter dem Zeichen Π die Werthe $0, 1, 2, \ldots \infty$ und unter dem Zeichen Σ die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\infty$ zu nehmen sind. Die Formel β) wird aus α) erhalten, wenn man respective $\sqrt{q}$ und $\sqrt{q}.z^{2}$ für q und z setzt und mit z dividirt. Die Formel γ) folgt aus α), wenn man $z\sqrt{-1}$ für z setzt und mit $\sqrt{-1}$ dividirt.

Ich will jetzt in diesen allgemeinen Formeln für z primitive 3[te], 5[te], 8[te] und 12[te] Wurzeln der Einheit setzen, und bei Aufsuchung von unendlichen Producten, welche sich auf doppelte Art in zwei elliptische zerfällen lassen, unter die Zahl der letztern auch diejenigen aufnehmen, welche für die angegebnen Werthe von z aus α) — γ) erhalten werden. Die Gleichungen, zu welchen man auf diesem Wege gelangt, werden sich von den oben mitgetheilten dadurch unterscheiden, dafs sie nicht mehr zwischen nur zwei, sondern zwischen drei oder einer gröfsern Zahl Doppelsummen Statt finden. Obgleich einige dieser Resultate sich aus den früher gefundnen zusammensetzen lassen, so habe ich sie doch deshalb für bemerkenswerth gehalten, weil sie mehrere derselben in einer einzigen Formel umfassen, zu welcher man durch dieselbe Methode der doppelten Zerfällung gelangt, welche auf jene Formeln geführt hat. Es beruht dies auf der Eigenschaft der elliptischen Transcendente $\Sigma q^{ii}z^{i}$, dafs sie, wenn man für z Wurzeln der Einheit setzt, in mehrere Reihen zerlegt werden kann, welche aus derselben Transcendente erhalten

werden, wenn man darin, wie in den frühern Untersuchungen, für q und z Potenzen von q setzt. Ich werde zur gröfsern Deutlichkeit einige elementare Eigenschaften der 3eckigen und 5eckigen Zahlen, auf welchen die Zerlegungen der elliptischen Transcendente, welche hier zu betrachten sind, beruhen, besonders hervorheben, und bei dieser Gelegenheit einige allen Polygonzahlen gemeinschaftliche Eigenschaften bemerken.

I. $z =$ einer imaginären Cubikwurzel der Einheit.

Alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, welche für den Index i unter den Summenzeichen zu setzen sind, sind unter den drei Formen $3i$, $-(3i+1)$, $3i+1$ enthalten. Wenn man in dem allgemeinen Ausdruck der 3eckigen Zahlen $\frac{1}{2}i(i+1)$ für i die Formen $3i$ und $-(3i+1)$ setzt, so erhält man in beiden Fällen $\frac{3}{2}(3i^2+i)$; setzt man dagegen $3i+1$ für i, so verwandelt sich $\frac{1}{2}i(i+1)$ in $\frac{9}{2}(i^2+i)+1$. Man hat daher den folgenden Satz:

die durch 3 theilbaren 3eckigen Zahlen sind die 3fachen der vor- und rückwärts fortgesetzten 5eckigen Zahlen; die durch 3 nicht theilbaren 3eckigen Zahlen lassen durch 9 dividirt den Rest 1, und geben, wenn man von ihnen 1 abzieht und den Rest durch 9 dividirt, wiederum die sämmtlichen 3eckigen Zahlen.

Es folgt aus diesem Satze das Corollar,

dafs man aus jeder 3eckigen Zahl unendlich viel andere erhält, wenn man wiederholt mit 9 multiplicirt und 1 addirt.

Da $(3i+1)(3i+2)$ unverändert bleibt, wenn man $-(i+1)$ für i setzt, während sich gleichzeitig $2i+1$ in $-(2i+1)$ verwandelt, und man für i unter dem Zeichen Σ auch $i+a$ oder $-(i+a)$ setzen kann, wo a eine beliebige ganze positive oder negative Zahl bedeutet, so hat man

$$\Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} z^{6i+3} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} z^{-(6i+3)},$$
$$\Sigma (-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} z^{6i+3} = -\Sigma (-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} z^{-(6i+3)}.$$

Man kann ferner für i unter dem Zeichen Σ nach einander

$$\varepsilon(mi+a), \quad \varepsilon_1(mi+a_1), \quad .. \quad \varepsilon_{m-1}(mi+a_{m-1})$$

setzen, wo ε, ε_1, .. ε_{m-1} entweder $+1$ oder -1, und εa, $\varepsilon_1 a_1$, .. $\varepsilon_{m-1} a_{m-1}$ alle verschiednen Reste bedeuten, welche durch Division mit der ganzen Zahl m erhalten werden können. Man erhält daher, wenn man in α), β), γ) für i unter dem Zeichen Σ nach einander $3i$, $-(3i+1)$, $3i+1$ setzt, und die vorstehenden Sätze benutzt, die folgenden Formeln:

$$20.\quad \Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})\} = \Sigma q^{i^2}z^i$$
$$= \Sigma q^{9i^2}z^{3i} + \Sigma q^{(3i+1)^2}(z^{3i+1}+z^{-(3i+1)}),$$

$$21.\quad (z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})\} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)}z^{2i+1}$$
$$= \Sigma q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)}(z^{6i+1}+z^{-(6i+1)}) + \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)}z^{6i+3}$$
$$= \Sigma q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)}(z^{6i+1}+z^{-(6i+1)}) + \tfrac{1}{2}\Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)}(z^{6i+3}+z^{-6i+3}),$$

$$22.\quad (z-z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^2)(1-q^{i+1}z^{-2})\} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(i^2+i)}z^{2i+1}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)}(z^{6i+1}-z^{-(6i+1)}) - \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)}z^{6i+3}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)}(z^{6i+1}-z^{-(6i+1)}) - \tfrac{1}{2}\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)}(z^{6i+3}-z^{-(6i+3)}).$$

Setzt man in diesen Formeln die Gröfse z *einer imaginären Cubikwurzel der Einheit* gleich, so erhält man

$$23.\quad \Sigma\frac{(1-q^{2i+2})(1+q^{6i+3})}{1+q^{2i+1}} = \Sigma q^{9i^2} - \Sigma q^{(3i+1)^2},$$

$$24.\quad \Pi\frac{(1-q^{i+1})(1+q^{3i+3})}{1+q^{i+1}} = \Sigma q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)} - \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)},$$

$$25.\quad \Pi(1-q^{3i+3}) = \Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)}.$$

Die letzte dieser Formeln giebt, wenn man q für q^3 setzt, die *Euler*sche Entwicklung des Products $\Pi(1-q^{i+1})$.

Man kann der Reihe $\Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)}$ noch eine andere merkwürdige Form geben. Es sind nämlich alle Werthe des Index i in den beiden Formen $2i$ und $-(2i+1)$ enthalten, und für beide geht die Gröfse $\frac{1}{2}i(i+1)$ in denselben Ausdruck $2i^2+i$ über, was dem Satz entspricht,

dafs die 6eckigen Zahlen, vor- und rückwärts fortgesetzt, alle 3eckigen Zahlen geben *).

Man erhält hieraus

$$26.\quad \Sigma q^{\frac{1}{2}i(i+1)} = 2\Sigma q^{2i^2+i}, \qquad \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}i(i+1)} = 0,$$

und daher

$$27.\quad \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} = q\Sigma q^{\frac{9}{2}(i^2+i)} = 2q\Sigma q^{9(2i^2+i)} = 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)},$$

$$28.\quad \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} = 0.$$

---

*) *Proclus* in seinem Commentar zum 1sten Buch des *Euclides* bemerkt als Beispiel, dafs man nicht alle mathematische Sätze umkehren könne, dafs jede 6eckige Zahl eine 3eckige, aber nicht jede 3eckige Zahl eine 6eckige ist. Man sieht, dafs wenn man die Benennung *sechseckige* Zahlen auch auf diejenigen Zahlen $2i^2-i$ ausdehnt, welche den negativen Werthen von i entsprechen, die Umkehrung in der That erlaubt ist.

Vermöge der Gleichung (27.) kann man die Gleichung (24.) auch so darstellen:

$$\Pi\frac{(1-q^{i+1})(1+q^{3i+3})}{1+q^{i+1}} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}.$$

Wenn man die unendlichen Producte (23.) und (24.) von ihren Nennern befreit, und ihnen ihre einfachste oder ihre Normal- oder ihre characteristische Form giebt, so erhält man

$$29.\quad \Pi\frac{(1-q^{2i+2})(1+q^{6i+3})}{1+q^{2i+1}} = \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1+q^{6i+3})\}$$

$$= \Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{4i+4})(1-q^{12i+6})\}$$

$$= \Pi\{(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+8}) \times (1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})\}$$

$$= \Sigma q^{9i^2} - \Sigma q^{(3i+1)^2},$$

$$30.\quad \Pi\frac{(1-q^{i+1})(1+q^{3i+3})}{1+q^{i+1}} = \Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})\}$$

$$= \Pi\{(1-q^{2i+2})(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+5})^2\}$$

$$= \Pi\{(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})^2(1-q^{6i+6})\}$$

$$= \Sigma q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)} - \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}\}.$$

Andere Darstellungen dieser unendlichen Producte werde ich weiter unten geben.

Von den Formeln (23.), (24.), (25.) ist die letzte, welche mit der *Euler*schen übereinkommt, oben noch auf eine andere Art, welche von der im Vorigen gebrauchten wesentlich verschieden ist, aus der allgemeinen Formel abgeleitet worden. Nach den beiden Methoden erhält man (25.) aus der Formel γ), indem man entweder für z eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit setzt und mit $\sqrt{(-3)}$ dividirt, oder indem man für q und z respective q^9 und q^3 setzt und mit $-q^3$ multiplicirt. In ähnlicher Weise kann man auch zu den beiden andern Formeln (23.) und (24.), welche durch Substitution einer imaginären Cubikwurzel der Einheit für z erhalten wurden, durch eine Combination der früher gefundnen Formeln gelangen, welche aus der Fundamentalformel dadurch abgeleitet worden waren, dafs man für q und z Potenzen von q gesetzt hat. Ich will diese zweite Beweisart hier mittheilen, weil man daraus desto leichter erkennen wird, ob und auf welche Art die aus den Formeln (23.) und (24.) folgenden Gleichungen zwischen Doppelsummen aus den früher gefundnen erhalten werden können.

Von den oben aus der Fundamentalformel abgeleiteten Formeln wähle ich, um die Formeln (23.) und (24.) dadurch zu beweisen, die Formeln IV. (6.) und IV. (7.),

$$31.\quad \begin{cases} \Pi(1+q^{i+1}) = \dfrac{1}{\Pi(1-q^{2i+1})} = \dfrac{\Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}{\Sigma(-1)^i q^{3i^2}}, \\ \Pi(1+q^{i+1}) = \dfrac{1}{\Pi(1-q^{2i+1})} = \dfrac{\Sigma q^{6i^2+3i}}{\Sigma(-1)^i q^{3i^2+2i}}. \end{cases}$$

Multiplicirt man mit den Nennern der Brüche, und setzt $-q^3$ für q, so erhält man, nachdem man die zweite Gleichung noch mit q multiplicirt,

$$32.\quad \begin{cases} \Sigma q^{9i^2} \quad\;\; = \Pi(1+q^{6i+3}).\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2-i)} q^{\frac{3i}{2}(3i+1)}, \\ \Sigma q^{(3i+1)^2} = \Pi(1+q^{6i+3}).\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}. \end{cases}$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab, so kann der in $\Pi(1+q^{6i+3})$ multiplicirte Factor in den einfachern Ausdruck $\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}$ zusammengezogen werden. Setzt man nämlich in (21.) $z=1$, so erhält man

$$33.\quad \Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)} = 2\Sigma q^{\frac{3i}{2}(3i+1)} + \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)},$$

oder, vermöge (26.) und (27.),

$$34.\quad \Sigma q^{2i^2+i} = \Sigma q^{\frac{3i}{2}(3i+1)} + \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)},$$

und hieraus, wenn man $-q$ für q setzt,

$$35.\quad \Sigma(-1)^i q^{2i^2+i} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2-i)} q^{\frac{3i}{2}(3i+1)} - \Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}.$$

Mit Hülfe dieser Formel erhält man aus den Gleichungen (32.), wenn man die zweite von der ersten abzieht,

$$36.\quad \Sigma q^{9i^2} - \Sigma q^{(3i+1)^2} = \Pi(1+q^{6i+3})\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}.$$

Substituirt man hierin die häufig im Vorhergehenden angewandte Formel,

$$\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i} = \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\},$$

welche sich aus (α.) ergiebt, wenn man darin respective q^2 und $-q$ für q und z setzt, so folgt die Formel (29.).

Die Formel (30.) findet man aus denselben Gleichungen (31.) auf folgende Weise. Setzt man in denselben q^3 für q, so erhält man

$$37.\quad \begin{cases} \Sigma q^{\frac{3i}{2}(3i+1)} \quad\;\; = \Pi(1+q^{3i+3}).\Sigma(-1)^i q^{9i^2}, \\ \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)} = \Pi(1+q^{3i+3}).\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}, \end{cases}$$

und hieraus, da $\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2} = \Sigma(-1)^i q^{(3i-1)^2}$,

$$38.\quad \Sigma q^{\frac{3i}{2}(3i+1)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}$$
$$= \Pi(1+q^{3i+3})\{\Sigma(-1)^i q^{9i^2} - \Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2} - \Sigma(-1)^i q^{(3i-1)^2}\}$$
$$= \Pi(1+q^{3i+3})\Sigma(-1)^i q^{i^2}.$$

Substituirt man hierin die ebenfalls sehr häufig im Vorhergehenden angewandte Formel,

$$39.\quad \Sigma(-1)^i q^{ii} = \Pi\{(1-q^{2i+2})(1-q^{2i+1})^2\} = \Pi\frac{1-q^{i+1}}{1+q^{i+1}},$$

welche aus (1.) für $z = -1$ folgt, so erhält man die Formel (30.).

Für den hier vorliegenden Zweck, Gleichungen zwischen Doppelsummen von der Form

$$\Sigma \pm q^{\alpha i^2+\beta k^2+\gamma i+\delta k+\varepsilon}$$

zu finden, kommt es darauf an, die elliptischen unendlichen Producte (29.) und (30.) mit solchen andern elliptischen unendlichen Producten zu multipliciren, dafs das unendliche Product, welches man durch diese Multiplication erhält, sich noch auf eine andere Art in zwei elliptische unendliche Producte zerfällen läfst, oder, was dasselbe ist, ***die unendlichen Producte* (29.) *und* (30.) *als Brüche darzustellen, deren Nenner ein elliptisches unendliches Product und deren Zähler das Product zweier elliptischen unendlichen Producte ist.*** Die Formeln III. führen mit Leichtigkeit zu mehreren solchen Darstellungen. Wenn man nämlich die unendlichen Producte (29.) und (30.) auf folgende Art ausdrückt,

$$\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}.\Pi(1+q^{6i+3}),$$
$$\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}.\Pi(1+q^{3i+3}),$$

so sind die ersten Factoren bereits elliptische unendliche Producte, und es kommt nur noch darauf an, die zweiten Factoren

$$\Pi(1+q^{6i+3}),\qquad \Pi(1+q^{3i+3})$$

als Brüche darzustellen, deren Zähler und Nenner elliptische unendliche Producte sind. Dies geschieht aber mittelst der Formeln III. für jedes dieser beiden unendlichen Producte auf 7 verschiedne Arten. Man erhält für $\Pi(1+q^{6i+3})$ ***sieben*** solcher Brüche, wenn man in III. $-q^3$ für q setzt und alle Brüche umkehrt, und eine gleiche Anzahl für $\Pi(1+q^{3i+3})$, wenn man in III. selber q^3 für q substituirt. Es ergeben sich hiernach aus (36.) und (38.) ***vierzehn*** Gleichungen zwischen Doppelsummen. Bezeichnet man nämlich jeden der 7 Brüche in IV. mit $\frac{f(q)}{\varphi(q)}$, so folgt aus (36.):

$$f(-q^3)\{\Sigma q^{9i^2} - \Sigma q^{(3i+1)^2}\} = \varphi(-q^3)\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i},$$

und aus (38.),

$$\varphi(q^3)\{\Sigma q^{\frac{3i}{2}(3i+1)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}\} = f(q^3)\Sigma(-1)^i q^{ii}.$$

Es wird aber nicht nöthig sein, diese 14 Gleichungen besonders aufzustellen, da sie keine wesentlich neuen Resultate geben. Denn durch dasselbe Verfahren, durch welches im Vorhergehenden die Formeln (36.) und (38.) aus den Formeln (32.) und (37.) abgeleitet worden sind, welche ihrerseits aus den Formeln IV. (6.) und IV. (7.) folgten, müssen sich auch die aus den Formeln (36.), (38.) und IV. (1.) — (7.) folgenden 14 Gleichungen zwischen Doppelsummen aus denjenigen Formeln der obigen Tabelle ergeben, welche durch Combination der Formeln IV. (6.) und IV. (7.) unter sich und mit den übrigen Formeln IV. (1.) — (5.) erhalten worden sind.

Man kann aber die unendlichen Producte (29.) und (30.) noch auf andere Arten als solche Brüche darstellen, deren Nenner ein elliptisches unendliches Product und deren Zähler das Product zweier elliptischen unendlichen Producte ist, und diese Darstellungen werden zu Resultaten führen, welche in den Gleichungen der obigen Formelntabelle nicht enthalten sind. Es ist nämlich

$$\Pi\frac{(1-q^{2i+2})(1+q^{6i+3})}{1+q^{2i+1}} = \Sigma q^{9i^2}-\Sigma q^{(3i+1)^2}$$

$$= \frac{\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}.\Pi(1-q^{4i+4})}{\Pi(1-q^{12i+12})}$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{2i+2}).\Pi\{1-q^{6i+1})(1+q^{6i+2})(1+q^{6i+3})(1+q^{6i+4})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}}{\Pi\{(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+6})\}}$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{i+1}).\Pi\{(1+q^{6i+2})(1+q^{6i+4})(1-q^{6i+6})\}}{\Pi(1-q^{3i+3})}$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{2i+2}).\Pi(1-q^{6i+6})}{\Pi\{(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}},$$

woraus, wenn man für die elliptischen unendlichen Producte ihre Entwicklungen setzt, die folgenden Gleichungen erhalten werden,

$$40.\qquad \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1+q^{6i+3})\}$$

$$= \Sigma q^{9i^2}-\Sigma q^{(3i+1)^2} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3i^2+2i}.\Sigma(-1)^i q^{6i^2+2i}}{\Sigma(-1)^i q^{18i^2+6i}}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^i q^{3i^2+i}.\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2-i)} q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)} q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)}} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}.\Sigma q^{3i^2+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)}}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^i q^{3i^2+i}.\Sigma(-1)^i q^{9i^2+3i}}{\Sigma q^{3i^2+2i}}.$$

Es ist ferner

$$\Pi\frac{(1-q^{i+1})(1+q^{3i+3})}{1+q^{i+1}} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)} - \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)}$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{i+1}).\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}}{\Pi(1-q^{6i+6})} = \frac{\Pi(1-q^{i+1}).\Pi(1-q^{3i+3})}{\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})\}},$$

woraus

$$41. \quad \Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})\}$$

$$= \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)} - \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}.\Sigma(-1)^i q^{3i^2+2i}}{\Sigma(-1)^i q^{3(3i^2+i)}} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}.\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}{\Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}$$

folgt. Aus den Formeln (40.) und (41.) ergeben sich durch Multiplication mit den Nennern die unten folgenden Gleichungen zwischen Doppelsummen. Da in den Zählern der Brüche (40.) der Factor $\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}$, in den Zählern der Brüche (41.) der Factor $\Sigma(-1)^i q^{2i^2}$ nicht vorkommt, so müssen diese Gleichungen von denen, welche auf die oben angegebne Art aus (36.) und (38.) abgeleitet werden können, wesentlich verschieden werden.

Der Zähler des letzten Bruchs in (40.) wird aus dem Zähler des letzten Bruchs in (41.) erhalten, wenn man darin q^2 für q setzt. Es ergeben sich daher für denselben aus (40.) und (41.) drei oder, wenn man noch in (40.) $-q$ für q setzt, vier verschiedene Darstellungen durch Doppelsummen, wobei man diejenige nicht mitrechnet, welche aus der doppelten Form der in (41.) mit dem Minuszeichen behafteten Summe folgt. Die hieraus erhaltenen Gleichungen gehören zur Classe (3, 3), die übrigen aus (40.) und (41.) folgenden zur Classe (2, 2). Sie können den zu diesen Classen gehörigen Formeln der obigen Tabelle angeschlossen werden, obgleich sie sich von ihnen dadurch unterscheiden, dafs sie jede eine Gleichung zwischen *drei* Doppelsummen geben. Die unendlichen Producte in den folgenden Formeln sind die Zähler der Ausdrücke, welche die Brüche (40.) und (41.) ergaben; nur sind diese Producte, wie in der obigen Formelntabelle, durch ihre Normalformen ausgedrückt.

XI.

B. (2, 2).

$$3. \quad \Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2\}$$

$$= \Sigma(-1)^k q^{9i^2+18k^2+6k} - \Sigma(-1)^k q^{(3i+1)^2+18k^2+6k} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3i^2+6k^2+2i+2k}$$

$$4. \quad \Pi\{(1-q^{6i+1})(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})\}$$
$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(k^2+k)} q^{9i^2+\frac{1}{2}(3k^2+k)} - \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(k^2+k)} q^{(3i+1)^2+\frac{1}{2}(3k^2+k)}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+\frac{1}{2}(k^2-k)} q^{3i^2+\frac{3}{2}k^2+i+\frac{1}{2}k}$$

$$5. \quad \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})\}$$
$$= \Sigma(-1)^k q^{9i^2+\frac{1}{2}(3k^2+k)} - \Sigma(-1)^k q^{(3i+1)^2+\frac{1}{2}(3k^2+k)} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}i^2+3k^2+\frac{1}{2}i+k}$$

$$6. \quad \Pi\{(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})^2(1-q^{6i+6})^2\}$$
$$= \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)+3(3k^2+k)} - 2\Sigma(-1)^k q^{(3i+1)(6i+1)+3(3k^2+k)}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{3}{2}i^2+3k^2+\frac{1}{2}i+2k}.$$

C. (3, 3).

$$2. \quad \Pi\{(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+6})^2\}$$
$$= \Sigma q^{9i^2+3k^2+2k} - \Sigma q^{(3i+1)^2+3k^2+2k}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{9i^2+3k^2+2k} + \Sigma(-1)^{i+k} q^{(3i+1)^2+3k^2+2k}$$
$$= \Sigma q^{3(3i^2+i)+3k^2+k} - \Sigma q^{(3i+1)(3i+2)+3k^2+k}$$
$$= \Sigma q^{3(3i^2+i)+3k^2+k} - 2\Sigma q^{2(3i+1)(6i+1)+3k^2+k}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3i^2+9k^2+i+3k}.$$

Man kann durch Combination der Formeln (36.) und (38.) noch eine Gleichung zwischen *fünf* Doppelsummen ableiten. Multiplicirt man nämlich die Formeln (36.) und (38.) mit einander, nachdem man in der ersten $-q$ für q gesetzt hat, und bemerkt, dafs $\Pi(1+q^{3i+3})\Pi(1-q^{6i+3}) = 1$, so erhält man

$$42. \quad \Sigma(-1)^i q^{i^2+2k^2+k}$$
$$= \{\Sigma(-1)^i q^{9i^2} + \Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}\}\{\Sigma q^{\frac{1}{2}i(3i+1)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}\}.$$

Diese Formel läfst sich aber auf die Gleichung B. (2) zurückführen. Setzt man nämlich für $\Sigma(-1)^i q^{i^2}$, Σq^{2i^2+i} die äquivalenten, blofs durch andere Gruppirung der Glieder unterschiednen Ausdrücke,

$$\Sigma(-1)^i q^{9i^2} - 2\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}, \qquad \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)} + \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)},$$

von denen der erstere aus (20.) für $z = -1$ folgt, und der zweite durch die Formel (34.) gegeben wird, so wird die Doppelsumme links vom Gleichheitszeichen

$$\{\Sigma(-1)^i q^{9i^2} - 2\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}\}\{\Sigma q^{\frac{1}{2}i(3i+1)} + \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}\},$$

und es kommt daher die Gleichung (42.) auf die folgende zurück,

$$\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2+\frac{1}{2}k(3k+1)} = \Sigma(-1)^i q^{9i^2+(3k+1)(6k+1)},$$

welche aus B. (2.) erhalten wird, wenn man darin q^3 für q setzt und mit q multiplicirt.

II. $z =$ einer imaginären 5ten Wurzel der Einheit.

Ich will jetzt in der Formel $(\beta.)$ für z nach einander zwei ***imaginäre nicht reciproke 5te Wurzeln der Einheit*** setzen, und die daraus hervorgehenden Gleichungen mit einander multipliciren. Wenn man in der Gleichung $(\beta.)$,

$$(z-z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^2)(1-q^{i+1}z^{-2})\} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}i(i+1)}z^{2i+1},$$

für den Index i unter dem Summenzeichen nach einander $5i$, $-(5i+1)$, ferner $-(5i+2)$, $5i+1$, endlich $5i+2$ setzt, wodurch alle Werthe von i erschöpft werden, so verwandelt sich dieselbe in die folgende,

$$43.\quad (z-z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^2)(1-q^{i+1}z^{-2})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)}(z^{10i+1}-z^{-(10i+1)}) + \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}(z^{-(10i+3)}-z^{10i+3})$$
$$+\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+2)(5i+3)}z^{10i+5}.$$

Setzt man $-i-1$ für i, so erleidet die letzte Summe keine weitere Aenderung, als dafs die Gröfse $(-1)^i z^{10i+5}$ unter dem Summenzeichen in $-(-1)^i z^{-(10i+5)}$ übergeht; man kann daher für diese Summe auch

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+2)(5i+3)}(z^{10i+5}-z^{-(10i+5)})$$

setzen, woraus man sieht, dafs dieselbe verschwindet, wenn z einer beliebigen 5ten Wurzel der Einheit gleich wird. Bedeutet daher σ eine imaginäre 5te Wurzel der Einheit, und setzt man in (43.)

$$z = \sigma,$$

so erhält man nach Division mit $\sigma-\sigma^{-1}$,

$$44.\quad \Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}\sigma^2)(1-q^{i+1}\sigma^{-2})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)} + (\sigma+\sigma^{-1})\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}.$$

Setzt man hierin σ^2 für σ, so ergiebt sich

$$\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}\sigma)(1-q^{i+1}\sigma^{-1})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)} + (\sigma^2+\sigma^{-2})\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}.$$

Multiplicirt man beide Formeln mit einander, und bemerkt, dafs sowohl die Summe als das Product von $\sigma+\sigma^{-1}$ und $\sigma^2+\sigma^{-2}$ gleich -1 ist, so findet man

$$45.\quad \Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{5i+5})\} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}\Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}(3i^2+i)}$$
$$= \{\Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)}\}^2 - \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)}\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)} - \{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}\}^2,$$

oder die zur Classe (1, 5) gehörige Gleichung,

$$46.\quad \Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{5i+5})\} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3i^2+15k^2+i+5k)}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{5}{2}i(5i+1)+\frac{5}{2}k(5k+1)} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{5}{2}i(5i+1)+\frac{1}{2}(5k+1)(5k+2)}$$
$$- \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)+\frac{1}{2}(5k+1)(5k+2)}.$$

In der ersten der drei Summen rechts vom Gleichheitszeichen sind die Exponenten von q durch 5 theilbar, in den beiden andern lassen dieselben, durch 5 dividirt, respective die Reste 1 und 2. Wenn man daher auch die Doppelsumme links vom Gleichheitszeichen in drei andere theilt, je nachdem die Exponenten von q oder, was dasselbe ist, die Werthe von $\frac{1}{2}i(3i+1)$, durch 5 dividirt, die Reste 0, 1, 2 lassen, so zerfällt die Gleichung (46.) in drei Gleichungen, von denen jede zwischen Doppelsummen Statt hat, in denen die Exponenten von q, durch 5 dividirt, dieselben Reste lassen. Je nachdem i die Werthe $5i$ und $-(5i+2)$; $-(5i+1)$; $5i+1$ und $5i+2$ annimmt, erhält die Zahl $\frac{1}{2}i(3i+1)$ die ihren drei Resten 0, 1, 2 entsprechenden Formen,

$$\tfrac{5}{2}i(15i+1) \text{ und } \tfrac{5}{2}(3i+1)(5i+2);\quad \tfrac{25}{2}i(3i+1)+1;$$
$$\tfrac{5}{2}i(15i+7)+2 \text{ und } \tfrac{5}{2}(3i+2)(5i+1)+2.$$

Es werden daher die sich je nach diesen drei Fällen aus (46.) ergebenden Gleichungen, wenn man im zweiten und dritten Falle respective mit q und q^2 dividirt, und hierauf überall q für q^5 setzt, die nachstehenden. Die den Doppelsummen gleichen unendlichen Producte, welche ich beigefügt habe, ergeben sich leicht aus dem Fundamentaltheorem.

XII.

$$1.\quad \Pi\{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})^2\}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{5}{2}(3i^2+i)+\frac{1}{2}(3k^2+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5i^2+5k^2+i+3k)}$$

$$2.\quad \Pi\{(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+5})\}^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}\{q^{\frac{1}{2}(15i^2+3k^2+i+k)} + q^{\frac{1}{2}((3i+1)(5i+2)+3k^2+k)}\} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5i^2+5k^2+i+k)}$$

$$3.\quad \Pi\{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})\}^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}\{q^{\frac{1}{2}(15i^2+3k^2+7i+k)} - q^{\frac{1}{2}((3i+2)(5i+1)+3k^2+k)}\} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5i^2+5k^2+3i+3k)}.$$

Die erste dieser Formeln ist dieselbe, wie die oben in der Formeltabelle aufgestellte, welche dort durch eine ganz verschiedne Methode gefunden worden ist.

Die Formel XII. (1.) ergab sich im Vorhergehenden aus (46.) durch die Bemerkung, daſs, wenn man dem i den Werth $-(5i+1)$ giebt, die

5eckigen Zahlen $\frac{1}{2}i(3i+1)$ die Form $\frac{25}{2}i(3i+1)+1$ erhalten. Dies giebt den Satz:

Wenn man von den 5eckigen Zahlen, welche durch 5 dividirt 1 übrig lassen, 1 abzieht, so geht der Rest nicht blofs durch 5, sondern auch durch 25 auf, und man erhält nach Division mit 25 wieder 5eckige Zahlen.

Werden die unter der Form $\frac{1}{2}(3i^2-i)$ enthaltenen Zahlen in 2 Classen getheilt, je nachdem i positive oder negative Werthe annimmt (von denen die erste Classe die eigentlichen 5eckigen Zahlen umfafst, deren Name aber, wie im Vorhergehenden, auch auf die andere Classe ausgedehnt zu werden pflegt): so kann man den vorstehenden Satz näher so bestimmen, *dafs, wenn man von jeder von beiden Classen 5eckiger Zahlen diejenigen nimmt, welche durch 5 dividirt 1 übrig lassen, von denselben 1 abzieht und den Rest durch 25 dividirt, die sämmtlichen 5eckigen Zahlen der andern Classe erhalten werden.*

Der vorstehende Satz ist dem oben für die 3eckigen Zahlen bemerkten analog. In beiden Fällen werden diejenigen 3- und 5eckigen Zahlen betrachtet, welche um 1 vermindert respective durch 3 und 5 aufgehn; zieht man von ihnen 1 ab, so lassen sich die Reste respective durch 3^2 und 5^2 theilen. Es werden ferner nach geschehner Division respective die sämmtlichen 3- und 5eckigen Zahlen erhalten. Wenn man das umgekehrte Verfahren anwendet, und aus 3- und 5eckigen Zahlen durch Multiplication mit 9 und 25 und Addition der Einheit immer andere 3- und 5eckige Zahlen ableitet, so erhält man den Satz, *dafs, wenn A eine beliebige 3- oder 5eckige Zahl ist, auch* $\frac{1}{8}(9^n-1)+9^nA$, $\frac{1}{24}(25^n-1)+25^nA$ *respective 3- und 5eckige Zahlen werden, von denen die letztern zu derselben oder einer andern Classe wie A gehören, je nachdem n gerade oder ungerade ist.*

Der Satz, dafs die 3- und 5eckigen Zahlen von der Form $3i+1$, $5i+1$ immer auch die Form 3^2i+1, 5^2i+1 haben, läfst sich durch folgende Betrachtungen auf alle vieleckigen Zahlen ausdehnen.

Es sei M eine $m$eckige Zahl, welche durch m dividirt den Rest 1 läfst. Ist M die $n$te $m$eckige Zahl

$$M = \tfrac{1}{2}n\{(m-2)(n-1)+2\},$$

so wird

$$\begin{aligned} M-1 &= \tfrac{1}{2}(n-1)\{(m-2)n+2\} \\ &= m\cdot\tfrac{1}{2}n(n-1)-(n-1)^2. \end{aligned}$$

Aus dieser Formel folgt, dafs, weil $M-1$ durch m theilbar ist, auch $(n-1)^2$

durch m theilbar sein mufs. Es sei

$$m = a^2 b,$$

wo a^2 das gröfste Quadrat bedeutet, durch welches m theilbar ist, und also b durch keine Quadratzahl theilbar sein darf. Es mufs dann $(n-1)^2$, welches durch $a^2 b = m$ theilbar ist, auch durch $a^2 b^2 = mb$ und daher $n-1$ durch ab theilbar sein. *Es werden daher nur diejenigen $m$eckigen Zahlen durch $m = a^2 b$ dividirt den Rest* 1 *lassen, deren Seite* (n), *durch* $ab = \frac{m}{a}$ *dividirt, den Rest* 1 *läfst.* Es sei

$$n-1 = abc,$$

so wird

$$M-1 = \tfrac{1}{2}n.a^3b^2c - a^2b^2c^2 = a^2b^2c\{\tfrac{1}{2}n.a-c\}.$$

Es sei zuerst *m ungerade,* so werden a und b ungerade, und wegen $n-1 = abc$, von den beiden Zahlen n und c immer die eine gerade. Es wird also $c(\frac{1}{2}na-c)$ eine ganze Zahl, und daher $M-1$ durch a^2b^2 theilbar. Es sei zweitens *m das Doppelte einer ungeraden Zahl,* so wird a ungerade und b ebenfalls das Doppelte einer ungeraden Zahl; es wird daher auch n ungerade, und $c(\frac{1}{2}na-c)$ für ein ungerades c nicht mehr eine ganze Zahl werden. In diesem Falle wird also $M-1$ nur durch $\frac{1}{2}a^2b^2$ theilbar. Wenn drittens *m das Vier- oder Achtfache einer ungeraden Zahl* ist, wird a das Doppelte einer ungeraden Zahl; es wird daher sowohl n als $\frac{1}{2}a$ ungerade, und $c(\frac{1}{2}na-c)$ für jedes c nicht blofs eine ganze Zahl, sondern auch immer gerade, und also $M-1$ durch $2a^2b^2$ theilbar. Wenn viertens *m durch 16 theilbar* ist, so wird a durch 4 theilbar, $c\{\frac{1}{2}na-c\}$ eine ganze Zahl, und $M-1$ durch a^2b^2 theilbar. Man erhält daher, wenn man Q für a^2b^2 setzt, den Satz: *Wenn M eine $m$eckige Zahl ist, welche durch m dividirt den Rest* 1 *läfst, und Q das kleinste durch m theilbare Quadrat bedeutet, so wird $M-1$, wenn m das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, durch $\frac{1}{2}Q$, in allen andern Fällen durch Q, und wenn m das Vier- oder Achtfache einer ungeraden Zahl ist, immer auch durch $2Q$ theilbar.* Wenn $a=1$, hat man $b=m$, $Q=m^2$, und daher den Satz:

> Wenn m eine durch kein Quadrat theilbare ungerade Zahl ist, und M eine $m$eckige Zahl, welche durch m dividirt den Rest 1 läfst, so wird $M-1$ auch durch m^2 theilbar sein.

Die für M und $M-1$ angegebnen Werthe zeigen, dafs immer gleichzeitig $2M$ durch n und $2(M-1)$ durch $n-1$ theilbar ist. Wenn also M

nicht blofs die zweite *M*eckige, sondern noch aufserdem eine vieleckige Zahl ist, so haben die beiden Zahlen $2M$ und $2(M-1)$ aufser den Factoren 2 und 1 noch andere Factoren, welche nur um 1 verschieden sind. Diese Eigenschaft kann als Definition einer vieleckigen Zahl gebraucht werden. Man beweist nämlich sehr leicht den umgekehrten Satz:

Jede Zahl M ist so oft eine vieleckige Zahl, als $2M$ einen Factor hat, welcher von einem Factor der Zahl $2(M-1)$ nur um 1 verschieden ist; wenn von den beiden um 1 verschiednen Factoren der Zahlen $2M$ und $2(M-1)$ der Factor von $2M$ der gröfsere ist, so ist M eine *eigentliche* vieleckige Zahl und dieser Factor ihre Seite, und wenn man

$$2M = ff', \quad 2(M-1) = gg', \quad f = g+1$$

hat, so wird $g'-f'+2$ die der Seite f entsprechende Eckenzahl von M.

Mit der Aufgabe, zu bestimmen, *wie oft und auf welche Art eine gegebene Zahl eine vieleckige sein kann,* schliefst das grofse Werk des *Diophantus;* doch ist ihre Lösung in den auf uns gekommnen Handschriften abgebrochen, vielleicht vom Verfasser selbst unvollendet gelassen.

III. $z =$ einer primitiven 8ten oder 16ten Wurzel der Einheit.

Bezeichnet ϱ eine primitive 16te, $\sigma = \varrho^2$ eine primitive 8te Wurzel der Einheit, so wollen wir jetzt in den Gleichungen

$$\Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})\} = \Sigma q^{i^2} z^i,$$
$$(z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})\} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)} z^{2i+1},$$

in der ersten nach einander $z = \sigma$, $z = -\sigma$, in der zweiten nach einander $z = \varrho$, $z = \varrho^5$ setzen, und die beiden jedesmal erhaltnen Formeln mit einander multipliciren.

Man kann den rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Reihen die folgende Form geben:

47. $\Sigma q^{i^2} z^i = \Sigma q^{16i^2} z^{4i} + \Sigma q^{(4i+1)^2}(z^{4i+1} + z^{-(4i+1)}) + \frac{1}{2}\Sigma q^{(4i+2)^2}(z^{4i+2} + z^{-(4i+2)})$,

48. $\Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)} z^{2i+1} = \frac{1}{2}\Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)}(z^{2i+1} + z^{-(2i+1)}) = \Sigma q^{2i(4i+1)}(z^{8i+1} + z^{-(8i+1)})$
$\qquad + \Sigma q^{(2i+1)(4i+1)}(z^{8i+3} + z^{-(8i+3)})$.

Die beiden Summen rechts vom zweiten Gleichheitszeichen in der Formel (48.) werden aus der Summe $\Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)} z^{2i+1}$ erhalten, wenn man dem Index i respective die Formen $4i$ und $-(4i+1)$, $4i+1$ und $-(4i+2)$ giebt.



Da

$$\varrho^{8i} = \sigma^{4i} = (-1)^i, \quad \varrho^4 + \varrho^{-4} = \sigma^2 + \sigma^{-2} = 0, \quad \varrho^2 + \varrho^{-2} = \sigma + \sigma^{-1} = \sqrt{2},$$

$$\varrho^3 + \varrho^{-3} = (\varrho + \varrho^{-1})\{\varrho^2 + \varrho^{-2} - 1\} = (\varrho + \varrho^{-1})(\sqrt{2} - 1),$$

so folgt aus (47.) für $z = \sigma$ und aus (48.) für $z = \varrho$, wenn man letztere Gleichung mit $\varrho + \varrho^{-1}$ dividirt,

$$49. \quad \Pi\{(1 - q^{2i+2})(1 + q^{2i+1}\sigma)(1 + q^{2i+1}\sigma^{-1})\} = \Sigma \sigma^i q^{i^2}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{16i^2} + \sqrt{2}\,\Sigma(-1)^i q^{(4i+1)^2}$$

$$50. \quad \Pi\{(1 - q^{i+1})(1 + q^{i+1}\sigma)(1 + q^{i+1}\sigma^{-1})\} = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\varrho^{2i+1} + \varrho^{-(2i+1)}}{\varrho + \varrho^{-1}} q^{\frac{1}{2}(i^2+i)}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{2i(4i+1)} + (\sqrt{2} - 1)\Sigma(-1)^i q^{(2i+1)(4i+1)}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen ϱ^5 für ϱ und also $-\sigma$ für σ, so ändert sich in den Ausdrücken rechts blofs das Zeichen von $\sqrt{2}$. Man erhält daher durch Multiplication je zweier durch diese Änderung aus einander abgeleiteten Formeln,

$$51. \quad \Pi\{(1 - q^{2i+2})^2(1 + q^{8i+4})\}$$
$$= \{\Sigma(-1)^i q^{16i^2}\}^2 - 2\{\Sigma(-1)^i q^{(4i+1)^2}\}^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{16(i^2+k^2)} - 2q^2\Sigma(-1)^{i+k} q^{16(i^2+k^2)+8(i+k)}$$

$$52. \quad \Pi\{(1 - q^{i+1})^2(1 + q^{4i+4})\}$$
$$= \{\Sigma(-1)^i q^{2i(4i+1)}\}^2 - 2\Sigma(-1)^i q^{2i(4i+1)}.\Sigma(-1)^i q^{(2i+1)(4i+1)} - \{\Sigma(-1)^i q^{(2i+1)(4i+1)}\}^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{8(i^2+k^2)+2(i+k)} - q^2\Sigma(-1)^{i+k} q^{8(i^2+k^2)+6(i+k)} - 2q\Sigma(-1)^{i+k} q^{8(i^2+k^2)+2i+6k}.$$

Die beiden unendlichen Producte kann man jedes in zwei *elliptische* unendliche Producte zerfällen, und erhält auf diese Weise für die vorstehenden Ausdrücke noch andere Darstellungen durch Doppelsummen. Man hat nämlich

$$53. \quad \Pi\{(1 - q^{2i+2})^2(1 + q^{8i+4})\} = \Pi\{(1 - q^{4i+2})^2(1 - q^{4i+4})\}.\Pi\{(1 - q^{8i+8})(1 - q^{16i+8})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{2i^2}.\Sigma(-1)^i q^{8i^2} = \{\Sigma q^{8i^2} - 2\Sigma q^{2(4i+1)^2}\}\Sigma(-1)^i q^{8i^2}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{8(i^2+k^2)} - 2q^2\Sigma(-1)^i q^{8(i^2+4k^2)+16k}$$

$$54. \quad \Pi\{(1 - q^{i+1})^2(1 + q^{4i+4})\} = \Pi\{(1 - q^{2i+1})^2(1 - q^{2i+2})\}.\Pi\{(1 - q^{4i+2})(1 - q^{8i+8})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{i^2}.\Sigma(-1)^i q^{2i(2i+1)} = \{\Sigma q^{4i^2} - 2\Sigma q^{(4i+1)^2}\}\Sigma(-1)^i q^{4i^2+2i}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{4(i^2+k^2)+2i} - 2q\Sigma(-1)^i q^{4(i^2+4k^2)+2i+8k}.$$

Wenn man die Formeln (51.) und (53.) mit einander vergleicht, und die Reihen, in denen die Exponenten von q die Form $8i$ und in denen sie die Form $8i+2$ haben, besonders gleich setzt; ferner in den so erhaltenen Gleichungen q für q^8 setzt, nachdem man die zweite derselben zuvor mit q^2 dividirt hat,

so kommt man auf die bereits früher gefundnen Gleichungen A. (1) und A. (4) der Formelntabelle.

Ebenso zerfällt die durch Vergleichung von (52.) und (54.) erhaltene Gleichung in zwei Gleichungen, wenn man die Reihen, in denen die Exponenten von q gerade und in denen sie ungerade sind, besonders einander gleich setzt. Wenn man die zweite dieser Gleichungen durch q dividirt, und hierauf q für q^2 setzt, so ergiebt sich die Formel A. (6). Wenn man dagegen in der ersten von diesen Gleichungen q für $-q^2$ setzt, so erhält man eine neue Formel,

$$55. \qquad \Sigma q^{4(i^2+k^2)+i+k} + \Sigma q^{4(i^2+k^2)+3(i+k)+1} = \Sigma q^{2(i^2+k^2)+k}.$$

Man wird aber weiter unten sehen, dafs diese Gleichung in einer allgemeineren enthalten ist, welche unmittelbar aus der Fundamentalformel fliefst.

IV. $z =$ einer primitiven 24ten Wurzel der Einheit.

Setzt man in (21.) unter den Zeichen Σ für i nach einander $2i$ und $-(2i+1)$, so erhält man

$$56. \qquad (z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})\} = \Sigma q^{\frac{1}{2}i(i+1)} z^{2i+1}$$
$$= \Sigma q^{\frac{1}{2}i(3i+1)}(z^{6i+1}+z^{-(6i+1)}) + \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} z^{6i+3}$$
$$= \Sigma q^{3i(6i+1)}(z^{12i+1}+z^{-(12i+1)}) + \Sigma q^{(3i+1)(6i+3)}(z^{12i+5}+z^{-(12i+5)})$$
$$+ \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}(z^{12i+3}+z^{-(12i+3)}).$$

Es bedeute jetzt ϱ eine primitive 24ste Wurzel der Einheit, welche in der vorstehenden Gleichung für z gesetzt werden soll. Da

$$\varrho^{12i} = (-1)^i, \quad \varrho^6+\varrho^{-6} = 0, \quad \varrho^4+\varrho^{-4} = 1, \quad \varrho^2+\varrho^{-2} = \sqrt{3},$$
$$\varrho^3+\varrho^{-3} = (\varrho+\varrho^{-1})(\varrho^2+\varrho^{-2}-1) = (\varrho+\varrho^{-1})(\sqrt{3}-1),$$
$$\varrho^5+\varrho^{-5} = (\varrho+\varrho^{-1})(\varrho^4+\varrho^{-4}-\varrho^2-\varrho^{-2}+1) = (\varrho+\varrho^{-1})(2-\sqrt{3}),$$

so folgt aus (56.) für $z = \varrho$ und nach Division mit $\varrho+\varrho^{-1}$,

$$57. \qquad \Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}\varrho^2)(1+q^{i+1}\varrho^{-2})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{3i(6i+1)} + (2-\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+3)} + (\sqrt{3}-1)\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}.$$

Setzt man ϱ^7 für ϱ, so geht $\sqrt{3}$ und ϱ^2 in $-\sqrt{3}$ und $-\varrho^2$ über. Man erhält daher aus (57.) eine zweite Formel, wenn man darin gleichzeitig ϱ^2 und $\sqrt{3}$ in $-\varrho^2$ und $-\sqrt{3}$ verwandelt. Durch Multiplication beider Formeln ergiebt sich, da

$$(1-\varrho^4 x)(1-\varrho^{-4} x) = \frac{1+x^3}{1+x},$$

die folgende,

$$58. \quad \Pi \frac{(1-q^{i+1})^2 (1+q^{6i+6})}{1+q^{2i+2}}$$

$$= \{\Sigma(-1)^i q^{3i(6i+1)} + (2-\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+3)} + (-1+\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}\}$$
$$. \{\Sigma(-1)^i q^{3i(6i+1)} + (2+\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+3)} + (-1-\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}\}.$$

Anderseits folgt aus (56.), wenn man für z eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit und dann q^2 für q setzt,

$$\Pi \frac{(1-q^{2i+2})(1+q^{6i+6})}{1+q^{2i+2}} = \Sigma q^{3i(3i+3)} - \Sigma q^{(3i+1)(3i+2)}$$
$$= \Sigma q^{3i(3i+1)} - 2\Sigma q^{(6i+1)(6i+2)}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\} = \Sigma(-1)^i q^{i^2} = \Sigma(-1)^i q^{9i^2} - 2\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2},$$

so erhält man das unendliche Producte (58.) noch auf eine andere Art als Product zweier Reihen ausgedrückt,

$$59. \quad \Pi \frac{(1-q^{i+1})^2 (1+q^{6i+6})}{1+q^{2i+2}}$$

$$= \{\Sigma q^{3i(3i+1)} - 2\Sigma q^{(6i+1)(6i+2)}\}\{\Sigma(-1)^i q^{9i^2} - 2\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}\}.$$

Wenn man in (58.) und (59.) die angedeutete Multiplication ausführt, indem man das Product zweier Summen immer durch eine Doppelsumme ersetzt, so giebt die Vergleichung dieser beiden Formeln eine Gleichung zwischen *zehn* Doppelsummen. Diese Gleichung zerfällt in drei einfachere, wenn man die Doppelsummen besonders einander gleich setzt, in welchen die Exponenten von q respective die Formen $3i$, $3i+1$ und $3i+2$ haben. Wenn man in diesen Gleichungen $-q$ für q^3 setzt, nachdem man respective die zweite und dritte Gleichung durch q und q^2 dividirt hat, so kommt die dritte auf die Gleichung A. (1) zurück, und es werden die beiden andern Gleichungen,

$$60. \quad \Sigma q^{6(i^2+k^2)+i+3k} + \Sigma q^{6(i^2+k^2)+5i+3k+1} = \Sigma q^{3(i^2+k^2)+i+2k}$$

$$61. \quad \Sigma q^{6(i^2+k^2)+i+k} - 4\Sigma q^{6(i^2+k^2)+i+5k+1} + \Sigma q^{6(i^2+k^2)+5(i+k)+2}$$
$$= \Sigma q^{3i^2+3k^2+i} - 4\Sigma q^{3i^2+12k^2+2i+6k+1}.$$

Je nachdem die Zahl i gerade $= 2i$ oder ungerade $= -(2i+1)$ ist, verwandelt sich $\frac{1}{2}(3i^2+i)$ in $6i^2+i$ oder in $(2i+1)(3i+1) = 6i^2+5i+1$.

Hieraus folgt, dafs man in (60.) die beiden Doppelsummen links vom Gleichheitszeichen in die eine

$$60^*.\qquad \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)+6k^2+3k} = \Sigma q^{3(i^2+k^2)+i+2k}$$

zusammenziehen kann. Zufolge A. (7.) werden in (61.) die zweiten Doppelsummen auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich. Die Gleichung (61.) wird dadurch auf die folgende reducirt,

$$62.\qquad \Sigma q^{6(i^2+k^2)+i+k} + \Sigma q^{6(i^2+k^2)+5(i+k)+2} = \Sigma q^{3i^2+3k^2+i}.$$

Wir werden im Folgenden sehen, dafs auch die Gleichungen (60*.) und (62.) in allgemeineren Formeln enthalten ist.

Allgemeinere zur Classe (1, 1) gehörige Gleichungen zwischen Doppelsummen.

Ich will jetzt zeigen, wie man unmittelbar aus den Fundamentalformeln *drei* allgemeine Gleichungen zwischen Doppelsummen ableiten kann, in welchen die Gröfsen q und z, welche sie enthalten, beide beliebig bleiben. Diese zur Classe (1, 1) gehörigen Gleichungen werden die Formeln A. (1) — (7) der Formeltabelle, so wie die im Vorhergehenden gefundenen Gleichungen (55.), (60*.) und (62.) als besondere Fälle umfassen. Eine dieser Formeln kommt mit derjenigen, welche ich in der Anmerkung zur Formeltabelle mitgetheilt habe, überein, wenn man für q und z beliebige Potenzen von q setzt, was dasselbe ist, als wenn diese Gröfsen ihre völlige Allgemeinheit beibehalten.

Man erhält zwei von diesen allgemeinen Gleichungen, wenn man die beiden Formeln

$$\Pi\{(1-q^{2i+?})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})\} = \Sigma q^{i^2}z^{i},$$
$$\Pi\{(1-q^{2i+2})(1-q^{2i+1}z)(1-q^{2i+1}z^{-1})\} = \Sigma (-1)^i q^{i^2}z^{i},$$

ferner die beiden Formeln

$$\Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z^2)(1+q^{2i+1}z^{-2})\} = \Sigma q^{i^2}z^{2i},$$
$$(z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+2}z^2)(1+q^{2i+2}z^{-2})\} = \Sigma q^{i^2+i}z^{2i+1}$$

mit einander multiplicirt. Man kann nämlich jedes der beiden unendlichen Producte, welche man nach geschehener Multiplication erhält, noch auf eine andere Art in zwei elliptische unendliche Producte zerfällen, von denen nur das eine die Gröfse z enthält, und erhält hiedurch die beiden allgemeinen Formeln:

$$63.\quad \Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}.\Pi\{(1-q^{4i+4})(1-q^{4i+2}z^2)(1-q^{4i+2}z^{-2})\}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{2i^2+2k^2}z^{2k} = \Sigma(-1)^i q^{i^2+k^2}z^{i+k}$$

$$64.\quad \Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}.(z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})\}$$
$$= \Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)+2k^2+k}z^{2i+1} = \Sigma q^{i^2+k^2+i}z^{2i+2k+1}.$$

Da $\Sigma q^{\frac{1}{2}(k^2+k)} = 2\Sigma q^{2k^2+k}$, so wird die erste Doppelsumme in (64.)

$$\tfrac{1}{2}\Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+k^2+i+k)}z^{2i+1};$$

vertauscht man in diesem Ausdruck die Indices i und k, und setzt hierauf wieder $2\Sigma q^{2k^2+k}$ für $\Sigma q^{\frac{1}{2}(k^2+k)}$, so erhält man

$$\Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)+2k^2+k}z^{2k+1} = \Sigma q^{i^2+k^2+i}z^{2i+2k+1},$$

oder, wenn man mit z dividirt und dann z für z^2 setzt,

$$64^*.\quad \Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)+2k^2+k}z^i = \Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)+2k^2+k}z^k = \Sigma q^{i^2+k^2+i}z^{i+k}.$$

Die beiden Formeln (63.) und (64*.) umfassen sämmtliche Formeln A. (1) — (7) und die im Vorigen gefundne Formel (60*.). Setzt man nämlich in (63.) für q und z nach einander

$$q^{\frac{3}{2}},\ q^{\frac{1}{2}};\quad q,\ 1;\quad q^2,\ q,$$

so erhält man die Formeln A. (2)*), (4), (5). Setzt man ferner in (64*.) $-q^{-1}$ für z und für q nach einander q^3, q^4, q^6, so erhält man die Formeln A. (3), (6), (7); setzt man in derselben Formel q^{-1} für z und q^2 für q, so erhält man A. (1); endlich, wenn man q^{-1} für z und q^3 für q setzt, die Formel (60*.). Die Formel (63.) verwandelt sich in die oben S. 84 im ersten Hefte dieses Bandes gegebne, wenn man für q und z beliebige Potenzen von q setzt.

Eine dritte allgemeine Formel kann man auf folgende Art aus der Fundamentalformel ableiten.

Man setze in der Formel

$$\Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})\} = \Sigma q^{i^2}z^i$$

für q nach einander die Werthe $q\sqrt{-1}$ und $-q\sqrt{-1}$, und multiplicire die beiden hiedurch erhaltenen Gleichungen. Da

$$\Pi(1-q^{2i+2}) = \Pi(1-q^{4i+2})\Pi(1-q^{4i+4}),$$
$$\Sigma(\sqrt{-1})^{i^2}q^{i^2}z^i = \Sigma q^{4i^2}z^{2i} + \sqrt{-1}\,\Sigma q^{(2i+1)^2}z^{2i+1},$$

---

*) In dieser Formel ist in der zweiten Doppelsumme für $3ii+kk$ zu lesen $3ii+3kk$.

so findet man auf diese Weise,

$$\Pi\{(1+q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}.\Pi\{(1-q^{4i+4})(1+q^{4i+2}z^2)(1+q^{4i+2}z^{-2})\}$$
$$=\Sigma q^{2i^2}.\Sigma q^{2i^2}z^{2i} = \{\Sigma q^{4i^2}z^{2i}\}^2+\{\Sigma q^{(2i+1)^2}z^{2i+1}\}^2,$$

oder, wenn man wieder für jedes Product zweier Reihen eine Doppelsumme und zugleich q, z für q^2, z^2 setzt,

$$65.\quad \Pi\{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})^2(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})\}$$
$$=\Sigma q^{i^2+k^2}z^i = \Sigma q^{2i^2+2k^2}z^{i+k}+\Sigma q^{2(i^2+k^2)+2(i+k)+1}z^{i+k+1}.$$

Setzt man in dieser allgemeinen Formel wieder q^2 für q und giebt der Gröfse z den Werth q^{-1}, setzt man ferner rechts vom Gleichheitszeichen $-i$ und $-k$ für i und k, so erhält man die obige Formel (55.). Setzt man dagegen in der zweiten Doppelsumme rechts $-i-1$ und $-k-1$ für i und k, wodurch sich z^{i+k+1} in $z^{-(i+k+1)}$ ändert, und hierauf q^3 und q für q und z, so erhält man die obige Formel (62.). Diese particulären Formeln (55.) und (62.) waren dadurch gefunden worden, dafs in den Fundamentalformeln für z primitive 16te und 24te Wurzeln der Einheit gesetzt wurden, während im Vorhergehenden die allgemeine Formel (65.) aus denselben Fundamentalformeln dadurch abgeleitet worden ist, dafs man für q die Gröfse $q\sqrt{-1}$ setzte, welche Methoden wesentlich von einander verschieden sind.

Neue Gleichungen zwischen Doppelsummen, welche aus den der Transformation der 3ten und 7ten Ordnung angehörenden Modulgleichungen hervorgehen.

Zu den zahlreichen in den vorhergehenden Untersuchungen aus einer und derselben Fundamentalformel abgeleiteten Gleichungen zwischen Doppelsummen will ich noch einige hinzufügen, welche aus einer andern Quelle fliefsen, nämlich aus den *Modulgleichungen* oder den algebraischen Gleichungen zwischen den Moduln zweier elliptischen Integrale, welche in einander transformirt werden können. Unter den unendlich vielen Gleichungen dieser Art können jedoch nur die auf die Transformation der 3ten und der 7ten Ordnung bezüglichen zu dem vorliegenden Zweck angewendet werden. Diese nehmen ihre einfachste Form an, wenn man die erstere zwischen den *Quadratwurzeln* und die letztere zwischen den *Biquadratwurzeln* der Moduln und ihrer Complemente aufstellt. Es wird nämlich die erstere eine *lineäre* Gleichung zwischen dem Product der Quadratwurzeln des gegebnen und transformirten Moduls und dem Product der Quadratwurzeln ihrer Complemente; die letztere eine *lineäre* Gleichung zwischen

dem Product der Biquadratwurzeln des gegebnen und transformirten Moduls und dem Product der Biquadratwurzeln ihrer Complemente. Ich habe in den *Fundamentis* S. 184 die Quadratwurzel des Moduls und seines Complements durch gebrochne Functionen von q ausgedrückt, welche denselben Nenner haben, und oben S. 76 und 77 im 1sten Heft dieses Bandes dasselbe in Bezug auf ihre Biquadratwurzel gethan, und zwar auf *vier* verschiedene Arten. Setzt man in diesen Ausdrücken q^n für q, so verwandeln sie sich nach der von mir aufgestellten Theorie der Transformation der elliptischen Functionen respective in die Ausdrücke der Quadrat- und Biquadratwurzel des durch eine Transformation der $n$ten Ordnung transformirten Moduls und seines Complements. Wenn man daher in dem Ausdrucke der Quadratwurzel des Moduls und seines Complements q^3 für q und in den Ausdrücken ihrer Biquadratwurzel q^7 für q setzt, so wird man alle in die beiden Modulgleichungen eingehenden Gröfsen durch q ausgedrückt haben, und zwar werden die beiden Producte, zwischen denen eine lineäre Gleichung gegeben ist, durch Brüche ausgedrückt werden, welche denselben Nenner haben. Die beiden Zähler derselben und ihr gemeinschaftlicher Nenner werden Doppelsummen von der hier betrachteten Art, und es wird daher durch Multiplication mit dem gemeinschaftlichen Nenner jedesmal eine Gleichung zwischen diesen drei Doppelsummen erhalten. In mehreren dieser Gleichungen trifft es sich jedoch, dafs die allgemeinen Glieder zweier von diesen Doppelsummen nur im Vorzeichen verschieden sind, und sich daher in eines zusammenziehen lassen. In diesen Fällen erhält man aus den beiden Modulgleichungen Gleichungen zwischen nur zwei Doppelsummen, doch wird in der einen das allgemeine Gesetz der Vorzeichen einen complicirteren Ausdruck haben. Die Modulgleichung, die sich auf die Transformation 3ter Ordnung bezieht, führt zu einer zur Classe C. oder (3, 3) gehörenden Formel. Die auf die Transformation 7ter Ordnung bezügliche Modulgleichung führt durch Combination der verschiednen Ausdrücke, die ich oben für die Biquadratwurzel des Moduls und seines Complementes gegeben habe, zu 16 Formeln, die sich aber, wenn man diejenigen ausschliefst, die in den übrigen enthalten sind, auf 7 zurückführen lassen, von denen 3 der Classe (7, 7), 2 der Classe (7, 14) und 2 der Classe (21, 42) angehören.

I. $n = 3$.

Wenn man durch eine Transformation 3ter Ordnung oder durch eine Substitution von der Form

$$\sin\psi = \frac{a\sin\varphi + b\sin\varphi^3}{1 + c\sin\varphi^2}$$

die Integrale

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin\varphi^2)}}, \quad \int \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\lambda^2 \sin\psi^2)}}$$

in einander transformiren kann, so findet zwischen den beiden Moduln k und λ und ihren Complementen $k' = \sqrt{(1-k^2)}$, $\lambda' = \sqrt{(1-\lambda^2)}$ die einfache Gleichung

$$\sqrt{(k'\lambda')} + \sqrt{(k\lambda)} = 1$$

Statt, welche zuerst von *Legendre* in seinem „Traité des Fonctions Elliptiques" aufgestellt worden ist. Substituirt man in den in den Fundamentis gegebnen Ausdrücken von $\sqrt{k}$ und $\sqrt{k'}$,

$$\sqrt{k} = \frac{2\{\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + ..\}}{1+2q+2q^4+2q^9+..} = \frac{2\sqrt[4]{q}\,\Sigma q^{4i^2+2i}}{\Sigma q^{i^2}},$$

$$\sqrt{k'} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+..}{1+2q+2q^4+2q^9+..} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{i^2}}{\Sigma q^{i^2}},$$

für q die Gröfse q^3, so erhält man

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2\sqrt[4]{q^3}\,\Sigma q^{3(4i^2+2i)}}{\Sigma q^{3i^2}}, \quad \sqrt{\lambda'} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3i^2}}{\Sigma q^{3i^2}}.$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Modulgleichung substituirt, so ergiebt sich die folgende Formel, welcher ich das den Doppelsummen gleiche unendliche Product in seiner Normalform beigefügt habe,

XIII.

$$4q\Pi\{(1+q^{12i+2})(1+q^{12i+6})^2(1+q^{12i+10})(1-q^{24i+8})(1-q^{24i+16})(1-q^{24i+24})^2\}$$
$$= \Sigma\{1-(-1)^{i+k}\}\, q^{i^2+3k^2} = 4\Sigma q^{4i^2+12k^2+2i+6k+1}.$$

Diese Formel gehört der Classe (3, 3) oder C. an, und kann den oben gegebnen Formeln dieser Classe hinzugefügt werden.

Die in XIII. links vom Gleichheitszeichen befindliche Doppelsumme besitzt die Eigenschaft, dafs wenn von ihr blofs diejenigen Glieder, deren Exponent durch 3 aufgeht, genommen werden, für welche i die Form $3i$ annimmt, und in denselben q für q^3 gesetzt wird, man auf die ursprüngliche Doppelsumme wieder zurückkommt. Dieselbe Eigenschaft läfst sich auch von der hinter dem letzten Gleichheitszeichen befindlichen leicht erweisen. Um nämlich alle Glieder, deren Exponent durch 3 theilbar ist, zu erhalten, hat man in derselben unter dem Zeichen Σ nur $-(3i+1)$ für i zu setzen, wodurch sich $4i^2+2i+1$ in $12i^2+18i+3$ verwandelt; setzt man hierauf q für q^3 und vertauscht die In-

dices i und k, so kommt man auf den ursprünglichen Ausdruck zurück. Es giebt daher die besondere Vergleichung derjenigen Glieder der Gleichung XIII., deren Exponent durch 3 theilbar ist, wieder dieselbe Gleichung XIII., nur dafs in ihr q^3 für q steht.

Will man in XIII. die Glieder der Doppelsummen besonders mit einander vergleichen, deren Exponent, durch 3 dividirt, den Rest 1 läfst, so hat man in der Doppelsumme links $\pm(3i+1)$ für i zu setzen, in der Doppelsumme rechts dagegen mufs man dem Index i die Formen $3i$ und $3i+1$ geben. Wenn man dann noch mit $2q$ dividirt und q für q^3 setzt, ferner auf beiden Seiten die Indices i und k vertauscht, so erhält man

$$\Sigma(1+(-1)^{i+k})q^{3i^2+3k^2+2k} = 2\Sigma q^{4i^2+12k^2+2i+2k} + 2\Sigma q^{4i^2+12k^2+2i+10k+2}.$$

Die beiden Doppelsummen rechts kann man in eine zusammenziehen. Da nämlich $12k^2+10k+2=(2k+1)(6k+2)$, so sind $12k^2+2k$ und $12k^2+10k+2$ die beiden Formen, welche die Zahl $k(3k+1)$ annimmt, je nachdem k gerade $=2k$ oder ungerade $=-(2k+1)$ wird. Man kann daher statt der vorstehenden Gleichung einfacher die folgende setzen, bei welcher ich zugleich das den Doppelsummen gleiche unendliche Product in seiner Normalform beigefügt habe:

$$2\Pi\{(1+q^{12i+2})^2(1+q^{12i+10})^2(1-q^{12i+12})^2(1+q^{24i+4})(1+q^{24i+20})(1-q^{48i+16})(1-q^{48i+32})\}$$
$$= \Sigma(1+(-1)^{i+k})q^{i^2+3k^2+2k} = 2\Sigma q^{4i^2+3k^2+2i+k}.$$

Wie diese Gleichung aus der Gleichung XIII. folgt, so wird sich auch umgekehrt aus ihr die Gleichung XIII. ergeben. Wenn nämlich $q<1$ und $f(q)$ eine Function, welche für $q=0$ verschwindet, und durch $f(q)$ eine andere Function $\varphi(q)$ mittelst der Gleichung

$$f(q) = f(q^3)+q\varphi(q^3)$$

definirt wird, so wird umgekehrt $\varphi(q)$ aus $f(q)$ durch die unendliche Reihe

$$q\varphi(q^3)+q^3\varphi(q^9)+q^9\varphi(q)^{27}+q^{27}\varphi(q^{81})+\text{etc.} = f(q)$$

bestimmt. Bezeichnet man eine der beiden Doppelsummen in XIII. mit $f(q)$, so wird die auf derselben Seite des Gleichheitszeichens befindliche Doppelsumme in der aus XIII. abgeleiteten Gleichung $\frac{1}{2}\varphi(q)$; und da immer auch $f(q)$ durch $\varphi(q)$ bestimmt ist, so folgt, dafs wenn die beiden Doppelsummen der letzteren Gleichung einander gleich sind, auch die beiden Doppelsummen in XIII. einander gleich sein müssen.

II. $n = 7$.

In dem 12ten Bande des gegenwärtigen Journals S. 173 hat Herr Dr. *Gützlaff* die algebraische Transformation der 7ten Ordnung untersucht, und die auf diese Transformation bezügliche Modulgleichung auf die einfache Form

$$\sqrt[4]{(k'\lambda')} + \sqrt[4]{(k\lambda)} = 1$$

gebracht. Jede der beiden Gröfsen $\sqrt[4]{k}$ und $\sqrt[4]{k'}$ habe ich oben durch *vier* verschiedene Brüche ausgedrückt. Es ist nämlich

$$66. \quad \begin{cases} a) & \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{6i^2+2i}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)} q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)} q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}, \\ b) & \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{4i^2+2i}}{\Sigma q^{2i^2+i}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}}{\Sigma q^{2i^2+i}}, \\ c) & \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}}{\Sigma(-1)^i q^{2i^2}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{i^2}}{\Sigma(-1)^i q^{2i^2}}, \\ d) & \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{2i^2+i}}{\Sigma q^{i^2}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{2i^2}}{\Sigma q^{i^2}}, \end{cases}$$

wo die neben einander gestellten Brüche denselben Nenner haben.

Wenn man in diesen Ausdrücken für q die Gröfse q^7 setzt, so erhält man 4 verschiedne Brüche für jede der beiden Gröfsen $\sqrt[4]{\lambda}$ und $\sqrt[4]{\lambda'}$, welche wieder respective dieselben Nenner haben. Man substituire jetzt beliebige dieser Ausdrücke von $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda'}$ für diese Gröfsen in die Modulgleichung, *indem man jedoch für $\sqrt[4]{k}$ und $\sqrt[4]{k'}$ und eben so für $\sqrt[4]{\lambda}$ und $\sqrt[4]{\lambda'}$ gleichzeitig immer nur diejenigen Brüche setzt, welche denselben Nenner haben.* Es werden dann jedesmal auch die Ausdrücke von $\sqrt[4]{(k\lambda)}$ und $\sqrt[4]{(k'\lambda')}$ einen gemeinschaftlichen Nenner haben, und es wird sich durch Multiplication mit demselben jedesmal eine Gleichung zwischen drei Doppelsummen ergeben.

Bezeichnet man die aus den Formeln $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ durch Verwandlung von q in q^7 hervorgehenden Formeln respective mit $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$, so ergeben sich auf die angegebne Art aus der einen Modulgleichung 16 Gleichungen zwischen Doppelsummen, welche dadurch erhalten werden, dafs man jede der Formeln $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ mit jeder der Formeln $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$ combinirt. Diese Gleichungen werden zu Classen gehören, von denen in den vorhergehenden Untersuchungen noch kein Beispiel gefunden war. Es geben nämlich die Combinationen

$a\alpha,\ b\beta,\ c\gamma,\ d\delta$ Gleichungen der Classe (7, 7);

$\left.\begin{matrix} a\beta, & a\gamma, & a\delta \\ b\alpha, & c\alpha, & d\alpha \end{matrix}\right\}$ - - - - - - - (21, 42);

$\left.\begin{matrix} b\gamma, & b\delta, & c\delta \\ c\beta, & d\beta, & d\gamma \end{matrix}\right\}$ - - - - - - - (7, 14).

Diese Gleichungen lassen sich jedoch, wenn man nur die wesentlich verschiednen von ihnen betrachten will, auf eine viel geringere Anzahl zurückführen. Es werden nämlich die aus den Combinationen $d\delta$; $b\delta$, $d\beta$, $d\gamma$; $a\delta$, $d\alpha$ hervorgehenden Gleichungen respective aus den durch die Combinationen $c\gamma$; $b\gamma$, $c\beta$, $c\delta$; $a\gamma$, $c\alpha$ gefundnen durch blofse Verwandlung von q in $-q$ erhalten. Es ergiebt sich ferner bei näherer Untersuchung, dafs die aus den Combinationen $b\gamma$, $a\beta$, $a\gamma$ entspringenden Gleichungen respective in den durch die Combinationen $c\beta$, $b\alpha$, $c\alpha$ gefundnen enthalten sind und aus ihnen dadurch abgeleitet werden können, dafs man die Glieder, deren Exponent durch 7 aufgeht, besonders mit einander vergleicht. Ich werde daher in dem folgenden Tableau nur die 7 aus den Combinationen

$$a\alpha,\ b\beta,\ c\gamma;\ c\beta,\ c\delta;\ b\alpha,\ c\alpha$$

hervorgehenden Gleichungen zusammenstellen, aus denen die übrigen folgen. Die diesen Gleichungen hinzugefügten unendlichen Producte habe ich in einer einfachen, nicht in der Normalform dargestellt, da in diesen Fällen das allgemeine Glied der Normalform eine sehr grofse Factorenanzahl umfafst.

XIV.

I. (7, 7).

1. $2q\Pi\{(1+q^{12i+4})(1+q^{12i+8})(1-q^{12i+12})(1+q^{84i+28})(1+q^{84i+56})(1-q^{84i+84})\}$
$= \Sigma\{(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+k^2+i+k)} - (-1)^{i+k}\}\, q^{\frac{1}{2}(3i^2+21k^2+i+7k)}$
$= 2\Sigma(-1)^{i+k} q^{6i^2+42k^2+2i+14k+1}$ . . . . $a,\ \alpha$

2. $2q\Pi\{(1+q^{8i+2})(1+q^{8i+6})(1-q^{8i+8})(1+q^{56i+14})(1+q^{56i+42})(1-q^{56i+56})\}$
$= \Sigma\{1-(-1)^{i+k}\}\, q^{2i^2+14k^2+i+7k} = 2\Sigma q^{4i^2+28k^2+2i+14k+1}$ . . . $b,\ \beta$

3. $\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})(1-q^{14i+7})^2(1-q^{14i+14})\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{i^2+7k^2}$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{2i^2+14k^2} - 2\Sigma(-1)^{i+k} q^{2i^2+14k^2+i+7k+1}$ . . . . . . $c,\ \gamma$

M. (7, 14).

1. $\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})(1+q^{28i+7})(1+q^{28i+21})(1-q^{28i+28})\}$
$= \Sigma(-1)^i q^{2i^2+14k^2+7k}$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{i^2+14k^2+7k} + 2\Sigma(-1)^i q^{2i^2+28k^2+i+14k+1}$ . . . . . . c, β

2. $2q\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1+q^{14i+7})(1-q^{28i+28})\}$
$= 2\Sigma(-1)^i q^{2i^2+14k^2+i+7k+1}$
$= \Sigma(-1)^i q^{2i^2+7k^2} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{i^2+14k^2}$ . . . . c, δ

N. (21, 42).

1. $2q\Pi\{(1+q^{4i+2})(1-q^{8i+8})(1-q^{28i+28})\}$
$= \Sigma\{(-1)^{\frac{1}{2}(k^2-k)} - (-1)^{i+k}\} q^{\frac{1}{2}(4i^2+21k^2+2i+7k)}$
$= 2\Sigma(-1)^k q^{4i^2+42k^2+2i+14k+1}$ . . . . b, α

2. $\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})(1-q^{7i+7})$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(k^2-k)+i} q^{\frac{1}{2}(4i^2+21k^2+7k)} - 2\Sigma(-1)^{i+k} q^{2i^2+42k^2+i+14k+1}$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(2i^2+21k^2+7k)}$ . . . . c, α

Wenn man in den drei Gleichungen L. und der Gleichung M. (2) die Glieder besonders vergleicht, deren Exponenten, durch 7 dividirt, respective die Reste 2, 6, 0, 0 lassen, so wird man wieder auf ähnliche Gleichungen zurückgeführt. Aus dieser Eigenschaft lassen sich, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, ähnlich wie in I., besondre Formen schliefsen, welche die durch die Doppelsummen ausgedrückten Reihen haben müssen.

1. Die Zahl $\frac{1}{2}(3i^2+i)$ erhält die Form $7i+2$ nur für die Werthe von i, welche die Form $7i+1$ haben. Setzt man $7i+1$ für i, so verwandelt sich $\frac{1}{2}(3i^2+i+10)$ in $\frac{7}{2}(21i^2+7i+2)$ und $6i^2+2i+6$ in $7(42i^2+14i+2)$, und es erhält $(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)}$ den entgegengesetzten Werth. Wenn man daher in der Gleichung L. (1) nach Multiplication mit q^5 nur die Glieder beibehält, deren Exponent durch 7 theilbar ist, und in denselben q für q^7 setzt, ferner mit $-q$ dividirt und die Indices i und k vertauscht, so werden auf beiden Seiten der Gleichung wieder die ursprünglichen Doppelsummen erhalten werden. Bezeichnet man daher die auf den beiden Seiten von L. (1) befindlichen Doppelsummen mit $f(q)$, so wird

$$f(q) = -q^2 f(q^7) + f_1(q),$$

wo $f_1(q)$ eine Function von q ist, in welcher kein Exponent die Form $7i+2$

hat. Aus dieser Gleichung ergiebt sich umgekehrt $f(q)$ durch $f_1(q)$ mittelst der Formel,

$$f(q) = f_1(q) - q^2 f_1(q^7) + q^{\frac{1}{3}(7^2-1)} f_1(q^{7^2}) - q^{\frac{1}{3}(7^3-1)} f_1(q^{7^3}) + \text{etc.}$$

Das Characteristische dieser Form der Reihe $f(q)$ besteht darin, dafs, wenn man den Theil derselben, welcher die Glieder umfafst, deren Exponent durch 7^m dividirt den Rest $\frac{1}{3}(7^m-1)$, aber nicht auch durch 7^{m+1} dividirt den Rest $\frac{1}{3}(7^{m+1}-1)$ läfst, durch $(-1)^m q^{\frac{1}{3}(7^m-1)} f_1(q^{7^m})$ ausdrückt, die Function $f_1(q)$ für jedes m dieselbe bleibt, und die Glieder der Reihe $f(q)$ enthält, deren Exponent durch 7 dividirt nicht den Rest 2 läfst.

In der Gleichung L. (1) ist die Doppelsumme hinter dem zweiten Gleichheitszeichen eine ungerade Function von q; man beweist leicht, dafs dies auch mit der Doppelsumme vor diesem Gleichheitszeichen der Fall ist, indem der Factor $(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+k^2+i+k)} - (-1)^{i+k} = 0$ ist, so oft der Exponent $\frac{1}{2}(3i^2+21k^2+i+7k)$ gerade ist. Weil hier die Function $f(q)$ eine ungerade ist, mufs auch $f_1(q)$ eine ungerade Function sein.

2. Man multiplicire die Gleichung L. (2) mit q, und behalte blofs die Glieder, deren Exponent durch 7 aufgeht, was dadurch geschieht, dafs man $-(7i+2)$ für i substituirt, wodurch $2i^2+i+1$ sich in $7(14i^2+7i+1)$ verwandelt. Setzt man hierauf q für q^7 und dividirt mit q, so erhält man nach Vertauschung der Indices wieder auf beiden Seiten der Gleichung die ursprünglichen Doppelsummen. Bezeichnet man daher die Doppelsummen in L. (2) mit $f(q)$ und mit $f_1(q)$ die Glieder von $f(q)$, in welchen kein Exponent die Form $7n+6$ hat, so wird

$$f(q) = q^6 f(q^7) + f_1(q).$$

Man erhält hieraus für $f(q)$ die Form

$$f_1(q) + q^6 f_1(q^7) + q^{7^2-1} f_1(q^{7^2}) + q^{7^3-1} f_1(q^{7^3}) + \text{etc.} = f(q).$$

Das Characteristische dieser Form besteht darin, dafs wenn man die Glieder von $qf(q)$, deren Exponent durch 7^m, nicht aber durch 7^{m+1} aufgeht, durch den Ausdruck $q^{7^m} f_1(q^{7^m})$ darstellt, die Function $qf_1(q)$ für jedes m dieselbe bleibt, und die Glieder der Reihe $qf(q)$ enthält, deren Exponent nicht durch 7 aufgeht.

3. Die beiden Doppelsummen in L. (3) gehen in sich selbst über, wenn man in den Gliedern, deren Exponent durch 7 theilbar ist, q für q^7 setzt. Hieraus folgt, dafs sie die Form

$$f_1(q) + f_1(q^7) + f_1(q^{7^2}) + \text{etc.}$$

haben, wo $f_1(q)$ eine Reihe bedeutet, in der kein Exponent durch 7 theilbar ist. Bezeichnet man daher den Theil derselben, welcher die Glieder umfafst, deren Exponent durch 7^m, aber nicht durch 7^{m+1} aufgeht, mit $f_1(q^{7^m})$, so bleibt $f_1(q)$ für jedes m dieselbe Function.

4. Betrachtet man in M. (2) diejenigen Glieder, deren Exponent durch 7 theilbar ist, setzt in ihnen $-q$ für q^7, und kehrt alle Zeichen um, so kommt man wieder auf die ursprünglichen Doppelsummen zurück. Bezeichnet man daher diese Doppelsummen mit $f(q)$, und umfafst mit $f_1(q)$ die Glieder derselben, die einen durch 7 theilbaren Exponenten haben, so mufs die Gleichung

$$f(q) = -f(-q^7) + f_1(q)$$

Statt finden, woraus

$$f(q) = f_1(q) - f_1(-q^7) + f_1(q^{7^2}) - f_1(-q^{7^3}) + \text{etc.}$$

folgt. Diese Formel zeigt, dafs wenn man in $f(q)$ alle Glieder, deren Exponenten durch 7^m, aber nicht durch 7^{m+1} theilbar sind, durch den Ausdruck $(-1)^m f_1((-1)^m q^{7^m})$ umfafst, $f_1(q)$ für jedes m unverändert bleibt.

Man kann noch aus andern Darstellungen der Modulgleichung Gleichungen zwischen Doppelsummen ableiten, welche aber in den im Vorhergehenden aufgestellten Formeln enthalten sein werden, weshalb die folgenden Andeutungen genügen mögen. Die Gröfsen

$$\sqrt[4]{k'},\quad \sqrt[4]{k},\quad \sqrt{k'},\quad \sqrt[4]{(kk')},\quad \sqrt{k}$$

lassen sich durch Brüche darstellen, welche alle denselben Nenner Σq^{i^2} haben, während die Zähler Reihen ähnlicher Art sind. Für $\sqrt[4]{(kk')}$ erhält man einen solchen Bruch, wenn man den Werth von $\sqrt[4]{k}$ aus (66. c) mit dem Werthe von $\sqrt[4]{k'}$ aus (66. d) multiplicirt. Fügt man aus (66.) die mit dem Nenner Σq^{i^2} behafteten Ausdrücke der andern 4 Gröfsen hinzu, so erhält man

$$67. \quad \begin{cases} \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{2i^2}}{\Sigma q^{i^2}}, \qquad \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{2i^2+i}}{\Sigma q^{i^2}}, \\[2ex] \sqrt{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{i^2}}{\Sigma q^{i^2}}, \quad \sqrt[4]{(kk')} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}}{\Sigma q^{i^2}}, \quad \sqrt{k} = \dfrac{2\sqrt[4]{q}\,\Sigma q^{4i^2+2i}}{\Sigma q^{i^2}}. \end{cases}$$

Bedeutet λ irgend einen transformirten Modul, so folgt hieraus, dafs, so oft man zwischen den 36 Gröfsen, welche aus der Multiplication von 1, $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt[4]{(kk')}$, $\sqrt{k}$ mit 1, $\sqrt[4]{\lambda'}$, $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt{\lambda'}$, $\sqrt[4]{(\lambda\lambda')}$, $\sqrt{\lambda}$ erhalten werden, eine lineäre Gleichung hat, sich aus derselben auch eine Gleichung zwischen Doppelsummen der hier betrachteten Art ergiebt. Multiplicirt man z. B. die Modul-

gleichung $\sqrt[4]{(k'\lambda')}+\sqrt[4]{(k\lambda)}=1$ mit $\sqrt[4]{(k'\lambda')}$ oder mit $\sqrt[4]{(k\lambda)}$ und substituirt in den hieraus entstehenden Gleichungen,

$$\sqrt[4]{(k'\lambda')}+\sqrt[4]{(k'k\lambda'\lambda)}=\sqrt[4]{(k'\lambda')}, \quad \sqrt[4]{(k'k\lambda'\lambda)}+\sqrt[4]{(k\lambda)}=\sqrt[4]{(k\lambda)}.$$

ı gemeinschaft-
lie mit den obi-
ınen Beispielen
ıngen zwischen
ifle ich. We-
Modulgleichung,

, welche man

hungen, welche
halten sind, in
ich durch Sub-
tion mit einer

Doppelsummen
len kann. Die
wobei gemein-
ıgen A. 1 — 6.
habe ich durch

Zweite Formeltabelle.

Allgemeine Gleichungen zwischen Doppelsummen.

1. $$\Pi\{(1-q^{2i+2})^2(1-q^{4i+2}z^2)(1-q^{4i+2}z^{-2})\}$$
$$=\Sigma(-1)^i q^{i^2+k^2} z^{i+k} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{2(i^2+k^2)} z^{2k}$$

2. $$(z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{16i+16})^2(1+q^{8i+8}z^2)(1+q^{8i+8}z^{-2})\}$$
$$=\Sigma q^{2[(2i+1)^2+4k^2]} z^{2(i+k)+1} = \Sigma q^{(2i+1)^2+(4k+1)^2} z^{2i+1}$$

3. $$\Pi\{(1+q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})^2(1+q^{4i+2}z^2)(1+q^{4i+2}z^{-2})\}$$
$$=\Sigma q^{2(i^2+k^2)} z^{2i} = \Sigma q^{4(i^2+k^2)} z^{2(i+k)} + \Sigma q^{(2i+1)^2+(2k+1)^2} z^{2(i+k+1)}.$$

Particuläre Gleichungen zwischen Doppelsummen, deren Exponenten ähnliche quadratische Formen haben.

$$[xx+yy]$$

$$q^2\Pi\{(1-q^{16i+8})^2(1-q^{16i+16})^4\}$$
$$=\Sigma(4k+1)q^{(4i+1)^2+(4k+1)^2} = \Sigma(-1)^i(4k+1)q^{2[4i^2+(4k+1)^2]}.$$

$$[xx+2yy]$$

1. $$q^9\Pi\{(1-q^{144i+72})(1-q^{144i+144})^2\}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k} q^{3[(6i+1)^2+2(6k+1)^2]} = \Sigma(-1)^k q^{(6i+1)^2+8(3k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^k q^{9[(4i+1)^2+8k^2]}$$

2. $$q^3\Pi\{(1-q^{24i+24})(1-q^{36i+6})(1-q^{36i+30})(1-q^{36i+36})\}$$
$$=\Sigma(-1)^i q^{3(6i+1)^2+54k^2} - \Sigma(-1)^i q^{3(6i+1)^2+6(3k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k} q^{(6i+1)^2+2(3k+1)^2}$$

3. $$q^3\Pi\{(1-q^{48i+24})(1-q^{96i+96})(1+q^{144i+72})^2(1-q^{144i+144})\}$$
$$=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)} q^{3(6i+1)^2+216k^2} - \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)} q^{3(6i+1)^2+24(3k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2-i)+k} q^{(6i+1)^2+2(6k+1)^2}$$

4. $$q^3\Pi\{(1-q^{48i+24})(1-q^{144i+144})^2(1-q^{288i+96})(1-q^{288i+192})\}$$
$$=\Sigma(-1)^i q^{3(6i+1)^2+216k^2} - \Sigma(-1)^i q^{3(6i+1)^2+24(3k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^i q^{(6i+1)^2+2(6k+1)^2}$$

5. $$q^9\Pi\{(1-q^{24i+24})(1-q^{144i+24})(1-q^{144i+120})(1-q^{144i+144})\}$$
$$=\Sigma(-1)^k q^{3(6i+1)^2+6(6k+1)^2} - 2\Sigma(-1)^k q^{27(4i+1)^2+6(6k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k} q^{(6i+1)^2+2(6k+1)^2}$$

$$[xx+3yy]$$

1. $q^4\,\Pi(1-q^{48i+48})^2$

$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{4[(6i+1)^2+12k^2]}=\Sigma(-1)^k q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k}q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$$

2. $q^4\,\Pi\{(1-q^{72i+24})(1-q^{72i+48})(1-q^{72i+72})^2\}$

$$=\Sigma q^{4[(3i+1)^2+27k^2]}-\Sigma q^{4[(3i+1)^2+3(3k+1)^2]}$$
$$=\Sigma q^{(6i+1)^2+3(6k+1)^2}-2\Sigma q^{(6i+1)^2+27(4k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+3(6k+1)^2}$$

3. $4q^4\,\Pi\{(1+q^{16i+8})(1-q^{32i+32})(1+q^{48i+24})(1-q^{96i+96})\}$

$$=\Sigma\{1-(-1)^{i+k}\}q^{4(i^2+3k^2)}=4\Sigma q^{(4i+1)^2+3(4k+1)^2}$$

$$[xx+7yy]$$

1. $2q^{32}\,\Pi\{(1+q^{288i+96})(1+q^{288i+192})(1-q^{288i+288})(1+q^{2016i+672})(1+q^{2016i+1344})(1-q^{2016i+2016})\}$

$$=\Sigma\{(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+k^2+i-k)}-(-1)^{i+k}\}q^{(6i+1)^2+7(6k+1)^2}$$
$$=2\Sigma(-1)^{i+k}q^{4[(6i+1)^2+7(6k+1)^2]}$$

2. $2q^{8}\,\Pi\{(1+q^{64i+16})(1+q^{64i+48})(1-q^{64i+64})(1+q^{448i+112})(1+q^{448i+336})(1-q^{448i+448})\}$

$$=\Sigma\{1-(-1)^{i+k}\}q^{(4i+1)^2+7(4k+1)^2}=2\Sigma q^{2[(4i+1)^2+7(4k+1)^2]}$$

3. $\Pi\{(1-q^{16i+8})^2(1-q^{16i+16})(1-q^{112i+56})^2(1-q^{112i+112})\}$

$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{16(i^2+7k^2)}-2\Sigma(-1)^{i+k}q^{(4i+1)^2+7(4k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{8(i^2+7k^2)}.$$

Particuläre Gleichungen zwischen Doppelsummen, deren Exponenten in wesentlich verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind.

$$[xx+yy,\ xx+2yy]$$

$q^6\,\Pi\{(1+q^{96i+48})(1-q^{96i+96})^2\}$

$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{6[(4i+1)^2+16k^2]}=\Sigma(-1)^k q^{3[(4i+1)^2+(4k+1)^2]}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{2[(6i+1)^2+2(6k+1)^2]}=\Sigma(-1)^k q^{6[(4i+1)^2+8k^2]}.$$

$$[xx+yy,\ xx+3yy]$$

$$q^4\Pi(1-q^{48i+48})^2$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{2[(6i+1)^2+(6k+1)^2]}$$
$$=\Sigma(-1)^i q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}=\Sigma(-1)^{i+k}q^{4[(6i+1)^2+12k^2]}\ ^{*)}.$$

$$[xx+yy,\ xx+6yy]$$

$$q^2\Pi\{(1-q^{96i+48})^3(1-q^{96i+96})^2\}$$
$$=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k}q^{(6i+1)^2+(6k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{2[(6i+1)^2+24k^2]}.$$

$$[xx+yy,\ 2xx+3yy]$$

$$q^5\Pi\{(1-q^{48i+24})(1-q^{96i+48})(1-q^{96i+96})^2\}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+4(6k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{2(6i+1)^2+3(4k+1)^2}.$$

$$[xx+2yy,\ xx+3yy]$$

1. $$q\Pi\{(1+q^{48i+24})(1-q^{48i+48})(1-q^{72i+72})(1-q^{144i+72})\}$$
$$=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k}q^{(6i+1)^2+72k^2}$$
$$=\Sigma(-1)^k q^{(6i+1)^2+48k^2}$$

2. $$q^9\Pi\{(1-q^{96i+48})^2(1-q^{96i+96})(1+q^{144i+72})(1-q^{288i+288})\}$$
$$=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k}q^{(6i+1)^2+8(3k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^i q^{3[16i^2+3(4k+1)^2]}$$

3. $$q^4\Pi\{(1-q^{72i+72})(1-q^{144i+72})(1-q^{96i+96})\}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{4[(6i+1)^2+18k^2]}$$
$$=\Sigma(-1)^k q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$$

4. $$q^{12}\Pi\{(1-q^{96i+96})(1-q^{144i+24})(1-q^{144i+120})(1-q^{144i+144})\}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{4[(6i+1)^2+2(3k+1)^2]}$$
$$=\Sigma(-1)^i q^{3[(4i+1)^2+3(4k+1)^2]}.$$

---

*) In der entsprechenden Formel der ersten Formeltabelle ist für $\Pi(1-q^{+1})^2$ zu lesen $\Pi(1-q^{i+1})^2$.

$[xx+2yy,\ xx+6yy]$

1. $q\Pi\{(1-q^{72i+24})(1-q^{72i+48})(1-q^{144i+72})^3(1-q^{144i+144})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+72k^2}$
$= \Sigma(-1)^{k}q^{(6i+1)^2+24k^2}$.

2. $q^9\Pi\{(1-q^{24i+24})(1-q^{144i+24})(1-q^{144i+120})(1-q^{144i+144})\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+8(3k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{k}q^{9(4i+1)^2+24k^2}$

3. $q^3\Pi\{(1+q^{48i+24})(1-q^{72i+72})(1-q^{96i+96})(1-q^{144i+72})\}$
$= \Sigma(-1)^{k}q^{(6i+1)^2+2(6k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{k}q^{3[(4i+1)^2+24k^2]}$.

$[xx+2yy,\ 2xx+3yy]$

$q^{11}\Pi\{(1-q^{48i+48})(1+q^{144i+72})(1-q^{288i+288})\}$
$= \Sigma(-1)^{k}q^{9(4i+1)^2+2(6k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{i}q^{8(3i+1)^2+3(4k+1)^2}$.

$[xx+3yy,\ xx+6yy]$

1. $q\Pi\{(1-q^{48i+24})(1-q^{96i+48})^3(1-q^{96i+96})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+48k^2}$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k}q^{(6i+1)^2+24k^2}$

2. $q^4\Pi\{(1-q^{48i+24})^2(1-q^{96i+48})(1-q^{96i+96})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{4[(6i+1)^2+6k^2]}$

3. $q^7\Pi\{(1+q^{48i+24})(1-q^{96i+96})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{i}q^{4(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)}q^{(6i+1)^2+6(4k+1)^2}$.

$[xx+yy,\ xx+5yy]$

1. $q^{30}\Pi\{(1-q^{120i+120})(1-q^{600i+600})\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{3[(10i+1)^2+(10k+3)^2]}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{5[(6i+1)^2+5(6k+1)^2]}$

2. $q^6 \Pi \{(1-q^{600i+240})(1-q^{600i+360})(1-q^{600i+600})\}^2$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3[(10i+1)^2+(10k+1)^2]}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{(30i+1)^2+5(6k+1)^2} + \Sigma(-1)^{i+k} q^{(30i+11)^2+5(6k+1)^2}$

3. $q^{54} \Pi \{(1-q^{600i+120})(1-q^{600i+480})(1-q^{600i+600})\}^2$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3[(10i+3)^2+(10k+3)^2]}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{(30i+7)^2+5(6k+1)^2} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{(30i+13)^2+5(6k+1)^2}.$

[$xx+7yy$, $xx+14yy$ und $2xx+7yy$]

1. $q^7 \Pi \{(1-q^{32i+16})^2(1-q^{32i+32})(1+q^{224i+56})(1+q^{224i+168})(1-q^{224i+224})\}$

$= \Sigma(-1)^i q^{16i^2+7(4k+1)^2}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{8i^2+7(4k+1)^2} + 2\Sigma(-1)^i q^{(4i+1)^2+14(4k+1)^2}$

2. $q^8 \Pi \{(1-q^{16i+8})(1-q^{32i+32})(1+q^{112i+56})(1-q^{224i+224})\}$

$= 2\Sigma(-1)^i q^{(4i+1)^2+7(4k+1)^2}$

$= \Sigma(-1)^i q^{16i^2+56k^2} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{8i^2+112k^2}.$

[$3xx+7yy$, $3xx+14yy$]

$2q^{34} \Pi \{(1+q^{96i+48})(1-q^{192i+192})(1-q^{672i+672})\}$

$= \Sigma \{(-1)^{\frac{1}{2}(k^2-k)} - (-1)^{i+k}\} q^{3(4i+1)^2+7(6k+1)^2}$

$= 2\Sigma(-1)^k q^{2[3(4i+1)^2+14(6k+1)^2]}.$

[$3xx+7yy$, $6xx+7yy$]

$q^7 \Pi \{(1-q^{48i+24})^2(1-q^{48i+48})(1-q^{168i+168})\}$

$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(k^2-k)+i} q^{48i^2+7(6k+1)^2} - 2\Sigma(-1)^{i+k} q^{3(4i+1)^2+28(6k+1)^2}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{24i^2+7(6k+1)^2}$

(Die Fortsetzung folgt.)

12.

Über die Kennzeichen der Convergenz eines Kettenbruchs.

(Von dem Herrn Dr. *Stern*, Universitäts-Docenten zu Göttingen.)

---

1. **B**ei allen analytischen Ausdrücken, welche aus einer ins Unendliche fortgehenden Anzahl von Operationen zusammengesetzt sind, ist die Frage, wie man Kennzeichen ihrer Convergenz oder Divergenz finden könne, von der höchsten Wichtigkeit. Nach dem gegenwärtig vorherrschenden Sprachgebrauch nennt man nur solche Ausdrücke *convergirende,* bei welchen man sich einem *einzigen endlichen* Werthe desto mehr nähert, je weiter man die angedeuteten Operationen fortsetzt, während man alle übrigen als *divergirende* bezeichnet. In dieser Weise sind aber offenbar unter dem Namen divergirender Ausdrücke *zwei* Gattungen zusammengefafst, die sich ihrem Wesen nach so sehr von einander unterscheiden, dafs es nicht angemessen scheint, sie durch einen und denselben Namen zu bezeichnen. Bei der *ersten* Gattung wächst der Werth, welcher einer beliebigen Zahl anfänglicher Operationen entspricht, mit dieser Zahl, über jede angebbare endliche Grenze hinaus. Bei der *zweiten* Gattung dagegen nähert man sich zwar nicht mehr einem einzigen endlichen Werthe, wohl aber, je nach der verschiedenen Zahl der ausgeführten Anfangs-Operationen, *verschiedenen,* jedoch *vollkommen bestimmten* endlichen Werthen. Im Folgenden werde ich daher nur die in der ersten Gattung enthaltenen Ausdrücke als *divergirende* bezeichnen, die zur zweiten gehörenden dagegen *oscillirende* nennen, und eben deswegen der *Convergenz* nicht die *Divergenz,* sondern die *Nichtconvergenz* entgegen setzen *). In diesem Sinne ist z. B. die Reihe

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} \dots$$

zwar keine convergirende, aber auch keine divergirende, sondern eine oscillirende Reihe, indem man sich einem der zwei Werthe $\log 2$ oder $1 + \log 2$ immer

---

*) Das Auffinden der verschiedenen Werthe, welche einem oscillirenden Ausdrucke entsprechen, scheint mir eine der Mathematik nicht minder würdige Aufgabe zu sein, als die Bestimmung des einzigen Werthes eines convergirenden Ausdrucks. In den bekannteren Werken über Analysis vermifst man jedoch alle hierauf abzielenden Untersuchungen.

mehr nähert, je nachdem man eine immer gröfsere *gerade* oder *ungerade* Anzahl Anfangsglieder zusammennimmt.

2. Man ist bis jetzt vorzüglich bemüht gewesen, für die unendlichen *Reihen* Kennzeichen ihrer Convergenz oder Nichtconvergenz zu finden. Für die *unendlichen Producte* hat man die entsprechende Untersuchung auf die unendlichen Reihen zurückgeführt *) und am wenigsten sind noch die Kettenbrüche in dieser Beziehung behandelt.

Zwar ist es leicht, jeden Kettenbruch in eine gleichwerthige Reihe zu verwandeln und so die Frage über die Convergenz eines Kettenbruches ebenfalls auf die über die Convergenz einer Reihe zurückzuführen. Allein diese entsprechende Reihe erscheint in der Regel in einer so verwickelten Gestalt, dafs ihre Beschaffenheit nicht leicht zu erkennen ist; und diese Schwierigkeit ist es, an welcher bis jetzt die Versuche, Regeln über die Convergenz oder Nichtconvergenz der Kettenbrüche aufzustellen, gescheitert sind.

Ist nemlich der ins Unendliche fortlaufende Kettenbruch

$$1.\quad a+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\dots}}$$

gegeben, und bezeichnet man, wie ich es schon früher gethan habe, durch a, a_m den Zähler, durch a_1, a_m den Nenner des gewöhnlichen Bruchs **), in welchen der endliche Kettenbruch

$$a+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\dots+\cfrac{b_m}{a_m}}}$$

reducirt wird, so kann man, wie bekannt, den Kettenbruch (1.) in die unendliche Reihe

$$2.\quad a+\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_1 b_2}{a_1 . a_1, a_2}+\frac{b_1 b_2 b_3}{a_1, a_2 . a_1, a_3}-\dots$$

verwandeln, welche mit dem Kettenbruche vollkommen identisch ist, so dafs, wenn man Kettenbruch und Reihe beide abbrechen läfst, indem man z. B. $b_n = 0$ setzt, auch der endliche Kettenbruch

$$a+\cfrac{b_1}{a_1+\dots+\cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}}$$

---

*) *Cauchy*, Cours d'analyse Note 9.

**) Theorie der Kettenbrüche S. 4. (*Crelle* Journ. f. d. Mathem. Bd. 10. S. 4.)

der endlichen Reihe

$$a + \frac{b_1}{a_1} \dots \pm \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{a_1, a_{n-2} \cdot a_1, a_{n-1}}$$

gleich ist. In denselben Fällen, in welchen die Reihe (2.) convergirt, oder nicht, wird dies mithin auch bei dem Kettenbruche (1.) der Fall sein, und es käme daher nur darauf an, für diese Reihe allgemeine Kennzeichen ihrer Convergenz oder Nichtconvergenz zu finden.

3. Die Untersuchung wird einfacher, wenn man, *wie es im Folgenden immer geschehen soll*, von der besondern Voraussetzung ausgeht, dafs sämmtliche in dem Kettenbruche (1.) vorkommenden Gröfsen positiv sind. Unter dieser Voraussetzung kann der Kettenbruch (1.) nie *divergiren*, sondern nur *convergiren*, oder *oscilliren*, da sein eindeutiger oder vieldeutiger Werth zwischen den Grenzen a und $a + \frac{b_1}{a_1}$ eingeschlossen ist; Dasselbe gilt mithin auch von der Reihe (2.). Da aber alsdann die Glieder dieser Reihe abwechselnd positiv und negativ sind, so wird sie, und mithin auch der Kettenbruch, wie bekannt, convergiren, sobald der Werth ihrer Glieder zuletzt unter jede angebbare endliche Grenze hinabsinkt.

Bezeichnet man das Glied $\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{a_1, a_{n-1} \cdot a_1, a_n}$ der Reihe (2.) durch G_n, so hat man (ohne Rücksicht auf das Zeichen):

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = b_{n+1} \cdot \frac{a_1, a_{n-1}}{a_1, a_{n+1}},$$

oder, da

$$a_1, a_{n+1} = a_{n+1} \cdot a_1, a_n + b_{n+1} \cdot a_1, a_{n-1} \text{ ist:}$$

$$3. \quad \frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{1}{1 + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \cdot \frac{a_1, a_n}{a_1, a_{n-1}}}.$$

Man setze zur Abkürzung

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{1}{K_{n+1}}$$

und eben so

$$\frac{G_{n+2}}{G_{n+1}} = \frac{1}{K_{n+2}}$$

u. s. w.;

so ist

$$G_{n+p} = \frac{1}{K_{n+1}} \cdot \frac{1}{K_{n+2}} \dots \frac{1}{K_{n+p}} \cdot G_n.$$

Da von den Gröfsen K_{n+1}, K_{n+2} u. s. w. keine kleiner als die Einheit ist, so wird das Product

$$\frac{1}{K_{n+1}} \cdot \frac{1}{K_{n+2}} \cdots \frac{1}{K_{n+p}}$$

entweder gegen Null, oder gegen einen Werth, der zwischen Null und der Einheit liegt, convergiren. Im ersten Falle ist $\lim. G_{n+p} = 0$. Dann ist die Reihe (2.) und daher auch der Kettenbruch (1.) convergent. Im zweiten Falle convergiren die Glieder der Reihe gegen einen und denselben Werth, der gröfser als Null ist. Bezeichnet man diesen Werth durch D, so erhält man

$$\lim. (G_n - G_{n+1} + G_{n+2} - G_{n+3} \ldots) = D - D + D - D \ldots;$$

d. h. die Reihe oscillirt; und zwar convergirt sie abwechselnd gegen einen von zwei Werthen, die man durch W und $W + D$ bezeichnen kann. In diesem Falle oscillirt also auch der Kettenbruch, und seine *Näherungswerthe* convergiren abwechselnd gegen einen der zwei Werthe W und $W + D$.

4. Vermöge der Gleichung

$$a_1, a_n = a_n . a_1, a_{n-1} + b_n . a_1, a_{n-2}$$

kann man statt der Formel (3.) auch schreiben:

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{1}{1 + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \left[a_n + b_n . \frac{a_1, a_{n-2}}{a_1, a_{n-1}} \right]},$$

mithin ist

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} < \frac{1}{1 + \frac{a_{n+1} a_n}{b_{n+1}}},$$

oder, wenn man $\frac{a_{n+1} a_n}{b_{n+1}} = k_{n+1}$ setzt,

$$G_{n+1} < \frac{1}{1 + k_{n+1}} G_n.$$

Hieraus folgt allgemein

$$4. \quad G_{n+p} < \frac{1}{1 + k_{n+1}} \cdot \frac{1}{1 + k_{n+2}} \cdots \frac{1}{1 + k_{n+p}} G_n.$$

Dieser Ausdruck wird sich aber unbegrenzt dem Werthe Null nähern, wenn bei wachsendem n die Grenze von $\frac{1}{1 + k_n}$ kleiner als die Einheit ist, d. h. wenn $\lim. k_n > 0$, und dies giebt folgenden Satz:

Der Kettenbruch (1.) wird convergiren, wenn $\frac{a_{n+1} a_n}{b_{n+1}}$ bei unbegrenzt zu-

nehmendem n immer gröſser als Null, d. h. wenn $\frac{b_{n+1}}{a_n a_{n+1}}$ eine endliche Gröſse bleibt.

Ist $\lim. k_n = 0$, so wird noch immer $\lim. G_{n+p} = 0$ sein, wenn

$$\lim.\left(\frac{1}{1+k_{n+1}}\cdot\frac{1}{1+k_{n+2}}\ \ldots.\right) = 0,$$

d. h. wenn

$$\lim.\left[\left(1-\frac{k_{n+1}}{1+k_{n+1}}\right)\left(1-\frac{k_{n+2}}{1+k_{n+2}}\right)\ \ldots.\right] = 0 \text{ ist.}$$

Nach bekannten Regeln wird aber die Grenze dieses Products Null sein, wenn die Reihe

$$5.\qquad \frac{k_{n+1}}{1+k_{n+1}}+\frac{k_{n+1}}{1+k_{n+2}}+\ldots.$$

eine divergirende ist. Hieraus folgt nachstehender Satz:

Der Kettenbruch (1.) wird convergiren, wenn die Reihe (5.) divergirt und zugleich $\lim.\frac{a_{n+1}a_n}{b_{n+1}} = 0$ ist.

5. Die beiden vorstehenden Sätze sind, so viel ich weiſs, die einzigen, welche man bis jetzt in diesem Gebiete kennt. Der Weg, auf welchem sie hier gefunden wurden, führt jedoch viel weiter *).

Zunächst bemerke man, daſs sich diese zwei Sätze in einen einzigen zusammenziehen lassen. Die Reihe (5.) divergirt nemlich sicher, sobald $\lim. k_n > 0$ ist, daher:

Satz 1. Der Kettenbruch (1.) *convergirt,* wenn die Reihe, deren allgemeines Glied die Form

$$\frac{1}{1+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{a_n}}$$

hat, eine *divergirende* ist.

Wenn dagegen die Reihe (5.) *convergirt*, so kann der Kettenbruch (1.) sowohl convergiren als oscilliren. Für diesen Fall dienen folgende Betrachtungen.

Entwickelt man die Formel (3.) noch weiter, so findet sich

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\left[a_n+\frac{b_n}{a_{n-1}+b_{n-1}\cdot\frac{a_1, a_{n-3}}{a_1, a_{n-2}}}\right]}.$$

*) Den ersten findet man in dem „Handbuch der algebraischen Analysis von Dr. *Oskar Schlömilch*", den zweiten in der Inauguraldissertation „Disquisitiones nonnullae de fractionibus continuis auct. *P. F. Arndt,* Sundiae 1845."

Setzt man

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\left(a_n+\frac{b_n}{a_{n-1}}\right) = l_{n+1},$$

so ist

$$G_{n+1} > \frac{1}{1+l_{n+1}}\,G_n.$$

Hieraus folgt

$$G_{n+p} > \frac{1}{1+l_{n+1}}\cdot\frac{1}{1+l_{n+2}}\cdots\cdot\frac{1}{1+l_{n+p}}\,G_n,$$

also wird der Kettenbruch oscilliren, sobald das Product

$$\frac{1}{1+l_{n+1}}\cdot\frac{1}{1+l_{n+2}}\cdots\cdot$$

gegen eine Grenze convergirt, die gröfser als Null ist. Dies ist aber der Fall, wenn die Reihe

$$6.\quad \frac{l_{n+1}}{1+l_{n+1}}+\frac{l_{n+2}}{1+l_{n+2}}+\cdots\cdot$$

convergirt. Mithin

Satz 2. Der Kettenbruch (1.) wird *oscilliren,* wenn die Reihe, deren allgemeines Glied die Form

$$\frac{1}{1+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{a_n+\frac{b_n}{a_{n-1}}}}$$

hat, eine *convergirende* ist.

So z. B. mufs der Kettenbruch

$$7.\quad \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2^3}{1+\cfrac{2^6}{1+\cfrac{2^{10}}{1+\cdots}}}}}$$

in welchem der $n$te Theilzähler $=2^{\frac{1}{2}(n^2+n)}$ ist, nothwendig *oscilliren.* Denn hier ist das allgemeine Glied der entsprechenden Reihe (6.)

$$= \frac{1}{1+\frac{2^{\frac{1}{2}(n^2+n)}}{1+2^{\frac{1}{2}((n-1)^2+n-1)}}};$$

welcher Ausdruck bei wachsendem n gegen $\frac{1}{2^n}$ convergirt und kleiner als dieses ist. Die Reihe convergirt also eben wie die Reihe, deren allgemeines

Glied $\frac{1}{2^n}$ ist. Wirklich findet sich, wenn man die ersten Näherungswerthe des Kettenbruchs (7.) berechnet:

1; 0,3333....; 0,8181....; 0,3596....; 0,8100....; 0,3603....; 0,8099....; 0,3603....; u. s. w.;

woraus zu sehen, dafs die geraden Näherungswerthe gegen einen bestimmten Werth, und die ungeraden gegen einen andern bestimmten Werth convergiren.

6. Da das allgemeine Glied der Reihe (6.) gröfser ist, als das entsprechende Glied der Reihe (5.), so mufs die Reihe (5.) convergiren, wenn die Reihe (6.) convergirt, und die Reihe (6.) mufs divergiren, wenn die Reihe (5.) divergirt. Wenn dagegen die Reihe (5.) convergirt, während die Reihe (6.) divergirt, so bleibt die Beschaffenheit des Kettenbruchs zweifelhaft und man bedarf neuer Regeln, zu welchen die Fortsetzung der vorhergehenden Betrachtungen führt.

Setzt man

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\cdot a_n + \cfrac{b_n}{a_{n-1}+\cfrac{b_{n-1}}{a_{n-2}}} = m_{n+1},$$

so folgt aus der weitern Entwickelung der Formel (3.):

$$G_{n+1} < \frac{1}{1+m_{n+1}} G_n,$$

und hieraus durch ähnliche Schlüsse, wie sie im Vorhergehenden angewandt wurden, dafs der Kettenbruch *convergiren* wird, wenn das Product

$$\frac{1}{1+m_{n+1}}\cdot\frac{1}{1+m_{n+2}}\cdots\cdot$$

Null ist, d. h. wenn die Reihe

$$8.\quad \frac{m_{n+1}}{1+m_{n+1}} + \frac{m_{n+2}}{1+m_{n+2}} + \cdots\cdot$$

divergirt. Da nun das allgemeine Glied dieser Reihe gröfser ist, als das entsprechende Glied der Reihe (5.), so kann erstere Reihe divergiren, wenn letztere convergirt, und mithin die Convergenz von Kettenbrüchen nachweisen, deren Beschaffenheit durch die Reihe (5.) nicht würde entschieden werden.

7. Es ist nun leicht, das allgemeine Resultat dieser Betrachtungen auszusprechen. Bekanntlich ist *)

$$9.\quad \frac{a_1, a_n}{a_1, a_{n-1}} = a_n + \cfrac{b_n}{a_{n-1}+\cfrac{b_{n-1}}{a_{n-2}+\cdots+\cfrac{b_2}{a_1}}}.$$

*) Vergl. „Theorie der Kettenbrüche" S. 7. (*Crelle* Journ. f. d. M. Bd. 10. S. 7.)

Substituirt man diesen Werth in die Formel (3.) und setzt

$$a_n + \cfrac{b_n}{a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-2} + \cdots + \cfrac{b_{n-r+1}}{a_{n-r}}}} = h_r,$$

so ist $\frac{G_{n+1}}{G_n}$ kleiner als jeder der Werthe

$$\frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}h_0}, \quad \frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}h_2}, \quad \frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}h_4}, \quad \ldots;$$

dagegen ist $\frac{G_{n+1}}{G_n}$ gröfser als jeder der Werthe

$$\frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}h_1}, \quad \frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}h_3}, \quad \frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}h_5}, \quad \ldots$$

Eine wiederholte Anwendung der früheren Betrachtungen führt mithin zu folgendem Resultate:

Der Kettenbruch (1.) *wird convergiren, wenn eine der Reihen divergirt, deren allgemeines Glied in der Folge*

$$10. \quad \frac{1}{1+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{h_0}}, \quad \frac{1}{1+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{h_2}}, \quad \frac{1}{1+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{h_4}}, \quad \ldots$$

enthalten ist; dagegen wird er oscilliren, wenn eine der Reihen convergirt, deren allgemeines Glied in der Folge

$$11. \quad \frac{1}{1+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{h_1}}, \quad \frac{1}{1+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{h_3}}, \quad \frac{1}{1+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{h_5}}, \quad \ldots$$

enthalten ist.

8. Aus den Elementen der Theorie der Kettenbrüche folgt:

Erstens. Dafs die geraden Näherungswerthe $h_1, h_3, h_5, \ldots$ sämmtlich gröfser sind als die ungeraden Näherungswerthe $h_0, h_2, h_4, \ldots$ Mithin sind auch die in (11.) enthaltenen Ausdrücke gröfser, als die in (10.), und die Reihen, welche erstere zu allgemeinen Gliedern haben, müssen daher divergiren, wenn die Reihen divergiren, deren allgemeine Glieder in der Folge (10.) enthalten sind.

Zweitens. Dafs jeder spätere unter den Ausdrücken $h_0, h_2, \ldots$ gröfser als ein vorhergehender, jeder spätere unter den Ausdrücken $h_1, h_3, \ldots$ kleiner als ein vorhergehender ist. Mithin kann unter den Reihen, deren all-

gemeine Glieder in (10.) enthalten sind, eine spätere *divergiren*, während die früheren *convergiren;* so wie unter den Reihen, deren allgemeine Glieder in (11.) enthalten sind, eine spätere *convergiren* kann, während die früheren *divergiren.*

9. Der allgemeine, in (§. 7.) aufgestellte Satz reicht indessen keineswegs in allen Fällen hin, die Beschaffenheit eines Kettenbruchs zu beurtheilen; es lassen sich vielmehr sogar sehr einfach gebaute Kettenbrüche angeben, bei welchen er seine Dienste versagt. Es kann nemlich vorkommen, dafs die successiven Reihen, deren allgemeine Glieder in der Folge (10.) enthalten sind, *convergiren*, während diejenigen, deren allgemeine Glieder in der Folge (11.) enthalten sind, *divergiren.* Oder es können die in Betracht kommenden Reihen, deren allgemeine Glieder jedenfalls immer complicirter ausfallen, eine je spätere Reihe man zu wählen hat, so beschaffen sein, dafs die Beurtheilung ihrer Beschaffenheit nicht leichter ist, als die des Kettenbruchs. Man wird sich daher nach andern Mitteln umsehen müssen.

Offenbar wird man aber alles Wünschenswerthe geleistet haben, wenn es gelingt, die Untersuchung über die Beschaffenheit eines Kettenbruchs auf die Untersuchung der Beschaffenheit einer verhältnifsmäfsig viel einfacheren Reihe zurückzuführen. Auch die Theorie der Convergenz eines unendlichen Products besteht in nichts Anderem. Dafs dies aber wirklich geschehen kann, soll in Folgendem nachgewiesen werden.

10. Man sieht leicht, dafs man den Kettenbruch (1.) in einen andern, dem Werthe nach identischen, verwandeln kann, welcher unter der Form

$$12. \quad k+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\dots}}$$

erscheint, wo $k=a$ und dann allgemein

$$k_{2m} = a_{2m}.\frac{b_1 b_3 \dots b_{2m-1}}{b_2 b_4 \dots b_{2m}}, \qquad k_{2m+1} = \frac{a_{2m+1}}{b_{2m+1}}.\frac{b_2 b_4 \dots b_{2m}}{b_1 b_3 \dots b_{2m-1}} \text{ ist.}$$

Verwandelt man nun den Kettenbruch (12.) in die identische Reihe

$$13. \quad k+\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_1.k_1,k_2}+\dots,$$

welche mithin zugleich mit dem Kettenbruche convergirt oder oscillirt, so haben zwei aufeinander folgende Glieder dieser Reihe allgemein die Form

$$\pm\frac{1}{k_1,k_{2m}.k_1,k_{2m+1}}, \qquad \mp\frac{1}{k_1,k_{2m+1}.k_1,k_{2m+2}}.$$

Der Werth eines Ausdrucks wie k_1, k_{2m} oder k_1, k_{2m+2}, welcher aus einer *geraden* Anzahl Theilnenner zusammengesetzt ist, kann aber, wie bekannt, immer durch $1+R$ ausgedrückt werden, wo R eine positive Zahl bedeutet, indem

$$k_1, k_{2m} = (k_1, k_{2m})_0 + (k_1, k_{2m})_2 \dots + (k_1, k_{2m})_{2m}$$

und $(k_1, k_{2m})_{2m} = 1$ ist *).

Dagegen kann der Werth eines Ausdrucks, wie k_1, k_{2m+1}, welcher aus einer ungeraden Anzahl Theilnenner zusammengesetzt ist, immer durch

$$k_1 + k_3 + k_5 \dots + k_{2m+1} + S$$

dargestellt werden, wo S einen positiven Werth hat. Denn es ist

$$k_1, k_{2m+1} = (k_1, k_{2m+1})_0 + (k_1, k_{2m1})_2 \dots + (k_1, k_{2m+1})_{2m},$$

wo $(k_1, k_{2m+1})_{2m} = k_1 + k_3 \dots + k_{2m+1}$ ist.

Der Nenner des allgemeinen Gliedes der Reihe (13.) kann also jedenfalls unter der Form

$$k_1 + k_3 + k_5 + \dots + k_{2m+1} + T$$

dargestellt werden, wo T eine positive Zahl bedeutet. Mithin wird die Reihe (13.) *convergiren*, wenn die Reihe

$$k_1 + k_3 + k_5 + \dots$$

divergirt. Man hat daher folgenden Satz.

Satz 3. Der Kettenbruch (1.) wird *convergiren*, wenn die Reihe

$$14. \quad \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{a_3}{b_3} + \frac{b_2 b_4}{b_1 b_3}\cdot\frac{a_5}{b_5} + \dots$$

divergirt.

11. Es sei z. B. der Kettenbruch

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1 + \dots}}}$$

gegeben, so findet man durch Satz (1.), dafs er convergirt, weil die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{1+m}$ ist, divergirt. Dasselbe findet man aus Satz (3.), weil auch die Reihe

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7} + \dots$$

eine divergirende ist.

*) Vergl. Theorie der Kettenbrüche S. 42. (*Crelle* Journ. f. d. M. Bd. 10. S. 248.)

Wäre dagegen der Kettenbruch

$$1+\cfrac{1.3}{1+\cfrac{3.5}{1+\cfrac{5.7}{1+\dots}}}$$

gegeben, so würde der Satz 1. zu keiner Entscheidung führen, indem die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{1+m.2+m}$ ist, convergirt. Eben so wenig kann der Satz 2. eine Entscheidung geben, da die Reihe, auf welche er in diesem Falle führt, eine divergirende ist. Dagegen wird die Reihe (14.) in diesem Falle:

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{3\cdot5}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}+\dots,$$

und da diese Reihe divergirt, so mufs der Kettenbruch convergiren. Wäre aber der Kettenbruch

$$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{5}{1+\dots}}}}}}$$

zu untersuchen, so liefse sich aus dem Satze 3. Nichts mehr schliefsen, da die entsprechende Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1.3}{2.4}+\dots.$$

convergirt, während aus Satz 1. folgt, dafs der Kettenbruch convergirt. Die Convergenz dieses Kettenbruchs ergiebt sich aber auch aus einem anderen Satze, welcher aus derselben Quelle wie der Satz 3. abzuleiten ist.

13. Es ist nemlich einerlei, ob man die Beschaffenheit des Kettenbruchs (12.) oder die des Kettenbruchs

$$15.\qquad k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{k_3+\dots}}$$

untersucht. Nun kann

$$\frac{1}{k_2,k_{2m}.k_2,k_{2m+1}}$$

für das allgemeine Glied der Reihe genommen werden, welche diesem letzteren

Kettenbruche gleich ist. Aus ähnlichen Gründen, wie sie bei der Reihe (13.) erörtert wurden, folgt, dafs das Product

$$k_2, k_{2m}. k_2, k_{2m+1} = k_2 + k_4 + \dots k_{2m} + T$$

gesetzt werden kann, wo wieder T eine positive Zahl ist, und hieraus der

Satz 4. Der Kettenbruch (1.) wird convergiren, wenn die Reihe

$$16.\qquad a_2 \cdot \frac{b_1}{b_2} + a_4 \cdot \frac{b_1 . b_3}{b_2 . b_4} + a_6 \cdot \frac{b_1 . b_3 . b_5}{b_2 . b_4 . b_6} + \dots$$

divergirt.

Wendet man diesen Satz auf den zuletzt betrachteten Kettenbruch an, so geht die Reihe (16.) in

$$\frac{2}{1} + \frac{2.4}{1.3} + \frac{2.4.6}{1.3.5} + \dots$$

über, und da diese Reihe divergirt, so mufs der Kettenbruch convergiren.

Die Anwendung des Satzes (4.) auf den Kettenbruch

$$n + \cfrac{m^2}{n + \cfrac{(m+n)^2}{n + \cfrac{(m+2n)^2}{n + \dots}}}$$

führt zu der Reihe

$$\frac{m^2}{(m+n)^2} + \frac{m^2.(m+2n)^2}{(m+n)^2.(m+3n)^2} + \frac{m^2.(m+2n)^2.(m+4n)^2}{(m+n)^2.(m+3n)^2.(m+5n)^2} + \dots,$$

welche divergirt: daher ist der Kettenbruch convergent.

Man bemerke, dafs in der Reihe (14.) alle Glieder von der Form a_{2m}, in der Reihe (16.) alle Glieder von der Form a_{2m+1} fehlen. Der Kettenbruch (1.) convergirt also, wie immer die geraden Theilnenner beschaffen seien, sobald die Reihe (14.) divergirt, und wie immer die ungeraden Theilnenner beschaffen seien, sobald die Reihe (16.) divergirt.

13. Eine Reihe, deren sämmtliche Glieder positiv sind, z. B.

$$u_1 + u_2 \dots + u_n + u_{n+1} \dots,$$

divergirt bekanntlich, wenn $\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, oder auch wenn $\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ und zugleich $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha} \text{ gesetzt}\right) \lim. n\alpha < 1$ ist. Wendet man dies auf die Reihen (14. und 16.) an, so finden sich folgende zwei speciellen Sätze:

Satz 5. Der Kettenbruch (1.) convergirt, wenn

$$\lim.\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\cdot\frac{b_{2n}}{b_{2n+1}} > 1,$$

oder wenn $\lim.\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\cdot\frac{b_{2n}}{b_{2n+1}} = 1$ und zugleich $\lim.n\left(\frac{b_{2n+1}.a_{2n-1}}{b_{2n}.a_{2n+1}}-1\right) < 1$ ist.

Satz 6. Der Kettenbruch (1.) convergirt, wenn

$$\lim.\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\cdot\frac{b_{2n+1}}{b_{2n+2}} > 1,$$

oder wenn $\lim.\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\cdot\frac{b_{2n+1}}{b_{2n+2}} = 1$ und zugleich $\lim.n\left(\frac{b_{2n+2}.a_{2n}}{b_{2n+1}.a_{2n+2}}-1\right) < 1$ ist.

Für die specielle Voraussetzung, dafs alle Theilnenner gleich sind und zugleich der Quotient zweier aufeinander folgender Theilzähler gegen die Einheit convergirt, wie es bei den zuletzt betrachteten Beispielen der Fall war, ergiebt sich aus den zwei vorhergehenden Sätzen noch folgender

Satz 7. Wenn in dem Kettenbruche (1.) sämmtliche Theilnenner gleich sind und $\lim.\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ ist, so convergirt der Kettenbruch, wenn zugleich

$$\lim.n\left(\frac{b_{2n+1}}{b_{2n}}-1\right) < 1 \quad \text{oder} \quad \lim.n\left(\frac{b_{2n+2}}{b_{2n+1}}-1\right) < 1 \text{ ist.}$$

14. Wenn bei der Reihe

$$u_1 + u_2 + \ldots. + u_n + \ldots.$$

$\lim.\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, $\lim.n\alpha = 1$ ist, aber α beständig kleiner als $\frac{1}{n}$ bleibt, so ist auch noch in diesem Falle, wie schon *Duhamel* bemerkt hat *), die Reihe eine divergirende. Diese Bemerkung läfst sich noch weiter ausdehnen. Die Reihe wird nemlich auch dann noch divergiren, wenn $\lim.\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, $\lim.n\alpha = 1$ und α gröfser als $\frac{1}{n}$, aber zugleich beständig kleiner als $\frac{1}{n-k}$ ist; wo k einen endlichen Werth bedeutet. Dividirt man nemlich in der divergirenden Reihe

$$\frac{1}{1-k} + \frac{1}{2-k} + \ldots. + \frac{1}{n-k} + \ldots.$$

das $n+1$te Glied v_{n+1} durch das vorhergehende v_n, so ist der Quotient

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-k}}.$$

*) Journal des Mathématiques T. 4. pag. 214.

Da nun $\alpha < \frac{1}{n-k}$, so ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha} > \frac{v_{n+1}}{v_n};$$

mithin mufs die Reihe, deren allgemeines Glied u_n ist, ebenfalls divergiren.

Eine Anwendung hiervon kann man z. B. machen, wenn die Beschaffenheit des Kettenbruchs

$$1+\cfrac{2.3}{1+\cfrac{4.5}{1+\cfrac{6.7}{1+\dots}}}$$

untersucht werden soll. Hier ist $b_n = 2n.2n+1$. Für die Reihe (14.) ist

$$\lim.\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim.\frac{b_{2n}}{b_{2n+1}} = 1, \qquad \alpha = \frac{b_{2n+1}}{b_{2n}} - 1 = \frac{4n+2.4n+3}{4n.4n+1} - 1 = \frac{8n+3}{8n^2+2n},$$

also $\lim. n\alpha = 1$, $\alpha > \frac{1}{n}$; aber zugleich $\alpha < \frac{1}{n-\frac{1}{4}}$: also ist in diesem Falle die Reihe (14.) divergent und daher der Kettenbruch convergent.

Für die Reihe (16.) dagegen fände man $\lim. n\alpha = 1$, $\alpha < \frac{1}{n}$; woraus die Divergenz dieser Reihe und die Convergenz des Kettenbruchs folgt.

15. Eben so wie im Vorhergehenden aus der Reihe (13.) Merkmale der Convergenz des Kettenbruchs (1.) abgeleitet wurden, kann aus derselben auch ein Merkmal gefunden werden, welches nachweiset, wann dieser Kettenbruch oscillirt. Soll dies der Fall sein, so mufs auch die Reihe (13.) oscilliren, d. h. ihre Glieder müssen einen endlichen Werth behalten; mithin mufs jeder der zwei Factoren k_1, k_{2m} und k_1, k_{2m+1} des allgemeinen Gliedes des Nenners gegen eine endliche Grenze, die gröfser als Null ist, convergiren. Die Zusammensetzung der Werthe k_1, k_{2m} und k_1, k_{2m+1} aus den Gröfsen $k_1, k_2, \dots$, zeigt aber unmittelbar, dafs in diesen Werthen keine andern Ausdrücke vorkommen, als solche, die einzelne Glieder der Summe sind, welche man erhält, wenn man bezüglich aus den $2m$ Elementen $k_1, k_2, \dots k_{2m}$, oder aus den $2m+1$ Elementen $k_1, k_2, \dots k_{2m+1}$ alle Combinationen ohne Wiederholung bildet und sie zusammen addirt; nur dafs in k_1, k_{2m} auch noch die Einheit vorkommt. Bezeichnet man daher die Summe dieser Combinationen bezüglich durch $C.2m$ und $C.2m+1$, so ist

$$\lim. k_1, k_{2m+1} < C.2m+1,$$
$$\lim. k_1, k_{2m} < 1+C.2m.$$

Nun ist

$$1+C.n = (1+k_1)(1+k_2)\ldots.(1+k_n),$$

also ist

$$\lim. k_1, k_n < \lim. (1+k_1)(1+k_2)\ldots.(1+k_n).$$

Da nun k_1; k_2; u. s. w. positive Gröfsen sind, so hat bekanntlich das unendliche Product $(1+k_1)(1+k_2)\ldots.$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth, sobald die Reihe

$$17. \quad k_1+k_2+\ldots.$$

convergirt, oder, was Dasselbe sagt, sobald jede der zwei Reihen (14. und 16.) convergirt. Unter dieser Bedingung ist also auch lim. k_1, k_n eine endliche Gröfse und man hat mithin den

Satz 8. Der Kettenbruch (1.) *oscillirt*, wenn *jede* der zwei Reihen (14. und 16.) *convergirt*.

Durch die Sätze 3., 4. und 8. wird also die Untersuchung über die Beschaffenheit eines Kettenbruchs mit lauter positiven Gröfsen auf eine einfache Regel zurückgeführt, die gar keine Ausnahme hat, und man hat folglich den allgemeinen

Satz 9. Der Kettenbruch (1.) *convergirt oder oscillirt, je nachdem* (wenigstens) *eine, oder keine der zwei Reihen* (14. *und* 16.) *divergirt*.

16. Es wurde schon oben (Satz 2.) gefunden, dafs der Kettenbruch

$$18. \quad 1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2^3}{1+\cfrac{2^6}{1+\cfrac{2^{10}}{1+\ldots}}}}$$

oscillirt. Hier sind die Reihen (14. und 16.):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{16}}+\ldots.$$

und

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{20}}+\ldots.$$

Da beide Reihen convergiren, so folgt hieraus wieder, dafs der Kettenbruch oscillirt.

Wäre der Kettenbruch

$$19. \quad 1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{2^3}{1+\cfrac{2^4}{1+\dots}}}}$$

gegeben, so würde der Satz 2. nicht über dessen Beschaffenheit entscheiden; denn das allgemeine Glied der Reihe (6.) ist für diesen Fall $= \cfrac{1}{1+\cfrac{2^m}{1+2^{m-1}}}$, also diese Reihe divergent. Dagegen sind hier die Reihen (14. und 16.) beide

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots,$$

und da diese Reihe convergirt, so mufs der Kettenbruch oscilliren. Die ersten Näherungswerthe desselben sind (bis auf 4 Decimalstellen):

Ungerade:	1;	1,4;	1,5376;	1,5921;	1,6162;	1,6275;	1,6330;
Gerade:	3;	2,3846;	2,2298;	2,1723;	2,1473;	2,1356;	2,1301.

Es folgt aus denselben Gründen, dafs der allgemeinere Kettenbruch

$$20. \quad a+\cfrac{x}{a+\cfrac{x^2}{a+\cfrac{x^3}{a+\dots}}}$$

oscillirt oder convergirt, je nachdem x gröfser, oder nicht gröfser als die Einheit ist.

17. Dafs der Kettenbruch

$$21. \quad \cfrac{2}{1+\cfrac{1^2\cdot 3}{1+\cfrac{2^2\cdot 4}{1+\cfrac{3^2\cdot 5}{1+\dots}}}}$$

welchen schon *Euler* (Opusc. anal. T. 2. pag. 156) entwickelt, jedoch als convergent angesehen hat, oscillirt, ergiebt sich unmittelbar, wenn man ihn nach der Formel (2.) in die gleichgeltende Reihe

$$\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\dots$$

verwandelt, welche nichts Anderes als

$$(1+1)-\left(\frac{1}{2}+1\right)+\left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{4}+1\right)+\dots$$

ist, also gegen die zwei Werthe log nat 2 und log nat 2 + 1 oscillirt; wie schon oben bemerkt wurde. Dasselbe folgt auch aus dem Satz 8. Läfst man nemlich zur gröfseren Einfachheit den ersten Theilzähler weg, so werden für den Kettenbruch

$$1+\cfrac{1^2.3}{1+\cfrac{2^2.4}{1+\dots}}$$

die entsprechenden Reihen (14. und 16.) bezüglich

$$=\frac{1}{3}+\frac{1\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{2^2}{3^2}+\frac{1\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\cdot\frac{2^2\cdot4^2}{3^2\cdot5^2}+\dots$$

und

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1^2}{2^2}+\frac{3\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2}+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\dots$$

sein. Beide Reihen convergiren *): also oscillirt der Kettenbruch. Der Satz 2. würde hier wieder keine Entscheidung geben.

18. Überhaupt ergiebt sich aus diesen Betrachtungen, dafs der Kettenbruch

$$22. \qquad a+\cfrac{1^k.h}{a+\cfrac{2^k.h_{\prime}}{a+\cfrac{3^k.h_{\prime\prime}}{a+\dots}}}$$

oscillirt, wenn in der Zahlenreihe h, $h_{\prime}$, $h_{\prime\prime}$, ... keine folgende kleiner als die vorhergehende und zugleich $k>2$ ist. Dagegen wird der Kettenbruch

$$23. \qquad a+\cfrac{1^k}{a+\cfrac{2^k}{a+\cfrac{3^k}{a+\dots}}}$$

convergiren, sobald $k\leqq2$.

---

*) In der ersten Reihe ist jedes Glied kleiner, als das entsprechende Glied der Reihe

$$1+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^2.4^2}{3^2.5^2}+\dots,$$

welche convergirt. In dieser haben nemlich die zwei aufeinander folgenden allgemeinen Glieder u_n und u_{n+1} bezüglich die Werthe $\left(\frac{2.4\dots2n-2}{3.5\dots2n-1}\right)^2$ und $\left(\frac{2.4\dots2n}{3.5\dots2n+1}\right)^2$, also ist $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2$, und wenn man dieses $=\frac{1}{1+\alpha}$ setzt, $\alpha=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2-1$, mithin $\lim. n\alpha=1$. Eben so folgt, dafs die zweite Reihe convergirt.

Eben so leicht sieht man, dafs der Kettenbruch

$$24. \quad a+\cfrac{k^r\cdot 1\cdot 3\cdot m}{a+\cfrac{(k+l)^r 2\cdot 4\cdot m}{a+\cfrac{(k+2l)^r\cdot 3\cdot 5\cdot m}{a+\dots}}}$$

oscillirt, sobald $r > 0$.

In dieser Form ist z. B., wenn man $k=3$, $m=4$, $a=2$, $r=2$, $l=2$ setzt, der Kettenbruch

$$2+\cfrac{3^2\cdot 2\cdot 6}{2+\cfrac{5^2\cdot 4\cdot 8}{2+\cfrac{7^2\cdot 6\cdot 10}{2+\dots}}}$$

enthalten, welcher gegen die zwei Werthe $\frac{4\pi}{8-\pi}$ und $\frac{16+4\pi}{4-\pi}$ oscillirt; wie sich leicht findet, wenn man bemerkt, dafs dem Kettenbruche

$$\cfrac{2}{1+\cfrac{4}{2+\cfrac{3^2\cdot 2\cdot 6}{2+\cfrac{5^2\cdot 4\cdot 8}{2+\dots}}}}$$

die Reihe $(1+1)-(\frac{1}{3}+1)+(\frac{1}{5}+1)-(\frac{1}{7}+1)\dots$ als gleichgeltende entspricht, welche gegen die zwei Werthe $\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{1}{4}\pi+1$ oscillirt.

19. Die bisher festgehaltene Voraussetzung, dafs sämmtliche in dem Kettenbruche (1.) vorkommenden Gröfsen positiv sind, kann man insofern aufheben, als sich auch annehmen läfst, dafs sämmtliche Theilzähler positiv, dagegen sämmtliche Theilnenner negativ sind. Setzt man nemlich

$$1. \quad a+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\dots}} = W,$$

so ist

$$25. \quad -a+\cfrac{b_1}{-a_1+\cfrac{b_2}{-a_2+\dots}} = -W.$$

Der Kettenbruch (25.) convergirt und oscillirt daher unter denselben Bedingungen wie der Kettenbruch (1.).

Göttingen im October 1847.

13.

Entwicklung der elliptischen Function $\Delta^{\pm r}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x.\cos^{\pm s}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x.\sin^{\pm t}\frac{2K}{\pi}x.\int_0^x\Delta^{\varrho}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x.dx$ nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x.

(Von Herrn *Carl Otto Meyer*, Dr. phil. zu Königsberg in Pr.)

Für einzelne Fragen der analytischen Mechanik, welche von elliptischen Integralen abhangen, wird gefordert, nicht nur diese Integrale selbst in convergente Reihen nach den Sinus und Cosinus des einen Arguments zu entwickeln, sondern auch Producte von trigonometrischen Functionen, die von demselben Argumente abhangen, und diese Integrale durch ähnliche Reihen darzustellen. *Jacobi's* „Fundamenta nova" enthalten bekanntlich mit dem einen Argument (x) der Entwicklung, das elliptische Integral von der ersten Gattung (u) multiplicirt mit $\frac{\pi}{2K}$; und die sehr convergenten Reihen für $\Delta\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x$, $\cos\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x$, $\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x$, und für die Integrale 2ter und 3ter Gattung, gehen nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen dieses Arguments fort.

Ferner löset *Jacobi* in dem Abschnitte seiner Fundamenta nova §. 43 ff. „Formulae generales" das Problem:

$$\Delta^{\pm r}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x,\qquad \cos^{\pm r}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x,\qquad \sin^{\pm r}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x$$

(unter r eine ganze positive Zahl verstanden) in Reihen nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x zu entwickeln. Er zeigt, dafs jede dieser Gröfsen durch eine endliche Reihe der Glieder

$$\Delta^{\pm 1}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x,\qquad \cos^{\pm 1}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x,\qquad \sin^{\pm 1}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x,$$

$$\Delta^{\pm 1}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x,\qquad \cos^{\pm 1}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x,\qquad \sin^{\pm 1}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x$$

und deren Differentialquotienten nach x dargestellt werden kann; jedes noch mit einer rationalen Function von k multiplicirt. Darauf entwickelt er die ersten und zweiten Potenzen von $\Delta^{\pm 1}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x$, $\cos\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x$, $\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x$ nach den

Sinus und Cosinus der Vielfachen von x. An diese Untersuchungen mich anschliefsend, werde ich versuchen, für

$$\Delta^{\pm r}\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x.\cos^{\pm s}\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x.\sin^{\pm t}\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x.E\,\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x$$

$$\left(\mathrm{E\ am}\frac{2K}{\pi}x=\int_0^{\frac{2K}{\pi}x}\Delta^2\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x.d.\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x\right)$$

ähnliche Entwickelungen aufzustellen, worin r, s, t ganze positive Zahlen bedeuten.

1.

Wird φ statt $\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x$ geschrieben, so soll zunächst untersucht werden, auf welche von einander verschiedene Formen

$$P=\Delta^{\pm r}\varphi.\cos^{\pm s}\varphi.\sin^{\pm t}\varphi$$

führe (unter r, s, t ganze positive Zahlen verstanden). Wendet man die Zerlegung in Partialbrüche an, wenn mehrere der Gröfsen $\Delta\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ im Nenner vorkommen und benutzt die rationale Umwandelung je zweier der Gröfsen $\Delta^2\varphi$, $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$ in die dritte, so wird, wenn r, s, t gerade Zahlen sind, die Form:

$$\Delta^{\pm 2n}\varphi,\quad \cos^{\pm 2n}\varphi,\quad \sin^{\pm 2n}\varphi$$

erreicht werden können. Sind zwei der Gröfsen r, s, t gerade Zahlen, die dritte ungerade, so führt P auf:

$$\Delta^{\pm 2n+1}\varphi,\quad \cos^{\pm 2n+1}\varphi,\quad \sin^{\pm 2n+1}\varphi,$$

$$\frac{\cos\varphi}{\Delta^{2n}\varphi},\quad \frac{\Delta\varphi}{\cos^{2n}\varphi},\quad \frac{\Delta\varphi}{\sin^{2n}\varphi},$$

$$\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi^{2n}},\quad \frac{\sin\varphi}{\cos^{2n}\varphi},\quad \frac{\cos\varphi}{\sin^{2n}\varphi}.$$

Sind in P zwei der Exponenten ungerade, der dritte gerade, so kommt man auf die Formen:

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^{2n+1}\varphi},\quad \frac{\sin\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi},\quad \frac{\sin\varphi}{\Delta^{2n+1}\varphi},$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\sin^{2n+1}\varphi},\quad \frac{\Delta\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi},\quad \frac{\cos\varphi}{\Delta^{2n+1}\varphi}.$$

Wenn endlich r, s, t ungerade Zahlen bedeuten, so erhält man die Fälle:

$$\sin\varphi.\cos\varphi.\Delta^{\pm 2n+1}\varphi,\qquad \sin\varphi.\Delta\varphi.\cos^{\pm 2n+1}\varphi,\qquad \cos\varphi.\Delta\varphi.\sin^{\pm 2n+1}\varphi.$$

Alle diese Formen zusammengefafst, führen auf folgende 12 zurück:

$$\sin^{\pm n}\varphi, \qquad \cos^{\pm n}\varphi, \qquad \Delta^{\pm n}\varphi,$$
$$\frac{\cos\varphi}{\sin^n\varphi}, \qquad \frac{\sin\varphi}{\cos^n\varphi}, \qquad \frac{\sin\varphi}{\Delta^n\varphi},$$
$$\frac{\Delta\varphi}{\sin^n\varphi}, \qquad \frac{\Delta\varphi}{\cos^n\varphi}, \qquad \frac{\cos\varphi}{\Delta^n\varphi},$$
$$\cos\varphi.\Delta\varphi.\sin^{\pm n}\varphi, \quad \sin\varphi.\Delta\varphi.\cos^{\pm n}\varphi, \quad \sin\varphi.\cos\varphi.\Delta^{\pm n}\varphi,$$

worin n jede positive ganze Zahl sein kann.

Die „Fundamenta nova" enthalten in §. 43 ff. die Entwickelungen von $\sin^{\pm n}\varphi$, $\cos^{\pm n}\varphi$, $\Delta^{\pm n}\varphi$ nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen des Arguments x, worin

$$\varphi = \mathrm{am}(u, k) = \mathrm{am}\Big(\frac{2K}{\pi}\cdot x, k\Big), \quad \text{also} \quad u = \frac{2K}{\pi}\cdot x$$

gesetzt ist. Diese Formeln selbst werde ich hier nicht anführen, wohl aber die Abhängigkeit, welche sie an

$$\Delta^{\pm 1}\varphi, \quad \cos^{\pm 1}\varphi, \quad \sin^{\pm 1}\varphi \quad \text{und} \quad \Delta^{\pm 2}\varphi, \quad \cos^{\pm 2}\varphi, \quad \sin^{\pm 2}\varphi$$

knüpft.

Es ist

$$1. \quad \Pi(2n).k^{2n}.\sin^{2n+1}\varphi$$
$$= \frac{d^{2n}.\sin\varphi}{du^{2n}} + A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}.\sin\varphi}{du^{2n-2}} + A_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}.\sin\varphi}{du^{2n-4}} + \dots + A_n^{(n)}.\sin\varphi,$$

$$2. \quad \Pi(2n-1).k^{2n-2}.\sin^{2n}\varphi$$
$$\frac{d^{2n-2}.\sin^2\varphi}{du^{2n-2}} + B_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}.\sin^2\varphi}{du^{2n-4}} + B_n^{(2)}\frac{d^{2n-6}\sin^2\varphi}{du^{2n-6}} + \dots + B_r^{(n-1)}\sin^2\varphi + B_n^{(n)},$$

wo $\Pi(2n)$ der Abkürzung wegen für $1.2.3\dots 2n$ gesetzt ist, $du = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ ist und die Coëfficienten $A_n^{(m)}$, $B_n^{(m)}$ ganze Functionen von k und durch die Gleichungen

$$3. \quad A_n^{(m)} = A_{n-1}^{(m)} + (2n-1)^2(1+k^2)A_{n-1}^{(m-1)} - (2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2.A_{n-2}^{(m-2)}$$
$$4. \quad B_n^{(m)} = B_{n-1}^{(m)} + (2n-1)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(m-1)} - (2n-3)^2(2n-2)(2n-4)k^2.B_{n-2}^{(m-2)}$$

verbunden sind, in welchen, sobald $m > n$ ist, $A_n^{(m)} = B_n^{(m)} = 0$ gesetzt werden mufs.

Eben so ist

$$5. \quad \frac{\Pi(2n)}{\sin\varphi^{2n+1}}$$
$$= \frac{d^{2n}.\frac{1}{\sin\varphi}}{du^{2n}} + A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}.\frac{1}{\sin\varphi}}{du^{2n-2}} + A_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}.\frac{1}{\sin\varphi}}{du^{2n-4}} + \dots + \frac{A_n^{(n)}}{\sin\varphi},$$

$$6.\quad \frac{\Pi(2n-1)}{\sin^{2n}\varphi}$$

$$= \frac{d^{2n-2}.\frac{1}{\sin^2\varphi}}{du^{2n-2}} + B_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}.\frac{1}{\sin^2\varphi}}{du^{2n-4}} + B_n^{(2)}\frac{d^{2n-6}.\frac{1}{\sin^2\varphi}}{du^{2n-6}} + \ldots + \frac{B^{(n-1)}}{\sin^2\varphi} + k^2.B_n^{(n)}.$$

Nach Fund. §. 46. ist $\sin\mathrm{am}\left(k'.(K-u),\ \frac{k\sqrt{-1}}{k'}\right) = \cos\mathrm{am}(u,k)$. Man setze in (1. 2. 5. 6. 3. und 4.) $k'.(K-u)$ und $\frac{k\sqrt{-1}}{k'}$ statt u und k, so erhält man, indem man die aus $A_n^{(m)}$ und $B_n^{(m)}$ entstehenden Coëfficienten durch $a_n^{(m)}$ und $b_n^{(m)}$ bezeichnet:

$$(-1)^n.\Pi(2n)\cdot\frac{k^{2n}}{k'^{2n}}.\cos^{2n+1}\varphi$$

$$= \frac{1}{k'^{2n}}\cdot\frac{d^{2n}.\cos\varphi}{du^{2n}} + \frac{a_n^{(1)}}{k'^{2n-2}}\cdot\frac{d^{2n-2}.\cos\varphi}{du^{2n-2}} + \frac{a_n^{(2)}}{k'^{2n-4}}\cdot\frac{d^{2n-4}.\cos\varphi}{du^{2n-4}} + \ldots + a_n^{(n)}\cos\varphi$$

$$(-1)^{n-1}.\Pi(2n-2)\cdot\frac{k^{2n-2}}{k'^{2n-2}}\cdot\cos^{2n}\varphi$$

$$= \frac{1}{k'^{2n-2}}\cdot\frac{d^{2n-2}\cos^2\varphi}{du^{2n-2}} + \frac{b_n^{(1)}}{k'^{2n-4}}\cdot\frac{d^{2n-4}.\cos^2\varphi}{du^{2n-4}} + \frac{b_n^{(2)}}{k'^{2n-6}}\cdot\frac{d^{2n-6}.\cos^2\varphi}{du^{2n-6}} + \ldots$$
$$\ldots + b_n^{(n-1)}.\cos^2\varphi + b_n^{(n)},$$

$$\frac{\Pi(2n)}{\cos^{2n+1}\varphi}$$

$$= \frac{1}{k'^{2n}}\cdot\frac{d^{2n}.\frac{1}{\cos\varphi}}{du^{2n}} + \frac{a_n^{(1)}}{k'^{2n-2}}\cdot\frac{d^{2n-2}.\frac{1}{\cos\varphi}}{du^{2n-2}} + \frac{a_n^{(2)}}{k'^{2n-4}}\cdot\frac{d^{2n-4}.\frac{1}{\cos\varphi}}{du^{2n-4}} + \ldots + \frac{a_n^{(n)}}{\cos\varphi},$$

$$\frac{\Pi(2n-1)}{\cos^{2n}\varphi}$$

$$= \frac{1}{k'^{2n-2}}\cdot\frac{d^{2n-2}.\frac{1}{\cos^2\varphi}}{du^{2n-2}} + \frac{b_n^{(1)}}{k'^{2n-4}}\cdot\frac{d^{2n-4}.\frac{1}{\cos^2\varphi}}{du^{2n-4}} + \frac{b_n^{(2)}}{k'^{2n-6}}\cdot\frac{d^{2n-6}.\frac{1}{\cos^2\varphi}}{du^{2n-6}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{b^{n-1}}{\cos^2\varphi} - \frac{k^2}{k'^2}.b_n^{(n)},$$

$$a_n^{(m)} = a_{n-1}^{(m)} + (2n-1)^2\left(1-\frac{k^2}{k'^2}\right)a_{n-1}^{(m-1)} + (2n-2)^2(2n-1)(2n-3)\frac{k^2}{k'^2}\cdot a_{n-2}^{(m-2)},$$

$$b_n^{(m)} = b_{n-1}^{(m)} + (2n-2)^2\left(1-\frac{k^2}{k'^2}\right)b_{n-1}^{(m-1)} + (2n-3)^2(2n-2)(2n-4)\frac{k^2}{k'^2}\cdot b_{n-2}^{(m-2)},$$

und $k'^{2m}.a_n^{(m)} = C_n^{(m)}$ und $k'^{2m}.b_n^{(m)} = D_n^{(m)}$ gesetzt, giebt:

$$7.\quad (-1)^n.\Pi(2n).k^{2n}.\cos^{2n+1}\varphi$$
$$= \frac{d^{2n}.\cos\varphi}{du^{2n}} + C_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}.\cos\varphi}{du^{2n-2}} + C_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}.\cos\varphi}{du^{2n-4}} + \ldots + C_n^{(n)}.\cos\varphi,$$

$$8.\quad (-1)^n.\Pi(2n-1).k^{2n-2}.\cos^{2n}\varphi$$
$$= \frac{d^{2n-2}.\cos^2\varphi}{du^{2n-2}} + D_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}.\cos^2\varphi}{du^{2n-4}} + D_n^{(2)}\frac{d^{2n-6}.\cos^2\varphi}{du^{2n-6}} + \ldots + D_n^{(n-1)}.\cos^2\varphi + \frac{D_n^{(n)}}{k'^2},$$

$$9.\quad \frac{\Pi(2n).k'^{2n}}{\cos^{2n+1}\varphi}$$
$$= \frac{d^{2n}.\frac{1}{\cos\varphi}}{du^{2n}} + C_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}.\frac{1}{\cos\varphi}}{du^{2n-2}} + C_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}.\frac{1}{\cos\varphi}}{du^{2n-4}} + \ldots + \frac{C_n^{(n)}}{\cos\varphi}$$

$$10.\quad \frac{\Pi(2n-1).k'^{2n-2}}{\cos^{2n}\varphi}$$
$$= \frac{d^{2n-2}.\frac{1}{\cos^2\varphi}}{du^{2n-2}} + D_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}.\frac{1}{\cos^2\varphi}}{du^{2n-4}} + D_n^{(2)}\frac{d^{2n-6}.\frac{1}{\cos^2\varphi}}{du^{2n-6}} + \ldots + \frac{D_n^{(n-1)}}{\cos^2\varphi} - \frac{k^2}{k'^2}.D_n^{(n)},$$

$$11.\quad C_n^{(m)} = C_{n-1}^{(m)} + (2n-1)^2(1-2k^2)C_{n-1}^{(m-1)} + (2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2.k'^2.C_{n-2}^{(m-2)},$$

$$12.\quad D_n^{(m)} = D_{n-1}^{(m)} + (2n-2)^2(1-2k^2)D_{n-1}^{(m-1)} + (2n-3)^2(2n-2)(2n-4)k^2.k'^2.D_{n-2}^{(m-2)},$$

in welchen Gleichungen $C_n^{(m)}$ und $D_n^{(m)}$ verschwindet, sobald $m > n$ wird.

2.

Ferner ist

$$\sin\operatorname{am}(u.\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}.\operatorname{tang}\operatorname{am}(u,k') \quad \text{und}$$
$$\operatorname{cotang}\operatorname{am}(u+\sqrt{-1}.K') = \sqrt{-1}.\Delta\operatorname{am}(u),$$

also

$$\Delta\operatorname{am}u = \frac{1}{\sin\operatorname{am}(u\sqrt{-1}-K',k')}.$$

Führt man in die Gleichungen (6, 5, 1, 2, 3, 4) $u\sqrt{-1}-K'$ und k' statt u und k ein, so findet sich

$$13.\quad (-1)^n\Pi(2n).\Delta^{2n+1}\varphi$$
$$= \frac{d^{2n}.\Delta\varphi}{du^{2n}} + G_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}.\Delta\varphi}{du^{2n-2}} + G_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}.\Delta\varphi}{du^{2n-4}} + \ldots + G_n^{(n)}.\Delta\varphi,$$

$$14.\quad (-1)^{n-1}.\Pi(2n-1).\Delta^{2n}\varphi$$
$$= \frac{d^{2n-2}.\Delta^2\varphi}{du^{2n-2}} + H_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}.\Delta^2\varphi}{du^{2n-4}} + H_n^{(2)}\frac{d^{2n-6}.\Delta^2\varphi}{du^{2n-6}} + \ldots + k'^2.H_n^{(n)},$$

$$15.\quad \frac{(-1)^n.\Pi(2n).k'^{2n}}{\Delta^{2n+1}\varphi}$$

$$= \frac{d^{2n}.\frac{1}{\Delta\varphi}}{du^{2n}} + G_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}.\frac{1}{\Delta\varphi}}{du^{2n-2}} + G_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}.\frac{1}{\Delta\varphi}}{du^{2n-4}} + \dots + \frac{G_n^{(n)}}{\Delta\varphi},$$

$$16.\quad (-1)^{n-1}.\Pi(2n-1).\frac{k'^{2n-2}}{\Delta^{2n}\varphi}$$

$$= \frac{d^{2n-2}.\frac{1}{\Delta^2\varphi}}{du^{2n-2}} + H_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}.\frac{1}{\Delta^2\varphi}}{du^{2n-4}} + H_n^{(2)}\frac{d^{2n-6}.\frac{1}{\Delta^2\varphi}}{du^{2n-6}} + \dots + H_n^{(n)},$$

$$17.\quad G_n^{(m)} = G_{n-1}^{(m)} - (2n-1)^2(1+k'^2)G_n^{(m-1)}$$
$$- (2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k'^2 G_{n-2}^{(m-2)},$$

$$18.\quad H_n^{(m)} = H_{n-1}^{(m)} - (2n-2)^2(1+k'^2)H_{n-1}^{(m-1)}$$
$$- (2n-3)^2(2n-2)(2n-4)k'^2 H_{n-2}^{(m-2)}.$$

Ähnlicherweise, wie in den „Fund." $\Delta^{\pm n}\varphi$, $\cos^{\pm n}\varphi$, $\sin^{\pm n}\varphi$ entwickelt ist, läfst sich

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^n\varphi},\quad \frac{\sin\varphi}{\cos^n\varphi},\quad \frac{\sin\varphi}{\Delta^n\varphi},$$
$$\frac{\Delta\varphi}{\sin^n\varphi},\quad \frac{\Delta\varphi}{\cos^n\varphi},\quad \frac{\cos\varphi}{\Delta^n\varphi}$$

behandeln; wobei wiederum die beiden Fälle wesentlich verschieden sind, in welchen n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Erwägt man nämlich, dafs

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{d.\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}}{du} \quad \text{und} \quad \frac{\cos\varphi}{\sin^{2n}\varphi} = -\left\{k^2 + \frac{\Delta^2\varphi}{\sin^2\varphi}\right\}^{n-1}.\frac{d.\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}}{du}$$

ist, so besteht die Seite links der letzten Gleichung aus Gliedern, deren allgemeiner Ausdruck $C.\frac{d.\left(\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}\right)^{2m-1}}{du}$ ist und welcher verschwindet, sobald $m > n$ wird. Eben so ist:

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^{2n+1}\varphi} = \operatorname{cotang}\{1+\operatorname{cotang}^2\varphi\}^n,$$

$$\frac{\sin\varphi}{\cos^{2n}\varphi} = \frac{1}{k'^{2n}}\left\{\frac{\Delta^2\varphi}{\cos^2\varphi} + k^2\right\}^{n-1}.\frac{d.\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}}{du},$$

$$\frac{\sin\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi} = \operatorname{tang}\{1+\operatorname{tang}^2\varphi\},$$

$$\frac{\sin\varphi}{\Delta^{2n}\varphi} = \frac{1}{k'^{2n}}\left\{1-\frac{k^2\cos^2\varphi}{\Delta^2\varphi}\right\}^{n-1}\cdot\frac{d.\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}}{du},$$

$$\frac{\sin\varphi}{\Delta^{2n+1}\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}\cdot\left\{1+\frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta^2\varphi}\right\}^n,$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\sin^{2n}\varphi} = -\{1+\text{cotang}^2\varphi\}^{n-1}\cdot\frac{d.\text{cotang}\,\varphi}{du},$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\sin^{2n+1}\varphi} = \left\{k^2+\frac{\Delta^2\varphi}{\sin^2\varphi}\right\}^n\cdot\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\cos^{2n}\varphi} = \{1+\text{tang}^2\varphi\}^{n-1}\cdot\frac{d.\text{tang}\,\varphi}{du},$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi} = \frac{1}{k'^{2n}}\cdot\left\{\frac{\Delta^2\varphi}{\cos^2\varphi}-k^2\right\}^n\cdot\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\frac{\cos\varphi}{\Delta^{2n}\varphi} = \left\{1+\frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta^2\varphi}\right\}^{n-1}\cdot\frac{d.\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}}{du},$$

$$\frac{\cos\varphi}{\Delta^{2n+1}\varphi} = \frac{1}{k'^{2n}}\cdot\left\{1-\frac{k^2\cos^2\varphi}{\Delta^2\varphi}\right\}\cdot\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Es kommt demnach in allen diesen Fällen auf die neu zu betrachtenden Functionen

$$\text{tang}^{2n+1}\varphi,\qquad \text{cotang}^{2n+1}\varphi,\qquad \frac{\Delta^{2n+1}\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi},$$

$$\frac{\cos^{2n+1}\varphi}{\Delta^{2n+1}\varphi},\qquad \frac{\sin^{2n+1}\varphi}{\Delta^{2n+1}\varphi},\qquad \frac{\Delta^{2n+1}\varphi}{\sin^{2n+1}\varphi}$$

an (unter n eine positive ganze Zahl verstanden), und diese sind sofort aus den in den „Fundam." angestellten Betrachtungen zu entnehmen.

Verwandelt man nämlich u in $K-u$, so geht $\sin\varphi$ in $\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$ und $\cos\varphi$ in $\frac{k'\sin\varphi}{\Delta\varphi}$ über und die Gleichungen (1. 5. 7. 9.) nehmen folgende Form an:

$$\Pi(2n).k'^{2n}.\frac{\cos^{2n+1}\varphi}{\Delta^{2n+1}\varphi}$$

$$= \frac{d^{2n}.\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}}{du^{2n}} + A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}.\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}}{du^{2n-2}} + A_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}.\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}}{du^{2n-4}} + \ldots + A_n^{(n)}\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$\Pi(2n)\cdot\frac{\Delta^{2n+1}\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi}$$

$$= \frac{d^{2n}.\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}}{du^{2n}} + A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}.\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}}{du^{2n-2}} + A_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}.\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}}{du^{2n-4}} + \ldots + A_n^{(n)}\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi},$$

$$(-1)^n.\Pi(2n).k^{2n}.k'^{2n}.\frac{\sin^{2n+1}\varphi}{\Delta^{2n+1}\varphi}$$

$$= \frac{d^{2n}.\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}}{du^{2n}} + C_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}.\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}}{du^{2n-2}} + C_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}.\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}}{du^{2n-4}} + \ldots + C_n^{(n)}\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$\Pi(2n).\frac{\Delta^{2n+1}\varphi}{\sin^{2n+1}\varphi}$$

$$= \frac{d^{2n}.\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}}{du^{2n}} + C_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}.\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}}{du^{2n-2}} + C_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}.\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}}{du^{2n-4}} + \ldots + C_n^{(n)}\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}.$$

Es ist $\sin\text{am}(u\sqrt{-1},k) = \sqrt{-1}.\text{tang}\,\text{am}(u,k')$. Vertauscht man daher in (1. und 5.) u und k mit $u\sqrt{-1}$ und k', so wird:

$$\Pi(2n).k'^{2n}.\text{tang}^{2n+1}\varphi$$

$$= \frac{d^{2n}.\text{tang}\,\varphi}{du^{2n}} + J_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}.\text{tang}\,\varphi}{du^{2n-2}} + J_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}.\text{tang}\,\varphi}{du^{2n-4}} + \ldots + J_n^{(n)}\text{tang}\,\varphi,$$

$$\Pi(2n)\,\text{cotang}^{2n+1}\varphi$$

$$= \frac{d^{2n}.\text{cotang}\,\varphi}{du^{2n}} + J_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}.\text{cotang}\,\varphi}{du^{2n-2}} + J_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}.\text{cotang}\,\varphi}{du^{2n-4}} + \ldots + J_n^{(n)}\,\text{cotang}\,\varphi;$$

wo $A_n^{(m)}$ und $C_n^{(m)}$ durch die vorhin angegebenen Relationen, $J_n^{(m)}$ dagegen durch

$$J_n^{(m)} = J_{n-1}^{(m)} - (2n-1)^2(1+k^2)J_{n-1}^{(m-1)} - (2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2J_{n-2}^{m-2}$$

bestimmt werden. Endlich führen

$$\cos\Delta\varphi.\sin^{\pm n}\varphi, \qquad \sin\varphi.\Delta\varphi.\cos^{\pm n}\varphi, \qquad \sin\varphi.\cos\varphi.\Delta^{\pm n}\varphi$$

auf die Form

$$\frac{1}{\pm n+1}.\frac{d.\sin^{\pm 2n+1}\varphi}{du}, \quad -\frac{1}{\pm n+1}.\frac{d.\cos^{\pm 2n+1}\varphi}{du}, \quad -\frac{1}{\pm n+1}.\frac{d.\Delta^{\pm 2n+1}\varphi}{du},$$

sobald $\pm n+1$ nicht gleich 0 wird. Ist dagegen $\pm n = 1$, so erhält man die Ausdrücke:

$$\frac{\cos\varphi.\Delta\varphi}{\sin\varphi}, \quad \frac{\sin\varphi.\Delta\varphi}{\cos\varphi}, \quad \frac{\sin\varphi.\cos\varphi}{\Delta\varphi},$$

welche der Reihe nach in

$$\int^u\left\{k^2\sin^2\varphi - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right\}du, \quad \int^u\left\{k^2\cos^2\varphi + \frac{k'^2}{\cos^2\varphi}\right\}du; \quad \int^u\left\{\frac{\Delta^2\varphi}{k^2} - \frac{k'^2}{k^2.\Delta^2\varphi}\right\}du$$

übergehen.

(Der Schluſs folgt im nächsten Heft.)

(Der Schluſs folgt im nächsten Heft.)

Crelle, Journal d. Math. Bd. 37. Heft 3.

Fac-simile einer Handschrift von Manfredi.

14 Janvier 1707

Monsieur

Me voila donc de nouveau avec mon françois, que j'avois fait serment de quitter pour jamais, car je m'y fais pitie moy meme. Mais le Pere Zabal m'ayant desiré de luy faire voir un échantillon de mon style dans cette langue, je viens de luy écrire une lettre de ma façon, qui est fort belle. Et comme je prends la liberté de luy adresser celle-cy ouverte, en le priant de vous l'envoyer, apres qu'il aura vu quelques observations cy-jointes, il faut luy faire voir que je n'ay pas copié dans un livre ce que je luy ecris, et que j'ay un tres gros capital de phrases françoises qui sont tout-a-fait jolies.

Les observations dont je vous parlé ont eté faites a l'occasion de l'opposition de Mars et de Saturne au soleil. Lorsque je vous ecrivis ma derniere lettre au commencement de Decembre je n'étois pas encore asseuré de combien le demy cercle dont je me suis servi dans ces observations étoit éloigné du veritable meridien, c'est pourquoy je me contentay de vous donner la comparaison de ces deux Planetes avec Aldebaran, qui étoit a peu pres dans le même parallele avec eux. A cette heure nous avons examiné, par un grand nombre d'hauteurs correspondentes du soleil et des fixes, tous les points du demy cercle ou sont passé tant ces Planetes que le soleil au temps de cette opposition, et de la j'ay tiré les veritables heures apres midy que ces Planetes ont passé par le meridien, et j'ay achevé ensuite le calcul de leurs oppositions.

. . . .

Boulogne ce 14 Janvier 1707

Vôtre tres humble et tres obeissant serviteur Manfredi

14.

Entwicklung der elliptischen Function

$$\Delta^{\pm r}\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x.\cos^{\pm s}\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x.\sin^{\pm t}\frac{2K}{\pi}x.\int_0^x\Delta^2\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x.dx$$

nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x.

(Von Herrn *Carl Otto Meyer*, Dr. phil. zu Königsberg in Pr.)

(Schlufs der Abhandlung No. 13. im vorigen Heft)

3.

Versteht man unter S eine der elliptischen Functionen

$$\sin\varphi,\quad \cos\varphi,\quad \Delta\varphi,\quad \mathrm{tang}\varphi,\quad \frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi},\quad \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

und deren reciproke Werthe, so läfst sich nach dem Vorhergehenden *das Product $\Delta^{\pm r}\varphi.\cos^{\pm s}\varphi.\sin^{\pm t}\varphi$ durch eine Summe von S, S^2 und deren erstes Integral, nebst deren Differentialquotienten nach u, ausdrücken; jedes Glied mit einer rationalen Function von k multiplicirt.* Da nun jede dieser Functionen S und S^2 durch Änderung von u und k auf *eine und dieselbe* zurückgeführt werden kann, so kann man sagen: *Sind r, s, t ganze Zahlen, und ist S eine der genannten elliptischen Functionen, so läfst sich $\Delta^{\pm r}\varphi.\cos^{\pm s}\varphi.\sin^{\pm t}\varphi$ durch eine Summe von S, S^2, durch deren erstes Integral und deren Differentialquotienten nach dem Argument u darstellen.* Dieses Resultat ist als unmittelbare Folge der in den „Fundamentis §. 43—46." gelöseten Aufgabe: „Formulae generales etc." zu betrachten.

Die „Fund." enthalten die Reihen-Entwicklungen von

$$\sin\varphi,\quad \cos\varphi,\quad \Delta\varphi,\quad \frac{1}{\sin\varphi},\quad \frac{1}{\cos\varphi},\quad \frac{1}{\Delta\varphi},\quad \sin^2\varphi,\quad \cos^2\varphi,\quad \Delta^2\varphi,$$

$$\frac{1}{\sin^2\varphi},\quad \frac{1}{\cos^2\varphi},\quad \frac{1}{\Delta^2\varphi},\quad \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi},\quad \frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi},\quad \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi},\quad \frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}$$

nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von $x=\frac{\pi u}{2K}$; und im 26ten Bande dieses Journals S. 101 ff. hat *Jacobi* die Reihe für $\mathrm{tang}\varphi$ gegeben, aus welcher wiederum die für $\mathrm{cotang}\varphi$ abgeleitet werden kann.

Bezeichnet man nämlich, nach *Jacobi*, k, k', K, φ, u, sobald darin q^2 statt q gesetzt wird, mit $k^{(2)}$, $k^{(2)\prime}$, $K^{(2)}$, $\varphi^{(2)}$, $u^{(2)}$, so giebt die *Legendre*sche Transformation:

$$\frac{1+k'}{2}\cdot\frac{2K}{\pi}=\frac{2K^{(2)}}{\pi},\qquad \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}=k^{(2)\prime},\qquad \mathrm{tang}\varphi=\frac{(1+k^{(2)})\,\mathrm{tang}\varphi^{(2)}}{\Delta\varphi^{(2)}}.$$

Wenn man rechts in der letzten Gleichung Zähler und Nenner mit $\cos\varphi^{(2)}.\varDelta\varphi^{(2)}$ multiplicirt und die Zerlegung in Partialbrüche anwendet, so erhält man

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{1-k^{(2)}}\cdot\left\{\frac{\sin\varphi^{(2)}.\varDelta\varphi^{(2)}}{\cos\varphi^{(2)}} - k^{(2)2}\frac{\sin\varphi^{(2)}.\cos\varphi^{(2)}}{\varDelta\varphi^{(2)}}\right\},$$

und nach einigen Umwandelungen:

$$\frac{2k'K}{\pi}\cdot\operatorname{tang}\varphi = -\frac{d.l.\cos\varphi^{(2)}}{dx} + \frac{d.l.\varDelta\varphi^{(2)}}{dx}.$$

Eben so ist

$$(1+k^{(2)})\operatorname{cotang}\varphi = \frac{\varDelta\varphi^{(2)}}{\operatorname{tang}\varphi^{(2)}} = \frac{d.l.\sin\varphi^{(2)}}{du^{(2)}} \quad \text{oder} \quad \frac{2K}{\pi}\cdot\operatorname{cotang}\varphi = \frac{d.l.\sin\varphi^{(2)}}{dx}.$$

Setzt man in die gefundenen Ausdrücke für $\frac{d.l.\cos\varphi^{(2)}}{dx}$, $\frac{d.l.\varDelta\varphi^{(2)}}{dx}$, $\frac{d.l.\sin\varphi^{(2)}}{dx}$ die Reihen nach „Fund. §. 39." und ändert q in q^2, so wird

19. $$\frac{2k'K}{\pi}\cdot\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}x - \frac{4q^2}{1+q^2}\sin 2x + \frac{4q^4}{1+q^4}\sin 4x - \frac{3q^6}{1+q^6}\sin 6x + \ldots,$$

20. $$\frac{2K}{\pi}\cdot\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}x - \frac{4q^2}{1+q^2}\sin 2x - \frac{4q^4}{1+q^4}\sin 4x - \frac{4q^6}{1+q^6}\sin x - \ldots.$$

4.

Wird die Aufgabe gestellt: das Product $\varDelta^{\pm r}\varphi.\cos^{\pm s}\varphi.\sin^{\pm t}\varphi$, mit dem elliptischen Integral 2ter Gattung, nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen des Arguments x zu entwickeln, so liegt nach dem Vorigen ihre Lösung offenbar in der Bildung von zweitheiligen Producten, deren einer Factor $\int\varDelta^2\varphi\,du$, der andere eine der Gröfsen S, S^2, deren erstes Integral, oder deren $n$ter Differentialquotient nach x ist.

Es läfst sich hierüber folgender allgemeine Satz aufstellen:

Während die Entwicklung des Ausdrucks

$$\varDelta^{\pm r}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x.\cos^{\pm s}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x.\sin^{\pm t}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x,$$

nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x, von S, S^2, deren erstem Integral und deren Differentialquotienten nach x abhangt, erfordert die Entwicklung von

$$\varDelta^{\pm r}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x.\cos^{\pm s}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x.\sin^{\pm t}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x.\int_0^{\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x}\varDelta\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x.d.\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x$$

aufserdem noch die einmalige Differentiation derselben Ausdrücke S, S^2 nach q.

Der Beweis hiervon soll sogleich durch die Aufstellung der Entwicklung gegeben werden.

Bedient man sich der kürzern Bezeichnung u und φ statt $\frac{2K}{\pi}x$ und und am $\frac{2K}{\pi}x$, so wird verlangt:

$$S.\int_0^a \Delta^2\varphi\,du,\quad S^2.\int_0^u \Delta^2\varphi\,du \text{ und } \frac{d^m.S}{du^m}\int_0^u \Delta^2\varphi\,du,\quad \frac{d^m.S^2}{du^m}\int_0^u \Delta^2\varphi\,du\,.$$

zu entwickeln.

Nach bekannten Regeln der Differentiation ist

$$\frac{d^m.S}{du^m}.\int_0^u \Delta^2\varphi\,du = \frac{d\left\{\frac{d^{m-1}.S}{du^{m-1}}\int_0^u \Delta^2\varphi\,du\right\}}{du} - \frac{d^{m-1}.S}{du^{m-1}}\Delta^2\varphi.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach u, ändert darin m in $m-1$ und addirt die entstehende Gleichung zu der hingeschriebenen, so erhält man:

$$\frac{d^m.S}{du^m}.\int_0^u \Delta^2\varphi\,du =$$

$$\frac{d^2.\left\{\frac{d^{m-2}S}{du^{m-2}}.\int_0^u \Delta^2\varphi\,du\right\}}{du^2} - \frac{d^{m-1}.S}{du^{m-1}}.\Delta^2\varphi - \frac{d.\left\{\frac{d^{m-2}.S}{du^{m-2}}\Delta^2\varphi\right\}}{du}$$

und, auf ähnliche Weise fortgehend:

$$\frac{d^m.S}{du^m}.\int_0^u \Delta^2\varphi\,du =$$

$$\frac{d^m.\left\{S.\int_0^u \Delta^2\varphi\,du\right\}}{du^m} - \frac{d^{m-1}.S}{du^{m-1}}.\Delta^2\varphi - \frac{d.\left\{\frac{d^{m-2}.S}{du^{m-2}}.\Delta^2\varphi\right\}}{du} - \ldots - \frac{d^{m-1}.\{S.\Delta^2\varphi\}}{du^{m-1}};$$

worin auch offenbar S durch S^2 ersetzt werden kann. Durch diese Transformation vereinfacht sich die Aufgabe auf:

$$\text{I.}\quad \frac{d^m.S}{du^m}.\Delta^2\varphi,\qquad \frac{d^m.S^2}{du^m}.\Delta^2\varphi,$$

$$\text{II.}\quad S.\int_0^u \Delta^2\varphi\,du,\qquad S^2.\int_0^u \Delta^2\varphi\,du.$$

Jeder der Ausdrücke:

$$\frac{d^m.S}{du^m},\qquad \frac{d^m.S^2}{du^m}$$

kann durch eine Summe von Gliedern von der Form $A.\Delta^{\pm r}\varphi.\cos^{\pm s}\varphi.\sin^{\pm t}\varphi$ dargestellt werden, in denen A eine rationale Function von k ist.

Setzt man nämlich $S = \sin\varphi$, so wird:

$$\frac{d.\sin\varphi}{du} = \cos\varphi.\Delta\varphi,$$

$$\frac{d^2.\sin\varphi}{du^2} = -(1+k^2)\sin\varphi + 2k^2\sin^3\varphi,$$

$$\frac{d^3.\sin\varphi}{du^3} = -(1+k^2)\cos\varphi.\varDelta\varphi + 6k^2\sin^2\varphi.\cos\varphi.\varDelta\varphi,$$

$$\frac{d^4.\sin\varphi}{du^4} = \{(1+k^2)^2+k^4\}\sin\varphi - 20k^2(1+k^2)\sin^3\varphi + 24k^4\sin 5\varphi.$$

So fortgehend läfst sich

$$\frac{d^{2n+1}.\sin\varphi}{du^{2n+1}} \quad \text{und} \quad \frac{d^{2n}.\sin\varphi}{du^{2n}}$$

durch folgende Reihen darstellen:

21. $$\frac{d^{2n+1}.\sin\varphi}{du^{2n+1}} = \alpha_n^{(0)}.\cos\varphi.\varDelta\varphi + \alpha_n^{(1)}\sin^2\varphi.\cos\varphi.\varDelta\varphi + \alpha_n^{(2)}\sin^4\varphi.\cos\varphi.\varDelta\varphi + \dots$$
$$\dots + \sin^{2n}\varphi.\cos\varphi.\varDelta\varphi,$$

22. $$\frac{d^{2n}.\sin\varphi}{du^{2n}} = \beta_n^{(0)}.\sin\varphi + \beta_n^{(1)}.\sin^3\varphi + \beta_n^{(2)}.\sin^5\varphi + \dots + \beta_n^{(n)}.\sin^{2n+1}\varphi.$$

Um die Coëfficienten $\alpha_n^{(0)} \dots \alpha_n^{(n)}$ zu finden, bilde man, analog mit (21.):

$$\frac{d^{2n-1}.\sin\varphi}{du^{2n-1}} = \alpha_{n-1}^{(0)}.\cos\varphi.\varDelta\varphi + \alpha_{n-1}^{(1)}.\sin^2\varphi.\cos\varphi.\varDelta\varphi + \alpha_{n-1}^{(2)}.\sin^4\varphi.\cos\varphi.\varDelta\varphi + \dots$$
$$\dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)}.\sin^{2n-2}\varphi.\cos\varphi.\varDelta\varphi,$$

differentiire diese Gleichung zweimal nach u und, da die Seite links in dieser neuen Gleichung mit der Seite links in (21.) übereinstimmt, setze man ebenfalls die Coëfficienten von $\sin^{2p}\varphi.\cos\varphi.\varDelta\varphi$ auf den Seiten rechts einander gleich. Dies giebt:

$$\alpha_n^{(p)} = 2p(2p+1)k^2.\alpha_{n-1}^{(p-1)} - (2p+1)^2(1+k^2)\alpha_{n-1}^{p+1} + (2p+1)(2p+2)\alpha_{n-1}^{(p+1)}.$$

Eben so, die Gleichung

$$\frac{d^{2n-2}.\sin\varphi}{du^{2n-2}} = \beta_{n-1}^{(0)}.\sin\varphi + \beta_{n-1}^{(1)}.\sin^3\varphi + \beta_{n-1}^{(2)}.\sin^5\varphi + \dots + \beta_{n-1}^{(n-1)}.\sin^{2n-1}\varphi$$

zweimal nach u differentiirt und dann mit (22.) verglichen, giebt:

$$\beta_n^{(p)} = (2p-1)2p.k^2.\beta_{n-1}^{(p-1)} - (2p+1)^2(1+k^2)\beta_{n-1}^{(p)} + (2p+2)(2p+3)\beta_{n-1}^{(p+1)}.$$

Ferner findet sich leicht:

$$\frac{d.\sin^2\varphi}{du} = 2\sin\varphi.\cos\varphi.\varDelta\varphi,$$

$$\frac{d^2.\sin^2\varphi}{du^2} = 2 - 4(1+k^2)\sin^2\varphi + 6k^2\sin^4\varphi,$$

$$\frac{d^3.\sin^2\varphi}{du^3} = -8(1+k^2)\sin\varphi.\cos\varphi.\varDelta\varphi + 24k^2.\sin^3\varphi.\cos\varphi.\varDelta\varphi.$$

u. s. w.

Hieraus folgt

$$\frac{d^{2n+1}.\sin^2\varphi}{du^{2n+1}} = \gamma_n^{(0)}.\sin\varphi.\cos\varphi.\Delta\varphi + \gamma_n^{(1)}.\sin^3\varphi.\cos\varphi.\Delta\varphi + \gamma_n^{(2)}.\sin^5\varphi.\cos\varphi.\Delta\varphi + \dots$$
$$\dots + \gamma_n^{(n)}.\sin^{2n+1}\varphi.\cos\varphi.\Delta\varphi,$$
$$\frac{d^{2n}.\sin^2\varphi}{du^{2n}} = \delta_n^{(0)} + \delta_n^{(1)}.\sin^2\varphi + \delta_n^{(2)}.\sin^4\varphi + \dots + \delta_n^{(n)}.\sin^{2n}\varphi,$$

wo $\gamma_n^{(p)}$ und $\delta_n^{(p)}$ durch die Gleichungen

$$\gamma_n^{(p)} = (2p+1)(2p+2)k^2\gamma_{n-1}^{(p-1)} - (2p+2)^2(1+k^2)\gamma_{n-1}^{(p)} + (2p+2)(2p+3)\gamma_{n-1}^{(p+1)},$$
$$\delta_n^{(p)} = (2p-2)(2p-1)k^2\delta_{n-1}^{(p-1)} - (2p)^2(1+k^2)\delta_{n-1}^{(p)} + (2p+1)(2p+2)\delta_{n-1}^{(p+1)}$$

bestimmt werden und $\alpha_n^{(p)}$, $\beta_n^{(p)}$, $\gamma_n^{(p)}$, $\delta_n^{(p)}$ verschwinden, sobald $p > n$ wird. Durch Änderung von u und k, wie es in (§. 1. und 2.) angegeben ist, kann aus $\sin\varphi$ und $\sin^2\varphi$ jedes S und S^2 hergestellt werden; weshalb ich die nähere Ausführung übergehe. Hiermit ist also:

$$\frac{d^m.S}{du^m}.\Delta^2\varphi \quad \text{und} \quad \frac{d^m.S^2}{du^m}.\Delta^2\varphi$$

auf die Form $A.\Delta^{\pm r}\varphi.\cos^{\pm s}\varphi.\sin^{\pm t}\varphi$ gebracht.

5.

Es fehlt noch zur vollständigen Lösung der aufgestellten Aufgabe die Reihen-Entwicklung von

$$S.\int_0^u \Delta^2\varphi.du \quad \text{und} \quad S^2.\int_0^u \Delta^2\varphi\, du.$$

Auch hierzu sind die Anfänge theils in dem Werke „Fundamenta nova" enthalten, theils später von dem berühmten Verfasser desselben ausgesprochen worden.

Das elliptische Integral zweiter Gattung $\int_0^u \Delta\varphi\, du$ bezeichnet *Legendre* mit $E(\varphi)$: durch die „Fundamenta" ist statt dessen $Z(u)$ in die Analysis eingeführt worden, so dafs

$$\frac{2K}{\pi}.Z(a) = \frac{2K}{\pi}.E(\varphi) - \frac{2E'}{\pi}.u,$$

wo $E' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta\varphi\, d\varphi$, $u = \frac{2K}{\pi}x = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ gesetzt ist. Erhebt man diese Gleichung ins Quadrat und differentiirt sie nach u, so wird:

$$\frac{d\cdot\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Z^2(u)}{du}$$

$$= 2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \Delta^2\varphi . E(\varphi) + 2\left(\frac{2E'}{\pi}\right)^2 u - 2\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi} E(\varphi) - 2\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}\cdot u . \Delta^2\varphi,$$

und daraus:

$$2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cdot \Delta^2\varphi \cdot \int_0^u \Delta^2\varphi\, du$$

$$= \frac{d.\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 . Z^2(u)}{du} - 2\cdot\frac{2E'}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(u) + 2\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi} u . \Delta^2\varphi.$$

Der 47ste und 48ste Paragraph der „Fundamenta" enthalten die Reihen-Entwicklung für $\frac{2K}{\pi} Z(u)$ und $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Z^2(u)$, nämlich:

$$\frac{2K}{\pi} Z(u) = 4\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin 2x + \frac{q^2}{1-q^4}\sin 4x + \frac{q^3}{1-q^6}\sin 6x + \dots\right\},$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cdot Z^2(u) = 8\left\{\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{2q^4}{1-q^4} + \frac{3q^6}{1-q^6} + \dots\right\}$$

$$-8\left\{\frac{q}{1-q^2}\cos 2x + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos 4x + \frac{3q^3}{1-q^6}\cos 6x + \dots\right\}$$

$$+8\left\{\frac{q(1+q^2)}{(1-q^2)^2}\cos 2x + \frac{q^2(1+q^4)}{(1-q^4)^2}\cos 4x + \frac{q^3(1+q^6)}{(1-q^6)^2}\cos 6x + \dots\right\},$$

so dafs $\Delta^2\varphi . \int_0^u \Delta^2\varphi . du$ auf die verlangte Weise dargestellt ist.

Ich werde nun versuchen, $S.E(\varphi)$, oder vielmehr $S.Z(u)$, einen andern Weg einschlagend, zu entwickeln und denselben auch auf $S^2.Z(u)$ anzuwenden. Hierzu ist es nöthig, auf die in den letzten Capiteln der „Fundam." aufgestellten Reihen und Bezeichnungen näher einzugehn. In den Paragraphen (63. bis 65.) findet man:

$$\Theta(x) = 1 - 2q . \cos 2x + 2q^4 . \cos 4x - 2q^9 . \cos 6x + \dots,$$

$$H(x) = 2\sqrt[4]{q} . \sin x - 2\sqrt[4]{q^9} . \sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}} . \sin 5x - \dots,$$

$$\Theta(0) = \sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}, \quad \Theta(\tfrac{1}{2}\pi) = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}, \quad H(\tfrac{1}{2}\pi) = \sqrt{\left(\frac{2kK}{\pi}\right)},$$

$$\sin\varphi = \sin\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{H(x)}{\Theta(x)},$$

$$\cos\varphi = \cos\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{H(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)},$$

$$\Delta\varphi = \Delta\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)}.$$

$\Theta(x)$ und $H(x)$ ist hier statt der in den „Fundam." gebrauchten Zeichen $\Theta\left(\frac{2K}{\pi}x\right)$ und $H\left(\frac{2K}{\pi}x\right)$ gesetzt worden.

Setzt man der Kürze wegen $\Theta'(x)$, $\Theta''(x)$, ..., $H'(x)$, $H''(x)$, ... statt

$$\frac{d.\Theta(x)}{dx},\quad \frac{d^2.\Theta(x)}{dx^2},\quad \ldots.,\quad \frac{d.H(x)}{dx},\quad \frac{d^2.H(x)}{dx^2},\quad \ldots.,$$

so ist

$$\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

$Z(u) = Z\left(\frac{2K}{\pi}x\right)$ soll im Folgenden durch $Z(x)$ bezeichnet werden.

Herr Professor *Jacobi* hat nach dem Erscheinen der „Fundam." in Bezug auf $\Theta(x)$ und $H(x)$ zwei wichtige Bemerkungen gemacht und dadurch die Entwicklung von $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2.Z^2(x)$, welche in dem genannten Werke durch Multiplication zweier Reihen gefunden wurden, sehr erleichtert. Es ist nämlich:

$$\Theta''(x) = -4q\cdot\frac{d.\Theta(x)}{dq},\qquad H''(x) = -4q\cdot\frac{d.H(x)}{dq};$$

wovon die Richtigkeit aus der Differentiation der Reihen für $\Theta(x)$ und $H(x)$ hervorgeht. Multiplicirt man den Differentialquotienten nach q von $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ mit $-4q$, so ergiebt sich

$$-4q\cdot\frac{d\cdot\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}}{dq} = -\frac{4q}{\Theta(x)}\cdot\frac{d.\Theta''(x)}{dq} + \frac{4q}{\Theta(x)}\cdot\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\cdot\frac{d.\Theta(x)}{dq},$$

und da $-4q\cdot\frac{d.\Theta(x)}{dq} = \Theta''(x)$ und $-4q\cdot\frac{d.\Theta'(x)}{dq} = \Theta'''(x)$ ist, so folgt:

$$-4q\cdot\frac{d\cdot\frac{\Theta'(x)}{\Theta x}}{dq} = \frac{\Theta'''(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta''(x).\Theta'(x)}{\Theta^2(x)}\quad\text{oder}\quad -4q\cdot\frac{d\cdot\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}}{dq} = \frac{d\cdot\frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)}}{dx}.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich allgemein

$$-4q\cdot\frac{d\cdot\frac{\Theta^{(n-1)}(x)}{\Theta^{(n-2)}(x)}}{dq} = \frac{d\cdot\frac{\Theta^{n}(x)}{\Theta^{n-2}(x)}}{dx}.$$

Die vorletzte Formel führt unmittelbar auf die Entwicklung von $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot Z^2(x)$; denn differentiirt man $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ zweimal nach x, so erhält man

$$\frac{d^2 \cdot \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}}{dx^2} = \frac{d \cdot \frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)}}{dx} - \frac{d \cdot \left(\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right)^2}{dx},$$

und, für $\frac{d \cdot \frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)}}{dx}$ den gefundenen Werth gesetzt und $\frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$ statt $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ geschrieben, folgt

$$\frac{d \cdot \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cdot Z^2(x)}{dx} = -4q \cdot \frac{d \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dq} - \frac{d \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dx^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dx und integrirt zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=x$, so wird, da $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cdot Z^2(x)$ für $x=0$ verschwindet:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cdot Z^2(x)$$

$$= -4q \int_0^x \frac{d \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dq} \cdot dx - \frac{d\, \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dx} + \left[\frac{d \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dx}\right]_{x=0};$$

wo $\left[\frac{d \cdot \frac{2K}{\pi} Z(x)}{dx}\right]_{x=0}$ die Bedeutung hat, dafs x in $\frac{d \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dx}$ gleich Null gesetzt werden soll.

Dieses Resultat führt auf die den „Fundamentis" entnommene Formel, sobald für $\frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$ die Reihe

$$4\left\{\frac{q}{1-q^2} \cdot \sin 2x + \frac{q^2}{1-q^4} \cdot \sin 4x + \frac{q^3}{1-q^6} \cdot \sin 6x + \ldots\right\} \text{ gesetzt wird.}$$

6.

Werden, der Bezeichnung $\frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$ entsprechend, $\frac{2K}{\pi} \cdot R(x)$ und $\frac{2K}{\pi} \cdot R'(x)$ statt $\frac{H'(x)}{H(x)}$ und dessen Differentialquotienten nach x gesetzt, so werde ich, auf das Vorige mich stützend die Richtigkeit folgender Formeln beweisen:

23. $$\frac{2K}{\pi} \cdot Z'(x) + \frac{2K}{\pi} \cdot Z'(x + \tfrac{1}{2}\pi) + \left\{\frac{2K}{\pi} \cdot Z(x) - \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x + \tfrac{1}{2}\pi)\right\}^2$$
$$= \frac{\Theta''(\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}\pi)} + \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

24. $$\frac{2K}{\pi} \cdot Z'(x) + \frac{2K}{\pi} \cdot R'(x) + \left\{\frac{2K}{\pi} \cdot Z(x) - \frac{2K}{\pi} \cdot R(x)\right\}^2$$
$$= \frac{H''(\frac{1}{2}\pi)}{H(\frac{1}{2}\pi)} + \frac{\Theta''(\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}\pi)},$$

25. $$\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(x)+\frac{2K}{\pi}\cdot R'(x+\tfrac{1}{2}\pi)+\left\{\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)-\frac{2K}{\pi}\cdot R(x+\tfrac{1}{2}\pi)\right\}^2 = \frac{H''(\frac{1}{2}\pi)}{H(\frac{1}{2}\pi)}+\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}.$$

Beweis Es ist nach dem vorigen Paragraphen

$$\Theta(x+\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\Delta\varphi\,.\,\Theta(x),$$
$$H(x) = \sqrt{k}\,.\,\sin\varphi\,.\,\Theta(x),$$
$$H(x+\tfrac{1}{2}\pi) = \sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\cos\varphi\,.\,\Theta(x).$$

Man bilde von jeder dieser Gleichungen den ersten Differentialquotienten nach x, nemlich:

26. $$\begin{cases} \Theta'(x+\frac{1}{2}\pi) = -\frac{k^2}{\sqrt{k'}}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\sin\varphi\,.\cos\varphi\,.\,\Theta(x)+\frac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\Delta\varphi\,.\,\Theta'(x), \\ H'(x) = +\sqrt{k}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\cos\varphi\,.\,\Delta\varphi\,.\,\Theta(x)+\sqrt{k}\,.\,\sin\varphi\,.\,\Theta'(x), \\ H'(x+\frac{1}{2}\pi) = -\sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\sin\varphi\,.\,\Delta\varphi\,.\,\Theta(x)+\sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\cos\varphi\,.\,\Theta'(x). \end{cases}$$

Dividirt man die Seiten links und rechts in den drei letzten Gleichungen durch die entsprechenden drei vorhergehenden, so wird

27. $$\begin{cases} \frac{2K}{\pi}\cdot Z(x+\frac{1}{2}\pi) = -k^2\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin\varphi\,.\,\cos\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x), \\ \frac{2K}{\pi}\cdot R(x) = +\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\cos\varphi\,.\,\Delta\varphi}{\sin\varphi}+\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x), \\ \frac{2K}{\pi}\cdot R(x+\frac{1}{2}\pi) = -\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin\varphi\,.\,\Delta\varphi}{\cos\varphi}+\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x). \end{cases}$$

Man differentiire jede dieser Gleichungen nach x und führe statt $\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(x)$ seinen Werth $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\Delta^2\varphi-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}$ ein, so folgt:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(x+\tfrac{1}{2}\pi) = +\frac{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2}{\Delta^2\varphi}-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi},$$
$$\frac{2K}{\pi}\cdot R'(x) = -\frac{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2}{\sin^2\varphi}+\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi},$$
$$\frac{2K}{\pi}\cdot R'(x+\tfrac{1}{2}\pi) = -\frac{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2}{\cos^2\varphi}+\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi},$$

oder

$$28. \quad \begin{cases} \frac{2K}{\pi}\cdot Z'(x)+\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(x+\frac{1}{2}\pi)=\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\left\{\frac{k'^2}{\Delta^2\varphi}+\Delta^2\varphi\right\}-2\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}, \\ \frac{2K}{\pi}\cdot Z'(x)+\frac{2K}{\pi}\cdot R'(x) \qquad =\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\left\{-\sin^2\varphi+\Delta^2\varphi\right\}+\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}, \\ \frac{2K}{\pi}\cdot Z'(x)+\frac{2K}{\pi}\cdot R'(x+\frac{1}{2}\pi)=\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\left\{-\frac{k'^2}{\cos^2\varphi}+\Delta^2\varphi\right\}+\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (27.) nehmen die Form

$$29. \quad \begin{cases} \left\{\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)-\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x+\frac{1}{2}\pi)\right\}^2=-\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\left\{\frac{k'^2}{\Delta^2\varphi}+\Delta^2\varphi\right\}+(1+k'^2)\cdot\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2, \\ \left\{\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)-\frac{2K}{\pi}\cdot R(x)\right\}^2 \qquad =-\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\left\{-\frac{1}{\sin^2\varphi}+\Delta^2\varphi\right\}-\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2, \\ \left\{\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)-\frac{2K}{\pi}\cdot R(x+\frac{1}{2}\pi)\right\}^2=-\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\left\{-\frac{k'^2}{\cos^2\varphi}+\Delta^2\varphi\right\}+\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \end{cases}$$

an. Auf der Seite links in den Gleichungen (28 und 29.) stehen Ausdrücke, die in den zu erweisenden Gleichungen (23. 24. 25.) vorkommen. Setzt man sie statt derselben, so heben sich alle von x abhängigen Glieder auf und es bleibt als identisch zu beweisen:

$$30. \quad \begin{cases} (1+k'^2)\cdot\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-2\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi} = \frac{\Theta''(\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}\pi)}+\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}, \\ \left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2-2\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi} = \frac{H''(\frac{1}{2}\pi)}{H(\frac{1}{2}\pi)}+\frac{\Theta''(\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}\pi)}, \\ \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-2\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi} = \frac{H''(\frac{1}{2}\pi)}{H(\frac{1}{2}\pi)}+\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}. \end{cases}$$

Es ist:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(x)=\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\Delta^2\varphi-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}=\frac{d\cdot\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}}{dx}=\frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)}-\left\{\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right\}^2,$$

und da $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ für $x=0$ und $x=\frac{1}{2}\pi$ verschwindet und $\Delta\varphi$ in 1 und k' übergeht, so wird:

$$31. \quad \begin{cases} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi} = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}, \\ \left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi} = \frac{\Theta''(\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}\pi)}. \end{cases}$$

Die dritte der Gleichungen (26.) nach x differentiirt und dann $x=0$ gesetzt, giebt:

$$H''(\tfrac{1}{2}\pi) = -\sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\Theta(0)+\sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\Theta''(0),$$

und hieraus folgt:

$$\frac{H''(\frac{1}{2}\pi)}{H(\frac{1}{2}\pi)} = -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 + \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

oder

$$32. \quad \frac{H''(\frac{1}{2}\pi)}{H(\frac{1}{2}\pi)} = -\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}.$$

Vermöge der Gleichungen (31. und 32.) sind aber die (30.) offenbar identisch. Q. e. d.

Führt man in (23. 24. 25.) statt $Z(x)$, $R(x)$, ... die Ausdrücke von $\Theta(x)$ und $H(x)$ ein, so nehmen sie folgende Gestalt an:

$$33. \quad \begin{cases} \frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)} + \frac{\Theta''(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} - 2\cdot\frac{\Theta'(x).\Theta'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x).\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} = \frac{\Theta''(\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}\pi)} + \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}, \\ \frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)} + \frac{H''(x)}{H(x)} - 2\cdot\frac{\Theta'(x).H'(x)}{\Theta(x).H(x)} = \frac{H''(\frac{1}{2}\pi)}{H(\frac{1}{2}\pi)} + \frac{\Theta''(\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}\pi)}, \\ \frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)} + \frac{H''(x+\frac{1}{2}\pi)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)} - 2\cdot\frac{\Theta'(x).H'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x).H(x+\frac{1}{2}\pi)} = \frac{H''(\frac{1}{2}\pi)}{H(\frac{1}{2}\pi)} + \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} \end{cases}$$

und lassen sich auch unter dieser Form beweisen, indem man die Gleichungen (26.) und die kurz vorhergehenden zu Hülfe nimmt. Doch dürfte auf diesem Wege die Rechnung nur weitläuftiger werden.

7.

Diese drei Gleichungen dienen dazu, das verlangte Product $S\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)$ (unter S eine jede der Functionen:

$$\Delta\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\varphi, \quad \frac{1}{\Delta\varphi}, \quad \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \frac{1}{\sin\varphi},$$

$$\operatorname{tang}\varphi, \quad \operatorname{cotang}\varphi, \quad \frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}, \quad \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}$$

verstanden) nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x zu entwickeln.

Multiplicirt man nemlich die erste der Gleichungen (33.), nemlich

$$\frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)} + \frac{\Theta''(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} - 2\cdot\frac{\Theta'(x).\Theta'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x).\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} = \frac{\Theta''(\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}\pi)} + \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

mit $\Theta(\frac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\frac{\Theta(x)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}$, so gelangt man leicht zu der Form:

$$\begin{aligned} &\Theta(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\left\{2\cdot\frac{\Theta''(x)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} - 2\cdot\frac{\Theta'(x+\frac{1}{2}\pi).\Theta'(x)}{\Theta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}\right\} \\ &= \{\Theta''(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0) + \Theta''(0).\Theta(\tfrac{1}{2}\pi)\}\cdot\frac{\Theta(x)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} \\ &\quad + \Theta(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\left\{\frac{\Theta''(x)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} - \frac{\Theta''(x+\frac{1}{2}\pi).\Theta(x)}{\Theta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}\right\}. \end{aligned}$$

Die Seite links in der Gleichung ist:

$$2\cdot\frac{d.\left\{\Theta(\tfrac{1}{2}\pi)\Theta(0)\cdot\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}\right\}}{dx},$$

welche nach den Bezeichnungen in (§. 5.), nemlich

$$\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}=\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x),\qquad \varDelta\varphi=\sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)},$$

$$\Theta(\tfrac{1}{2}\pi)=\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)},\qquad \Theta(0)=\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

in

$$2\cdot\frac{d.\left\{\frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{1}{\varDelta\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Zx\right\}}{dx}$$

übergeht. Die Seite rechts in der Gleichung wird durch Anwendung von $\Theta''(x)=-4q\cdot\frac{d.\Theta(x)}{dq}$ auf die Form

$$-4q\cdot\frac{d.\Theta(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\frac{\Theta(x)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}}{dq},$$

gebracht werden können; wofür auch $-4q\cdot\frac{d\cdot\frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{1}{\varDelta\varphi}}{dq}$ geschrieben werden kann, und man erhält

$$34.\quad \frac{d.\Theta(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}}{dx}=-2q\cdot\frac{d.\Theta(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\frac{\Theta(x)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}}{dq},$$

$$35.\quad \frac{d.\left\{\frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{1}{\varDelta\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx}=-2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{1}{\varDelta\varphi}}{dq}.$$

Eben so multiplicire man die zweite und dritte der Gleichungen (33.) mit

$$H(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta(x)}{H(x)}\quad\text{und}\quad H(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\frac{\Theta(x)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)},$$

so gehen sie über in:

$$36.\quad \frac{d.H(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta(x)}{H(x)}}{dx}=-2q\cdot\frac{d.H(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta(x)}{H(x)}}{dq},$$

$$37.\quad \frac{d.H(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\frac{\Theta(x)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)}}{dx}=-2q\cdot\frac{d.H(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\frac{\Theta(x)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)}}{dq},$$

oder in:

$$38.\quad \frac{d\cdot\left\{\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = -2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}}{dq},$$

$$39.\quad \frac{d.\left\{\frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = -2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}}{dq}.$$

Nach „Fundam. §. 37." geht, sobald man q mit $-q$ und x mit $\frac{1}{2}\pi-x$ vertauscht, K in $k'.K$ und $\sin\varphi$ in $\cos\varphi$ über, während

$$\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = 4\left\{\frac{q}{1-q^2}\cdot\sin 2x+\frac{q^2}{1-q^4}\cdot\sin 4x+\frac{q^3}{1-q^6}\cdot\sin 6x+\dots\right\}$$

in $-\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)$ verwandelt wird. Durch diese Vertauschung kann die Formel (39.) unmittelbar aus (38.) abgeleitet werden.

Für das Folgende ist es nöthig, den Formeln (34. 36. und 37.) eine andere Gestalt zu geben; durch Änderung des Arguments x. Es ist nämlich nach „Fundam. §. 62."

$$\sqrt{-1}.H(x) = \sqrt[4]{q}.e^{x\sqrt{-1}}.\Theta(x-\tfrac{1}{2}lq.\sqrt{-1}),$$
$$\sqrt{-1}.\Theta(x) = \sqrt[4]{q}.e^{x\sqrt{-1}}.H(x-\tfrac{1}{2}lq.\sqrt{-1}) \text{ und}$$
$$\Theta(x+\pi) = \Theta(x);$$

wovon die Richtigkeit einleuchtet, wenn man für $\Theta(x)$ und $H(x)$ die Reihen einführt. Man setze in (34. 36. und 37.) der Reihe nach $x+\frac{1}{2}\pi$, $x-\frac{1}{2}lq.\sqrt{-1}$, $x-\frac{1}{2}lq.\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi$ statt x (wobei jedoch in (36. und 37.) vor der Substitution die Differentiation nach q in die nach x umzuformen ist, weil x sich um eine Function von q ändert), so erhält man

$$40.\quad \begin{cases} \dfrac{d\cdot\Theta(\frac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\frac{\Theta'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)}}{dx} = -2q\cdot\dfrac{d.\Theta(\frac{1}{2}\pi).\Theta(0).\frac{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)}}{dq}, \\[2ex] \dfrac{d.H(\frac{1}{2}\pi).\Theta(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H'(x)}{\Theta(x)}}{dx} = -2q\cdot\dfrac{d.H(\frac{1}{2}\pi).\Theta(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H(x)}{\Theta(x)}}{dq}, \\[2ex] d.H(\tfrac{1}{2}x).\Theta(0).\dfrac{H'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)} = -2q\cdot\dfrac{d.H(\frac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\frac{H(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)}}{dq}. \end{cases}$$

Differentiirt man zweimal nach x die bekannten Ausdrücke

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\Delta\varphi = \Theta(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\frac{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)},$$

$$\frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi = H(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H(x)}{\Theta(x)},$$

$$\frac{2kK}{\pi}\cdot\cos\varphi = H(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\frac{H(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)},$$

so ergiebt sich

$$\frac{d^2.\frac{2K}{\pi}.\Delta\varphi}{dx^2} = \frac{d.\Theta(\frac{1}{2}\pi).\Theta(0).\frac{\Theta'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)}}{dx} - \frac{d.\Theta(\frac{1}{2}\pi).\Theta(0).\frac{H(x+\frac{1}{2}\pi).\Theta'(x)}{\Theta^2(x)}}{dx},$$

$$\frac{d^2.\frac{2kK}{\pi}.\sin\varphi}{dx^2} = \frac{d.H(\frac{1}{2}\pi).\Theta(\frac{1}{2}\pi).\frac{H'(x)}{\Theta(x)}}{dx} - \frac{d.H(\frac{1}{2}\pi).\Theta(\frac{1}{2}\pi).\frac{H(x).\Theta'(x)}{\Theta^2(x)}}{dx},$$

$$\frac{d^2.\frac{2kK}{\pi}.\cos\varphi}{dx^2} = \frac{d.H(\frac{1}{2}\pi).\Theta(0).\frac{H'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta x}}{dx} - \frac{d.H(\frac{1}{2}\pi).\Theta(x).\frac{H(x+\frac{1}{2}\pi).\Theta'(x)}{\Theta^2(x)}}{dx},$$

und mit Hülfe von (40.):

$$41.\quad\begin{cases}\dfrac{d\cdot\left\{\frac{2K}{\pi}\cdot\Delta\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = -2q\cdot\dfrac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\Delta\varphi}{dq} - \dfrac{d^2\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\Delta(x)}{dx^2},\\[2ex] \dfrac{d\cdot\left\{\frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = -2q\cdot\dfrac{d\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi}{dq} - \dfrac{d^2\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi}{dx^2},\\[2ex] \dfrac{d.\left\{\frac{2kK}{\pi}\cdot\cos\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = -2q\cdot\dfrac{d.\frac{2kK}{\pi}\cdot\cos\varphi}{dq} - \dfrac{d^2\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\cos\varphi}{dx^4},\end{cases}$$

8.

Der im vorigen Capitel eingeschlagene Weg, welcher zu den Formeln (41.) führte, versagte seine Hülfe, sobald man ihn auf das Product von $\tang\varphi$, $\cotang\varphi$, $\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}$, $\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}$, $\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$, $\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}$ mit $Z(x)$ anzuwenden suchte, so dafs zu erwarten war, man werde eine von den abgeleiteten Ausdrücken abweichende Form des Resultats erhalten.

Es ist

$$H'(x) = \frac{2K}{\pi}\cdot\sqrt{k}.\cos\varphi.\Delta\varphi.\Theta(x)+\sqrt{k}.\sin\varphi.\Theta'(x),$$

$$H(x+\tfrac{1}{2}\pi) = \sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\cos\varphi.\Theta(x).$$

Dividirt man die letzte Gleichung in die erste und multiplicirt den Quotienten mit der Gleichung $\Theta(0).\Theta(\frac{1}{2}\pi) = \frac{2K}{\pi}\sqrt{k'}$, so erhält man

$$\Theta(0).\Theta(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H'(x)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2.k'.\varDelta\varphi + \frac{2k'K}{\pi}\cdot\operatorname{tang}\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)$$

und, nach x differentiirt:

$$42.\quad \Theta(0).\Theta(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\left\{\frac{H''(x)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)} - \frac{H'(x).H'(x+\frac{1}{2}\pi)}{H^2(x+\frac{1}{2}\pi)}\right\}$$
$$= \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\varDelta\varphi}{dx} + \frac{d\cdot\left\{\frac{2k'K}{\pi}\cdot\operatorname{tang}\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx}.$$

Setzt man in

$$\frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)} + \frac{\Theta''(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} - 2\cdot\frac{\Theta'(x).\Theta'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x).\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} = \frac{\Theta''(\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}\pi)} + \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}$$

$x-\frac{1}{2}(lq.\sqrt{-1})$ statt x, und berücksichtigt die Gleichung

$$\Theta(x-\tfrac{1}{2}lq.\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}.\sqrt[4]{q}.e^{x.\sqrt{-1}}.H(x),$$

so ergiebt sich

$$\frac{H''(x)}{H(x)} + \frac{H''(x+\frac{1}{2}\pi)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)} - 2\cdot\frac{H'(x).H'(x+\frac{1}{2}\pi)}{H(x).H(x+\frac{1}{2}\pi)} = \frac{\Theta''(\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}\pi)} + \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

und hieraus, nachdem man mit $\Theta(\frac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\frac{H(x)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)}$ multiplicirt hat:

$$2.\Theta(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\left\{\frac{H''(x)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)} - \frac{H'(x).H'(x+\frac{1}{2}\pi)}{H^2(x+\frac{1}{2}\pi)}\right\}$$
$$= \Theta(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\left\{\frac{H''(x)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)} - \frac{H''(x+\frac{1}{2}\pi).H(x)}{H^2(x+\frac{1}{2}\pi)}\right\}$$
$$+\{\Theta''(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)+\Theta''(0).\Theta(\tfrac{1}{2}\pi)\}\cdot\frac{H(x)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)}$$

oder

$$\Theta(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(0)\cdot\left\{\frac{H''(x)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)} - \frac{H'(x).H'(x+\frac{1}{2}\pi)}{H^2(x+\frac{1}{2}\pi)}\right\} = -2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2k'K}{\pi}\cdot\operatorname{tang}\varphi}{dq}.$$

Mittels dieser Formel geht (42.) in

$$43.\quad \frac{d\cdot\left\{\frac{2k'K}{\pi}\cdot\operatorname{tang}\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = -\frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\varDelta\varphi}{dx} - 2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2k'K}{\pi}\cdot\operatorname{tang}\varphi}{dq}$$

über. Man verändere x und q in $\frac{1}{2}\pi - x$ und $-q$, so gehen K, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\varDelta\varphi$, $\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)$ in $k'.K$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\frac{\varDelta\varphi}{k'}$, $-\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)$ über, und umgekehrt;

also ist

$$44.\quad \frac{d\cdot\left\{\frac{2K}{\pi}\cdot\operatorname{cotang}\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\Delta\varphi}{dx} - 2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\operatorname{cotang}\varphi}{dq}.$$

Endlich kann die zweite der Gleichungen (33.), indem man $x+\frac{1}{2}\pi$ statt x setzt, wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\Theta''(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}+\frac{H''(x+\frac{1}{2}\pi)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)}-2\cdot\frac{\Theta'(x+\frac{1}{2}\pi).H'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi).H(x+\frac{1}{2}\pi)} = \frac{H''(\frac{1}{2}\pi)}{H(\frac{1}{2}\pi)}+\frac{\Theta''(\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}\pi)};$$

welches, jenachdem man mit

$$\Theta(\tfrac{1}{2}\pi).H(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} \quad \text{oder} \quad \Theta(\tfrac{1}{2}\pi).H(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)}$$

multiplicirt, die Formen

$$45.\quad \begin{cases} \Theta(\frac{1}{2}\pi).H(\frac{1}{2}\pi)\cdot\left\{\frac{H''(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}-\frac{\Theta'(x+\frac{1}{2}\pi).H'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}\right\} = -2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}}{dq}, \\ \Theta(\frac{1}{2}\pi).H(\frac{1}{2}\pi)\cdot\left\{\frac{\Theta''(x+\frac{1}{2}\pi)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)}-\frac{\Theta'(x+\frac{1}{2}\pi).H'(x+\frac{1}{2}\pi)}{H^2(x+\frac{1}{2}\pi)}\right\} = -2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}}{dq} \end{cases}$$

annimmt. Aus den bekannten Formeln

$$H(x+\tfrac{1}{2}\pi)=\sqrt{\tfrac{k}{k'}}\cdot\cos\varphi.\Theta(x), \qquad H(x)=\sqrt{k}.\sin\varphi.\Theta(x),$$

$$\Theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)=\frac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\Delta\varphi.\Theta(x)$$

finden sich leicht die Quotienten:

$$H(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} = -\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi+\frac{2kK}{\pi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x),$$

$$H(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta'(x+\frac{1}{2}\pi)}{H(x+\frac{1}{2}\pi)} = -\frac{2kK}{\pi}\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi+\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x).$$

Differentiirt man jede dieser Gleichungen nach x, so wird mit Hülfe von (45.):

$$46.\quad \begin{cases} \frac{d\cdot\left\{\frac{2kK}{\pi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{d\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi}{dx} - 2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}}{dq}, \\ \frac{d\cdot\left\{\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = \frac{2kK}{\pi}\cdot\frac{d\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi}{dx} - 2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}}{dq}, \end{cases}$$

und vertauscht man hierin q und x mit $-q$ und $\frac{1}{2}\pi-x$, so erhält man

$$47.\ \begin{cases} \dfrac{d\cdot\left\{\dfrac{2kk'K}{\pi}\cdot\dfrac{\sin\varphi}{\varDelta\varphi}\cdot\dfrac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = -\dfrac{2k'K}{\pi}\cdot\dfrac{d\cdot\dfrac{2k\cdot K}{\pi}\cdot\cos\varphi}{dx} - 2q\cdot\dfrac{d\cdot\dfrac{2kk'K}{\pi}\cdot\dfrac{\sin\varphi}{\varDelta\varphi}}{dq}, \\[2ex] \dfrac{d\cdot\left\{\dfrac{2K}{\pi}\cdot\dfrac{\varDelta\varphi}{\sin\varphi}\cdot\dfrac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = \dfrac{2kK}{\pi}\cdot\dfrac{d\cdot\dfrac{2kK}{\pi}\cdot\cos\varphi}{dx} - 2q\cdot\dfrac{d\cdot\dfrac{2K}{\pi}\cdot\dfrac{\varDelta\varphi}{\sin\varphi}}{dq}. \end{cases}$$

9.

Die in den beiden letzten Paragraphen gemachten Entwicklungen lösen die Aufgabe:

„*$S\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)$ in Reihen nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x darzustellen.*"

Integrirt man nemlich die Gleichungen (35, 38, 39, 41, 43, 44, 46, 47) nach x und sucht die Constanten, so erhält man

$$\frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{1}{\varDelta\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = -2q\cdot\int^x \frac{d\cdot\dfrac{2k'K}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\varDelta\varphi}}{dq}\cdot dx,$$

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = -2q\cdot\int^x \frac{d\cdot\dfrac{2K}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sin\varphi}}{dq}\cdot dx,$$

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = -2q\cdot\int^x \frac{d\cdot\dfrac{2k'K}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\cos\varphi}}{dq}\cdot dx,$$

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\varDelta\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = -2q\cdot\int^x \frac{d\cdot\dfrac{2K}{\pi}\cdot\varDelta\varphi}{dx} - \frac{d\cdot\dfrac{2K}{\pi}\cdot\varDelta\varphi}{dx},$$

$$\frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = -2q\cdot\int^x \frac{d\cdot\dfrac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi}{dq}\cdot dx - \frac{d\cdot\dfrac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi}{dx},$$

$$\frac{2kK}{\pi}\cdot\cos\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = -2q\cdot\int^x \frac{d\cdot\dfrac{2kK}{\pi}\cdot\cos\varphi}{dq}\cdot dx - \frac{d\cdot\dfrac{2kK}{\pi}\cdot\cos\varphi}{dx},$$

$$\frac{2k'K}{\pi}\cdot\operatorname{tang}\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = -2q\cdot\int^x \frac{d\cdot\dfrac{2k'K}{\pi}\cdot\operatorname{tang}\varphi}{dq}\cdot dx - \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\varDelta\varphi + \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi},$$

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\operatorname{cotg}\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = -2q\cdot\int^x \frac{d\cdot\dfrac{2K}{\pi}\cdot\operatorname{cotg}\varphi}{dq}\cdot dx + \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\varDelta\varphi - \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi},$$

$$\frac{2kK}{\pi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\varDelta\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = -2q\cdot\int^x \frac{d\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\varDelta\varphi}}{dq}\cdot dx + \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi,$$

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\varDelta\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = -2q\cdot\int^x \frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\varDelta\varphi}{\cos\varphi}}{dq}\cdot dx + \frac{2kK}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\sin\varphi,$$

$$\frac{2kk'K}{\pi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\varDelta\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = -2q\cdot\int^x \frac{d\cdot\frac{2kk'K}{\pi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\varDelta\varphi}}{dq}\cdot dx - \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\cos\varphi,$$

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\varDelta\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = -2q\cdot\int^x \frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\varDelta\varphi}{\sin\varphi}}{dq}\cdot dx + \frac{2kK}{\pi}\cdot\frac{2kK}{\pi}\cdot\cos\varphi;$$

wo nach den „Fundam." zu setzen ist:

$$\frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{1}{\varDelta\varphi} = 1 - \frac{4q}{1+q^2}\cdot\cos 2x + \frac{4q^2}{1+q^4}\cdot\cos 4x - \frac{4q^3}{1+q^6}\cdot\cos 6x \pm \ldots,$$

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin x} + \frac{4q}{1-q}\cdot\sin x + \frac{4q^3}{1-q^3}\cdot\sin 3x + \frac{4q^5}{1-q^5}\cdot\sin 5x + \ldots,$$

$$\frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos x} - \frac{4q}{1+q}\cdot\cos x + \frac{4q^3}{1-q^3}\cdot\cos 3x - \frac{4q^5}{1+q^5}\cdot\cos 5x \pm \ldots,$$

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\varDelta\varphi = 1 + \frac{4q}{1+q^2}\cdot\cos 2x + \frac{4q^2}{1+q^4}\cdot\cos 4x + \frac{4q^3}{1+q^6}\cdot\cos 6x + \ldots,$$

$$\frac{2kK}{\pi}\cdot\sin\varphi = \frac{4\sqrt{q}}{1-q}\cdot\sin x + \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3}\cdot\sin 3x + \frac{4\sqrt{q^5}}{1-q^5}\cdot\sin 5x + \ldots,$$

$$\frac{2kK}{\pi}\cdot\cos\varphi = \frac{4\sqrt{q}}{1+q}\cdot\cos x + \frac{4\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cdot\cos 3x + \frac{4\sqrt{q^5}}{1+q^5}\cdot\cos 5x + \ldots,$$

$$\frac{2k'K}{\pi}\cdot\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} x - \frac{4q^2}{1+q^2}\cdot\sin 2x + \frac{4q^4}{1+q^4}\cdot\sin 4x - \frac{4q^6}{1+q^6}\cdot\sin 6x \pm \ldots,$$

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg} x - \frac{4q^2}{1+q^2}\cdot\sin 2x - \frac{4q^4}{1+q^4}\cdot\sin 4x - \frac{4q^6}{1+q^6}\cdot\sin 6x - \ldots,$$

$$\frac{2kK}{\pi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{4\sqrt{q}}{1-q}\cdot\cos x - \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3}\cdot\cos 3x + \frac{4\sqrt{q^5}}{1-q^5}\cdot\cos x - \frac{4\sqrt{q^7}}{1-q^7}\cdot\cos 7x \pm \ldots,$$

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\varDelta\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} + \frac{4q}{1-q}\cdot\cos x - \frac{4q^3}{1-q^3}\cdot\cos 3x + \frac{4q^5}{1-q^5}\cdot\cos x - \frac{4q^7}{1-q^7}\cdot\cos 7x \pm \ldots,$$

$$\frac{2kk'K}{\pi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{4\sqrt{q}}{1+q}\cdot\sin x - \frac{4\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cdot\sin 3x + \frac{4\sqrt{q^5}}{1+q^5}\cdot\sin 5x - \frac{4\sqrt{q^7}}{1+q^7}\cdot\sin 7x \pm \ldots,$$

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\varDelta\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin x} - \frac{4q}{1+q}\cdot\sin x - \frac{4q^3}{1+q^3}\cdot\sin 3x - \frac{4q^5}{1+q^5}\cdot\sin 5x - \frac{4q^7}{1+q^7}\cdot\sin 7x - \ldots,$$

10.

Schliefslich möge noch die Entwicklung von $S^2 \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$ folgen, von welcher im Vorigen schon bemerkt ist, dafs sie wesentlich auf $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cdot Z^2(x)$ führt. Für den letztern Ausdruck hat Herr Prof. *Jacobi* zwei Lösungen, eine davon in den „Fundam." gegeben, und es scheint, dafs $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cdot Z^2(x)$ darin seine gröfste Bedeutung hat, dafs es auf die Entwicklung von $S^2 \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$ hinleitet.

Differentiirt man die Gleichung

$$\int_0^x \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \cdot \sin^2\varphi \, dx = \left\{\left(\frac{2K}{\pi}\right) - \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{2E'}{\pi}\right\} x - \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$$

nach x und multiplicirt sie mit $\frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$, so wird

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \sin^2\varphi \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x) = \left\{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{2E'}{\pi}\right\} \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x) - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d \cdot \left\{\frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)\right\}^2}{dx},$$

und mit Hülfe der früher abgeleiteten Formel

$$\frac{d \cdot \left\{\frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)\right\}^2}{dx} = -4q \cdot \frac{d \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dq} - \frac{d^2 \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dx^2}$$

folgt

48.

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$$

$$= \left\{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{2E'}{\pi}\right\} \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x) + 2q \cdot \frac{d \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dq} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dx^2},$$

und hieraus

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$$

$$= -\left\{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{2E'}{\pi}\right\} \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x) - 2q \cdot \frac{d \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dq} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dx^2},$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cdot \Delta^2\varphi \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$$

$$= \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{2E'}{\pi} \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x) - 2q \cdot \frac{d \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dq} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)}{dx^2};$$

wo offenbar $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{2E'}{\pi} = \frac{2K}{\pi} \cdot Z'(0)$ ist.

Differentiirt man die erste dieser Gleichungen (48.) nach x, so wird:

$$\frac{d\cdot\left\{\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = \frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)\cdot\left\{\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)-\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2\cdot\sin^2\varphi\right\},$$

$$+2q\cdot\frac{d\cdot\left\{\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)-\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2\cdot\sin^2\varphi\right\}}{dq}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^2\cdot\left\{\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)-\frac{2kK}{\pi}\cdot\sin^2\varphi\right\}}{dx^2}.$$

Hierin werde $\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2.\sin^2\varphi$ und $\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)$ durch die identischen Ausdrücke $H^2(\frac{1}{2}\pi).\Theta^2(\frac{1}{2}\pi).\frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}$ und $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ ersetzt, so erhält man:

$$\frac{d\cdot H^2(\frac{1}{2}\pi).\Theta^2(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H^2(x).\Theta'(x)}{\Theta^3(x)}}{dx}$$

$$= \left\{\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)\right\}^2+2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)}{dq}-\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0).H^2(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}$$

$$-2q\cdot\frac{d\cdot H^2(\frac{1}{2}\pi).\Theta^2(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}}{dq}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^2.H^2(\frac{1}{2}\pi).\Theta^2(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}}{dx^2}.$$

Das letzte Glied rechts in dieser Gleichung (die eine Differentiation darin ausgeführt) geht in

$$-\frac{d.\left\{H^2(\frac{1}{2}\pi).\Theta^2(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H(x).H'(x)}{\Theta^2(x)}-H^2(\frac{1}{2}\pi).\Theta^2(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H^2(x).\Theta'(x)}{\Theta^3(x)}\right\}}{dx}$$

über, und man erhält:

$$\frac{d\cdot H^2(\frac{1}{2}\pi).\Theta^2(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H(x).H'(x)}{\Theta^2(x)}}{dx} = \left\{\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)\right\}^2+2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)}{dq}$$

$$-\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0).H^2(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}-2q\cdot\frac{d\cdot H^2(\frac{1}{2}\pi).\Theta^2(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}}{dq}.$$

Man bringe die Differentiation nach q auf die nach x und setze dann $x-\frac{1}{2}lq.\sqrt{-1}$ statt x, so erhält man durch Anwendung der Formeln

$$\Theta(x-\tfrac{1}{2}lq.\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}.q^{-\frac{1}{4}}.e^{-x.\sqrt{-1}}.H(x),$$

$$H(x-\tfrac{1}{2}lq.\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}.q^{-\frac{1}{4}}.e^{-x.\sqrt{-1}}.\Theta(x),$$

aus obiger Gleichung folgende:

$$\frac{d.H^2(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta(x).\Theta'(x)}{H^2(x)}}{dx} = \left\{\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)\right\}^2 + 2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)}{dq}$$

$$-\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0).H^2(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta^2(x)}{H^2(x)} + H^2(\tfrac{1}{2}\pi).\Theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta(x)}{H(x)}\cdot\left\{\frac{\Theta''(x)}{H(x)} - \frac{H''(x).\Theta(x)}{H^2(x)}\right\}.$$

Hierin für den zweiten Differentialquotienten nach x den ersten nach q eingeführt, giebt nach einigen Umformungen:

$$\frac{d\cdot\left\{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)\right\}}{dx} = \frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0) + 2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)}{dq}$$

$$-\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)\cdot\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi} - 2q\cdot\frac{d\cdot\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}}{dq},$$

und endlich, auf beiden Seiten mit dx multiplicirt und für x zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ integrirt, ergiebt sich

$$49.\quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x) = (x-\tfrac{1}{2}\pi)\left\{\left(\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)\right)^2 + 2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)}{dq}\right\}$$

$$-\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)\cdot\int_{\frac{1}{2}\pi}^{x}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}\cdot dx - 2q\cdot\int_{\frac{1}{2}\pi}^{x}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}\cdot dx.$$

Setzt man hierin nach „Fundam." §. 42. gleichzeitig $-q$ und $\frac{1}{2}\pi - x$ statt q und x, so geht K in $k'.K$, E' in $\frac{E'}{k'}$, $\sin\varphi$ in $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$ in $k'.\Delta\varphi$ und $\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)$ in $-\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)$ über und man erhält:

$$50.\quad \left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)$$

$$= x\cdot\left\{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}\right\} + 2q\cdot\frac{d\cdot\left\{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}\right\}}{dq}$$

$$-\left\{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}\right\}^2\cdot\int_0^x\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot dx - 2q\cdot\int_0^x\frac{d\cdot\frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}}{dq}\cdot dx.$$

Die letzte der Gleichungen (48.), nemlich

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2.\Delta^2\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)$$

$$=\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)-2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)}{dq}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^2\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)}{dx^2}$$

werde nach x differentiirt und rechts $\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)}{dx}$ durch $\Delta^2\varphi$ ausgedrückt, so bekommt sie die Form:

$$\frac{d.\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\Delta^2\varphi\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)}{dx}=\left(\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}\right)^2-2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}}{dq}+\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\Delta^2\varphi$$

$$-2q\cdot\frac{d\cdot\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\Delta^2\varphi}{dq}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^2\cdot\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\Delta^2\varphi}{dx^2}.$$

Nun ist

$$\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)=\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},\quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2.\Delta^2\varphi=\Theta^2(0).\Theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta^2(x)}.$$

Dieses substituirt, giebt:

$$\frac{d.\Theta^2(0).\Theta^2(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta^2(x+\frac{1}{2}\pi).\Theta'(x)}{\Theta^3(x)}}{dx}$$

$$=\left(\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}\right)^2-2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}}{dq}+\Theta^2(0).\Theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta^2(x)}$$

$$-2q\cdot\frac{d.\Theta^2(0)\cdot\Theta^2(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta^2(x)}}{dq}$$

$$-\frac{d.\Theta^2(0).\Theta^2(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)}.\left\{\frac{\Theta'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)}-\frac{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi).\Theta'(x)}{\Theta^2(x)}\right\}}{dx},$$

oder, vereinfacht:

$$\frac{d\cdot\Theta^2(0).\Theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi).\Theta'(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta^2(x)}}{dx}$$

$$=\left(\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}\right)^2-2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}}{dq}$$

$$+\Theta^2(0).\Theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta^2(x)}-2q\cdot\frac{d.\Theta^2(0).\Theta^2(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta^2(x)}}{dq}.$$

Hierin $x+\frac{1}{2}\pi$ statt x geschrieben, giebt nach Einführung von $\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)$ und $\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\varDelta^2\varphi}$ statt $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ und $\Theta^2(0).\Theta^2(\frac{1}{2}\pi)\cdot\frac{\Theta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta^2(x)}$:

$$51.\quad \frac{d\cdot\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\varDelta^2\varphi}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot Z(x)}{dx}$$

$$=\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}-2q\cdot\frac{d\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}}{dq}+\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\varDelta^2\varphi}-2q\cdot\frac{d\cdot\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\varDelta^2\varphi}}{dq}.$$

Die Formeln (49—51.) sind in Formen hingeschrieben, die denen im 9ten Paragraphen ähnlich sind; und dadurch treten Glieder hinzu, die sich gegenseitig aufheben, wenn man eine andere Bezeichnung einführt.

Das 41te Capitel der „Fund." enthält die Entwicklung

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{2K}{\pi}\cdot Z'(0)+\frac{1}{\sin^2 x}-M(x),$$

$$\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}=\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}+\frac{1}{\cos^2 x}+N(x),$$

$$\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{\varDelta^2\varphi}=\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}-O(x);$$

wo

$$M(x)=8\left\{\frac{q^2}{1-q^2}\cdot\cos 2x+\frac{2q^4}{1-q^4}\cdot\cos 4x+\frac{3q^6}{1-q^6}\cdot\cos 6x+\ldots\right\},$$

$$N(x)=8\left\{\frac{q^2}{1-q^2}\cdot\cos x-\frac{2q^4}{1-q^4}\cdot\cos 4x+\frac{3q^6}{1-q^6}\cdot\cos 6x\mp\ldots\right\},$$

$$O(x)=8\left\{\frac{q}{1-q^2}\cdot\cos x-\frac{2q^2}{1-q^4}\cdot\cos 4x+\frac{3q^3}{1-q^6}\cdot\cos 6x\mp\ldots\right\}$$

ist. Hierdurch gehen die Gleichungen (49 — 51.) über in:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2\varphi} \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$$

$$= \frac{2K}{\pi} \cdot Z'(0) \cdot \int^x M(x)\,dx + 2q \cdot \int^x \frac{d.M(x)}{dq} \cdot dx + \frac{2K}{\pi} \cdot Z'(0).\operatorname{cotg} x,$$

$$\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$$

$$= \left\{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{2E'}{\pi}\right\} \int^x N(x)\,dx - 2q \cdot \int^x \frac{dN(x)}{dq} \cdot dx + \left\{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{2E'}{\pi}\right\} \operatorname{tg} x,$$

$$\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\Delta^2\varphi} \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot Z(x)$$

$$= -\frac{2K}{\pi} \cdot \frac{2E'}{\pi} \int^x O(x)\,dx + 2q \cdot \int^x \frac{d.O(x)}{dq} \cdot dx.$$

Königsberg im März 1847.

15.

Über die Gesetze der Biegung elastischer fester Körper.

(Von Herrn *v. Heim*, Major in der Königl. Würtembergischen Artillerie.)

---

§. 1.

Es ist eine bekannte Erfahrung, dafs es biegsame elastische feste Körper giebt, welche einer an ihrer Längen-Axe angebrachten biegenden Kraft nicht ohne Unterschied der Richtung, nach welcher sie wirken mag, so nachgeben, dafs die gekrümmte Längen-Axe des Körpers mit der Richtungslinie der Kraft in eine Ebene fällt, sondern dafs sehr häufig diese, wenn auch ursprünglich gerade Längen-Axe, je nach der Gestalt der Querschnitte des Körpers und nach der Richtung der biegenden Kraft eine doppelte Krümmung annimmt, welche von der Ebene, in der die Krümmung, jener Richtung gemäfs, erfolgen sollte, mehr oder weniger abweicht. Da man in den bekannteren wissenschaftlichen Abhandlungen über die Biegung der elastischen festen Körper, wenn darin auch von doppelter, durch die Biegung entstehender Krümmung die Rede ist, über die Ursachen und Bedingungen dieser Erscheinung vergebens Aufklärung sucht, so mufs angenommen werden, dafs die Gesetze der Biegung einer noch näheren Entwicklung und Darstellung, als die in jenen Abhandlungen enthalten ist, bedürfen.

Einen Beitrag zur Lehre von der Biegung fester Körper, in besonderer Beziehung auf die erwähnte Erscheinung zu geben, ist der Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes.

§. 2.

Eine ebene Figur mag wie immer begrenzt sein, so lassen sich durch jeden Punct der Figur, in deren Ebene zwei unter rechten Winkeln sich schneidende Coordinaten-Axen von der Beschaffenheit legen, dafs, wenn ∂i das Flächen-Element, dessen Coordinaten u und t sind, bedeutet, das den ganzen Inhalt der Figur umfassende Integral $\int ut\,\partial i$ gleich Null wird.

Der Beweis dieses Satzes ist folgender. Stellt man sich, in der Ebene der Figur, durch denselben Punct, in welchem die Axen der u und t sich schneiden sollen, ein anderes Paar rechtwinkeliger Axen von bestimmter Lage

gehend vor, dessen Coordinaten mit y und x bezeichnet werden, und nennt man β den Winkel, den die Axe der x mit der Axe der t, so wie die Axe der y mit der Axe der u nach ihren positiven Richtungen einschliefsen, so hat man für irgend einen Punct der Figur:

$$u = y\cos\beta - x\sin\beta, \qquad t = y\sin\beta + x\cos\beta,$$
$$ut\,\partial i = yx\,\partial i(\cos\beta^2 - \sin\beta^2) - (x^2 - y^2)\sin\beta\cos\beta$$

und, indem man $\partial i = \partial u\,\partial t = \partial y\,\partial x$ setzt und die Integration auf den ganzen Inhalt der Figur erstreckt,

$$\int ut\,\partial i = \int yx\,\partial i(\cos\beta^2 - \sin\beta^2) - \left(\int x^2\,\partial i - \int y^2\,\partial i\right)\sin\beta\cos\beta.$$

Da aus der Gestalt der Figur und der Lage der Axen der y und x bekannt ist, wie die diesen Axen zugehörigen Coordinaten der Grenzpuncte der Figur von einander abhangen, so sind die Integrale $\int yx\,\partial i$, $\int x^2\,\partial i$ und $\int y^2\,\partial i$ als gegebene Gröfsen zu betrachten. Setzt man $\int yx\,\partial i = A$, $\int x^2\,\partial i - \int y^2\,\partial i = B$, und löset die Gleichung $\int ut\,\partial i = 0$ nach dem Winkel β auf, so findet sich

$$\sin\beta = \pm\sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(1 \mp \frac{B}{\sqrt{(4A^2+B^2)}}\right)\right]}.$$

Werden die vier diesem Ausdrucke entsprechenden Winkel nach ihrer Gröfse geordnet, so ist (B mag übrigens positiv oder negativ sein) jeder derselben um 90° von dem nächsten verschieden; woraus erhellet, dafs sie die Lage eines einzigen Paares rechtwinkeliger Axen bestimmen. Zugleich ist ersichtlich, dafs der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen weder negativ noch gröfser als 1 werden kann, und dafs also diese vier Werthe des Winkels β immer möglich sind. Mithin läfst sich für jeden Punct irgend einer ebenen Figur die Lage eines durch ihn gehenden Paares von Axen finden, welche die Eigenschaft haben, dafs sie, als Axen der u und t genommen, das Integral $\int ut\,\partial i$ gleich Null machen. Was zu erweisen war.

§. 3.

Es ist erwiesen, dafs durch jeden Punct eines geometrischen Körpers drei unter sich rechtwinkelige Axen gelegt werden können, welche, als Axen der Coordinaten x, y und z genommen, die auf den ganzen Inhalt des Körpers ausgedehnten Integrale $\int xy\,\partial m$, $\int xz\,\partial m$ und $\int yz\,\partial m$ (wo ∂m das diesen Coordinaten entsprechende Element der körperlichen Masse bedeutet) gleich Null machen. Man hat diese Axen, welche in der Lehre von der Um-

drehungsbewegung fester Körper eine wichtige Rolle spielen und welche in einer Schrift *Segners* vom Jahr 1755: „Specimen theoriae turbinum," *) zuerst erwähnt werden, *Haupt-Axen* genannt; und da sie den Axen, von denen der vorige Paragraph handelt, in mehrfacher Beziehung analog sind, so wird auch diesen hier dieselbe Benennung beigelegt werden.

In Betreff der letztern Axen bieten sich zunächst noch folgende Bemerkungen dar.

Wenn A, aber nicht B, $= 0$ ist, so erhält $\sin\beta$ die Werthe 0 und ± 1, und die Axen der y und x sind selbst Haupt-Axen.

Verschwinden A und B zugleich, so werden die Werthe von β unbestimmt und $\int ut\,\partial i$ wird für jeden Werth von β gleich Null, und irgend zwei, in beliebiger Richtung durch den Durchschnittspunct der Axen der y und x gelegte rechtwinkelige Axen sind Haupt-Axen.

Es erhellet überhaupt aus dem Ausdrucke für $\sin\beta$, dafs durch einen bestimmten Punct einer ebenen Figur entweder nur ein Paar, oder unendlich viele Paare Haupt-Axen gelegt werden können. Lassen sich daher auch nur zwei verschiedene Paare solcher Axen angeben, welche durch einen Punct gehen, so mufs der letztere Fall Statt finden, und es folgt hieraus, dafs aufser dem Kreise, unter anderen Figuren auch die regelmäfsigen Vielecke die Eigenschaft besitzen, dafs alle in beliebiger Richtung durch deren Mittelpuncte gelegten Axen Haupt-Axen sind.

§. 4.

Die Integrale $\int y^2\,\partial i$ und $\int x^2\,\partial i$ sind die Trägheits- oder Drehungs-Momente der Fläche der ebenen Figur in Bezug auf die Axen der x und y.

Für die Drehungs-Momente in Bezug auf irgend zwei andere Axen der t und u, welche mit den Axen der x und y wie in §. 2. einen Winkel β bilden, findet man, weil

$$u = y\cos\beta - x\sin\beta, \qquad t = y\sin\beta + x\cos\beta \text{ ist:}$$

$$\int u^2\,\partial i = \int y^2\,\partial i\cos\beta^2 + \int x^2\,\partial i\sin\beta^2 - 2\int yx\,\partial i\cos\beta\sin\beta,$$

$$\int t^2\,\partial i = \int y^2\,\partial i\sin\beta^2 + \int x^2\,\partial i\cos\beta^2 + 2\int yx\,\partial i\cos\beta\sin\beta.$$

Sucht man denjenigen Werth von β, welcher das eine oder das andere dieser beiden Integrale zum Maximum oder Minimum macht, so findet man denselben Ausdruck für $\sin\beta$, wie aus der Gleichung $\int ut\,\partial i = 0$, und

*) *Bossut*, Versuch einer allgemeinen Geschichte der Mathematik.

der erste Werth von $\sin\beta$, nämlich $+\sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{B}{\sqrt{(4A^2+B^2)}}\right)\right]}$, giebt, wenn B positiv oder $\int x^2\partial i$ gröfser als $\int y^2\partial i$ ist:

$$\int u^2\partial i = \tfrac{1}{2}\left(\int y^2\partial i+\int x^2\partial i-\sqrt{(4A^2+B^2)}\right),$$
$$\int t^2\partial i = \tfrac{1}{2}\left(\int y^2\partial i+\int x^2\partial i+\sqrt{(4A^2+B^2)}\right);$$

und zwar ist der Ausdruck für $\int u^2\partial i$ ein Minimum, der für $\int t^2\partial i$ ein Maximum in Beziehung auf β; woraus folgt, dafs unter allen rechtwinkligen Axenpaaren, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten y und x gelegt werden können, die Haupt-Axen diejenigen sind, in Bezug auf welche die Drehungsmomente den gröfsten und kleinsten Werth haben.

Sind die Axen der x und y selbst die Haupt-Axen, oder ist $A = \int yx\partial i = 0$, so wird das Minimum $=\int y^2\partial i$, das Maximum $=\int x^2\partial i$, und für irgend einen Werth von β:

$$\int u^2\partial i = \int y^2\partial i+\left(\int x^2\partial i-\int y^2\partial i\right)\sin\beta^2,$$
$$\int t^2\partial i = \int x^2\partial i+\left(\int x^2\partial i-\int y^2\partial i\right)\sin\beta^2.$$

Diese beiden Integrale werden einander gleich und $=\tfrac{1}{2}\left(\int y^2\partial i+\int x^2\partial i\right)$ für $\beta = 45^\circ$; und hat β einen andern Werth, so ist jedes derselben das gröfsere, oder das kleinere, je nachdem die Axe, in Bezug auf welche es genommen ist, der Axe der y, oder der Axe der x näher liegt. Ist zugleich $\int y^2\partial i=\int x^2\partial i$, so werden auch $\int u^2\partial i$ und $\int t^2\partial i=\int y^2\partial i=\int x^2\partial i$, für jeden Werth von β; woraus erhellet, dafs, wenn sämmtliche durch einen Punct gehende Axen Haupt-Axen sind, auch die Drehungs-Momente in Bezug auf alle diese Axen einander gleich sind; und umgekehrt.

§. 5.

Es seien die Axen der y und x immer die Haupt-Axen, welche durch deren Anfangspunct gehen, und dieser Punct sei der Schwerpunct der Figur, aber $\int x^2\partial i$ sei gröfser als $\int y^2\partial i$, und J der Flächen-Inhalt der Figur. Man lege durch einen Punct, dessen Coordinaten b und a sind, zwei andere Axen mit jenen beiden Axen parallel, so mufs, damit auch diese andern Axen, in Bezug auf welche die Coordinaten eines Elements ∂i die Werthe $y-b$ und $x-a$ haben, Haupt-Axen seien,

$$\int(y-b)(x-a)\partial i = 0,$$

oder

$$\int yx\,\partial i - a\int y\,\partial i - b\int x\,\partial i + ab.J = 0,$$

d. h. weil der Voraussetzung nach $\int yx\,\partial i$, und wegen des Schwerpuncts auch $\int y\,\partial i$ und $\int x\,\partial i = 0$ sind, a oder b gleich Null sein.

Man nehme a gleich Null an, oder setze den Durchschnittspunct der neuen Axen (im Abstande b vom Schwerpunct) in die Axe der y, so fällt die eine neue Axe mit der letztern zusammen und das Drehungs-Moment in Bezug auf dieselbe ist $\int x^2\,\partial i$, in Bezug auf die andere Axe aber $=\int (y-b)^2\,\partial i$ oder $=\int y^2\,\partial i - 2b\int y\,\partial i + b^2.J$, d. h. $=\int y^2\,\partial i + b^2.J$.

Sollen nun diese beiden Drehungs-Momente einander gleich sein, so erhält man

$$\int x^2\,\partial i = \int y^2\,\partial i + b^2.J,$$

woraus $b = \pm\frac{\sqrt{(\int x^2\partial i - \int y^2\partial i)}}{J}$ hervorgeht.

Es folgt hieraus, dafs wenn man durch einen Punct, welcher in derjenigen der beiden durch den Schwerpunct gehenden Haupt-Axen, in Bezug auf welche das Drehungs-Moment das gröfsere ist, in dem Abstande $b = \frac{\sqrt{(\int x^2\partial i - \int y^2\partial i)}}{J}$ auf der einen oder der andern Seite vom Schwerpunct liegt, zwei Axen mit den letztern Axen parallel legt, diese gleichfalls Haupt-Axen sind, in Bezug auf welche die Drehungs-Momente gleich grofs sind; oder dafs alle in diesem Punct sich schneidenden geraden Linien die Eigenschaft der Haupt-Axen besitzen. Daraus ergiebt sich ferner, dafs, wenn nicht selbst der Schwerpunct einer ebenen Figur so beschaffen ist, dafs alle durch ihn gehenden Axen Haupt-Axen sind, zwei solche Puncte auf entgegengesetzten Seiten des Schwerpuncts sich befinden, welche jedoch nicht nothwendig innerhalb der Figur selbst liegen müssen.

Hätte man b statt a gleich Null gesetzt, so wären für a die unmöglichen Werthe $\pm\frac{\sqrt{(\int y^2\partial i - \int x^2\partial i)}}{J}$ gefunden worden.

Ist die Figur z. B. ein Rechteck, so erhält man, indem man die Axe der x mit der gröfsern Seite h, die Axe der y mit der kleineren Seite g parallel, durch den Schwerpunct legt, $\int yx\,\partial i = 0$, und $\int x^2\,\partial i = \frac{1}{12}h^3g$, $\int y^2\,\partial i = \frac{1}{12}hg^3$, $J = hg$; daher $b = \pm\sqrt{(\frac{1}{12}(h^2-g^2))}$.

Bei der Untersuchung der Biegung fester Körper kommen hauptsächlich die Haupt-Axen, welche den Schwerpuncten ebener Figuren zugehören, in Betracht.

§. 6.

Die folgenden Erörterungen werden sich zunächst nur auf elastische feste Körper mit (ursprünglich) gerader Längen-Axe (Centrallinie) beziehen.

Man stelle sich den Körper durch Schnitte, senkrecht auf die Längen-Axe, in Schichten von unendlich kleiner Dicke getheilt, und jede Schicht aus gleichartigen, mit der Längen-Axe gleichlaufenden Fibern bestehend vor; so dafs die Schwerpuncte sämmtlicher Schnitte in diese Linie fallen.

Man nehme ferner an, jeder Schnitt bestehe, vor und nach der Biegung, aus denselben Elementen, welche ihre gegenseitige Lage unverändert beibehalten.

Ist der Körper nach beendigter Biegung zur Ruhe gekommen, so mufs an jedem Normalschnitt zwischen den auf ihn wirkenden äufsern Kräften und der Cohäsionskraft oder Spannkraft der Fibern Gleichgewicht Statt finden; und dieses kann nur durch gewisse, nach verschiedenen Richtungen erfolgte, räumliche Veränderungen der Fibern des Körpers bestehen, welche zusammen das, was man die Biegung nennt, ausmachen.

Um den Zustand, in welchem der gebogene Körper sich befindet, zu bestimmen, ist zunächst erforderlich, die Gestalt der krummen Linie, in welche die Längen-Axe desselben bei der Biegung übergeht, kennen zu lernen.

Zum Behuf der hierauf Bezug habenden Untersuchungen hat man jede der auf einen Normalschnitt einwirkenden Kräfte in Theilkräfte zerfället sich vorzustellen, deren Richtung entweder winkelrecht auf der Ebene des Schnitts steht, oder in diese Ebene selbst fällt, und kann dabei den Satz zu Hülfe nehmen, dafs jede Kraft p gleichgeltend ist mit drei andern, mit ihr in einer Ebene liegenden, wovon die eine ihr gleich und parallel ist, die beiden andern aber einander gleich und entgegengesetzt sind, und die das Product der Kraft p in ihren Abstand von der Richtung der ihr gleichlaufenden Theilkraft zum gemeinschaftlichen Moment haben, in Bezug auf irgend einen in der Ebene liegenden Punct.

Wird die Zerfällung irgend einer der auf einen bestimmten Normalschnitt wirkenden Kräfte so bewerkstelligt, dafs die ihr gleiche und gleichlaufende Kraft durch den Schwerpunct des Normalschnitts geht, so erhält man für dieselbe im Allgemeinen folgende Theilkräfte:

a) Eben diese durch den Schwerpunct des Normalschnitts gehende, der zu zerfällenden Kraft p gleiche und parallele Kraft; und indem man diese wieder zerlegt,

 α) Eine Theilkraft, deren Richtung auf der Ebene des Normalschnitts winkelrecht steht oder mit der geraden Linie zusammenfällt, welche die aus der Längen-Axe des Körpers entstandene krumme Linie am Normalschnitt berührt;

 β) Eine Theilkraft, deren Richtung in die Ebene des Normalschnitts fällt.

b) Ein Paar gleicher und entgegengesetzter Theilkräfte, deren Richtungen in der durch den Schwerpunct des Normalschnitts und die Richtungslinie der zu zerfällenden Kraft p gehenden Ebene liegen; welche Kräfte sich weiter zerlegen lassen, in

 α) Ein Paar gleicher und entgegengesetzter Kräfte, deren Richtungen senkrecht auf der Ebene des Normalschnitts stehen;

 β) Ein solches Kräftepaar, dessen Richtung in die Ebene des Normalschnitts fällt.

Der Kürze wegen sollen diese aus der Zerfällung der Kraft p hervorgehenden Theilkräfte durch p_a, p_{a_α}, p_{a_β}, p_b, p_{b_α}, p_{b_β} bezeichnet werden.

Sind sämmtliche Kräfte p, deren Einwirkung der Normalschnitt unterworfen ist, auf solche Art zerfället, so lassen sich alle jene Theilkräfte, welche zu einer und derselben Gattung p_a, p_{a_α} oder p_{a_β} gehören, da ihre Richtungen sämmtlich durch einen Punct gehen, wieder zu einer einzigen Kraft zusammensetzen; und zwar ist die Resultirende der Theilkraft p_a dieselbe, wie wenn alle Kräfte p unmittelbar am Schwerpunct des Normalschnitts angebracht wären. Und eben so lassen sich die zu jeder Gattung der Kräftepaare p_{b_α} und p_{b_β} gehörigen Theilkräfte zu einem einzigen Kräftepaar vereinigen.

§. 7.

Die Wirkung, welche jede dieser Gattungen von Theilkräften auf den Normalschnitt und die Fibernttheile der Schicht, zu der er gehört, hervorbringt, mufs eine besondere sein.

1. Durch die Theilkräfte p_{a_α} werden, da sie in winkelrechter Richtung auf der Ebene des Normalschnitts durch dessen Schwerpunct gehen und die Schicht durchaus gleiche Dicke hat, sämmtliche Fibern der letztern gleichmäfsig, je nach der Richtung der algebraischen Summe der Kräfte, entweder ausgedehnt oder zusammengedrückt, und somit das in der Schicht liegende

Element der Centrallinie entweder verlängert oder verkürzt. Ihr Einflufs auf die Biegung des Körpers ist in den meisten Fällen von geringer Bedeutung; erheblicher dagegen der auf die Länge und den Zustand der Spannung des Körpers.

2. Die durch die Theilkräfte p_{a_β} erzeugte Veränderung mufs, da sie gleichfalls durch den Schwerpunct des Normalschnitts gehen, in einer Verschiebung des ganzen Schnitts nach der Richtung der Summe der Theilkräfte bestehen, durch welche die Fibern der Schicht eine, wenn auch nur sehr geringe, schiefe Stellung gegen den Normalschnitt annehmen. Ihre Wirkung kann, als geringfügig, entweder aufser Acht gelassen, oder erst am Ende der übrigen Rechnung durch eine Correction berücksichtigt werden.

3. Die Kräftepaare p_{b_α} sind es hauptsächlich, durch welche die Krümmung der Centrallinie und die Biegung des Körpers entstehen. Der durch sie bewirkte Erfolg kann kein anderer sein, als eine Drehung des Normalschnitts um eine in ihm liegende gerade Linie; wobei die durch diese Linie begrenzten Fibertheile unverändert bleiben und die Fibern auf der einen Seite derselben Linie, je nach der Richtung des Kräftepaares, ausgedehnt, auf der andern Seite zusammengedrückt werden. Da die durch die Drehung verursachte Abweichung der Fibern von der auf der Ebene des Normalschnitts senkrechten Stellung jedenfalls nur unendlich klein ist, so darf man die durch die Drehung erzeugten Spannungen der Fibern als parallele Kräfte betrachten. Diese Spannungen bilden sonach mit der Resultirenden der Kräftepaare ein System von parallelen, auf der Ebene des Normalschnitts senkrechten Kräften, welche unter sich im Gleichgewicht sein müssen; und die Bedingungen dieses Gleichgewichts liefern die Hauptgleichungen für die Biegung des Körpers; wie es im folgenden Paragraphen näher wird gezeigt werden.

4. Die Kräftepaare p_{b_β} können nur eine Drehung des Normalschnitts um einen in ihm liegenden Punct, und dadurch eine Torsion der Fibern, d. h. eine im Verhältnifs ihres Abstandes von diesem Puncte stehende seitliche Ablenkung der Fibern von ihrer auf der Ebene des Normalschnitts senkrechten Stellung hervorbringen. Die durch diese Veränderungen erzeugten Spannungen der Fibern können ebenfalls als Kräfte, welche in der Ebene des Normalschnitts liegen, betrachtet werden; so dafs man ein System von Kräften hat, deren Richtungen sich in einer Ebene befinden. Die Bedingungen ihres Gleichgewichts geben weitere Gleichungen zur Bestimmung des Zustandes des gebogenen Körpers.

§. 8.

Um die Gleichungen des Gleichgewichts zwischen den im vorigen Paragraphen unter (3) angeführten parallelen Kräften darzustellen, sei ε die eigenthümliche Spannkraft des Körpers, d. h. die Kraft, welche die Länge eines aus der Materie des Körpers bestehenden Prismas, das die Einheit des Flächenmaafses zur Grundfläche hat, durch Ausdehnung zu verdoppeln fähig sein würde, wenn die Vermehrung der Länge der sie bewirkenden Kraft stets proportional wäre. Man setze voraus, dafs die Spannkraft des Körpers gegen die Ausdehnung und Zusammendrückung gleich grofs sei; man nehme die Durchschnittslinie des Normalschnitts mit der Ebene, in welcher das aus den Kräften p_{b_a} resultirende Kräftepaar sich befindet, als Axe der u, die im Schwerpunct des Normalschnitts darauf senkrechte Linie als Axe der t an, und setze, eine mit dieser parallele, im Abstande k von ihr auf der positiven Seite der u liegende Linie sei die Axe, um welche der Normalschnitt sich dreht (die *Biegungs-Axe* des Normalschnitts); es sei ferner m die Zahl, welche zu 1 sich verhält, wie die Verlängerung oder Verkürzung der um die Längen-Einheit von der Biegungs-Axe entfernten Fibernthеile zu ihrer anfänglichen Länge.

Die Kraft der Spannung, mit der ein im Abstande u von der Axe der t, oder im Abstande $u-k$ von der Biegungs-Axe gelegenes Element ∂i des Normalschnitts die Drehung zu verhindern strebt, ist $=\varepsilon.m(u-k)\partial i$, da die Verlängerungen und Verkürzungen der Fibernthеile wie deren Abstände von der Biegungs-Axe sich verhalten; das Moment dieser Spannung in Bezug auf die Biegungs-Axe ist $=\varepsilon m(u-k)^2\partial i$, und das Moment derselben in Bezug auf die Axe der u, $=\varepsilon m(u-k)t\partial i$.

Zum Gleichgewicht ist nothwendig, dafs sowohl die algebraische Summe der parallelen Kräfte, als auch die Summe ihrer Momente in Bezug auf zwei im Normalschnitt sich schneidende gerade Linien, für welche die Biegungs-Axe und die Axe der u genommen werden können, gleich Null seien. Es finden sich daher, da nicht nur die Summe der Kräftepaare p_{b_a}, sondern, der Voraussetzung nach, auch die Summe ihrer Momente in Bezug auf die Axe der u, gleich Null ist, die drei Gleichungen:

$$\varepsilon m\int(u-k)\partial i = 0,$$

$$\varepsilon m\int(u-k)t\partial i = 0,$$

$$\varepsilon m\int(u-k)^2\partial i - W = 0;$$

wenn W das Moment der Resultirenden der Kräftepaare p_{b_a} bedeutet; welches Moment eine gegebene Function der Coordinaten der aus der Centrallinie entstandenen krummen Linie ist.

Da die Axen der u und t durch den Schwerpunct des Normalschnitts gehen, so ist $\int u\partial i = 0$, und es mufs vermöge der ersten Gleichung auch $k = 0$ sein; woraus folgt, dafs die Biegungs-Axe des Normalschnitts ebenfalls durch dessen Schwerpunct geht. Die beiden andern Gleichungen reduciren sich dadurch auf

$$1.\qquad \int ut\partial i = 0,$$

$$2.\qquad \varepsilon m\int u^2\partial i - W = 0.$$

Die Gleichung (1.) zeigt, dafs das Gleichgewicht am Normalschnitt nur dann bestehen kann, wenn der Normalschnitt von der auf dessen Ebene senkrechten und durch seinen Schwerpunct gehenden Ebene, in der die Resultirende der Kräftepaare p_{b_a} liegt, in einer Haupt-Axe geschnitten wird. In diesem Falle drückt das Integral $\varepsilon m\int u^2\partial i$ das Biegungsmoment (Moment der Elasticität) des Körpers am Normalschnitt aus; und wenn zugleich die Kräftepaare p_{b_a} an sämmtlichen Normalschnitten in eine und dieselbe Ebene fallen, so ist diese Ebene die Krümmungs-Ebene der krummen Linie, in welche die Centrallinie durch die Biegung übergegangen ist, und die Gleichung (2.) ist die Gleichung dieser einfach gekrümmten Linie, indem auch m als Function der Coordinaten sich ausdrücken läfst und, wenn von den Kräften p_{a_a} abgesehen wird, $\frac{1}{m}$ gleich dem Krümmungshalbmesser am Normalschnitt ist. Hiebei erlaubt sich der Verfasser dieses Aufsatzes auf seine 1838 herausgegebene Schrift „Über Gleichgewicht und Bewegung gespannter u. s. w. Körper" zu verweisen.

Wird dagegen die Bedingung, welche die Gleichung (1.) fordert, nicht erfüllt, oder ist die Durchschnittslinie des Normalschnitts mit der Ebene, worin die Resultirende der Kräftepaare p_{b_a} liegt, keine Haupt-Axe, so ist auch die Gleichung (2.) unzulässig, weil das Gleichgewicht zwischen dem Moment W der Resultirenden und dem Moment der Spannkräfte $\varepsilon m\int u^2\partial i$ unmöglich ist, und die Biegungs-Axe des Normalschnitts kann nicht, wie vorausgesetzt wurde, senkrecht auf jener Durchschnittslinie sein. In diesem Falle mufs daher das Gleichgewicht durch eine andere Lage der Biegungs-Axe und durch Ver-

theilung des Moments W auf beide Haupt-Axen hergestellt werden. Man erhält dann statt der Gleichung (2.) zwei Gleichungen, welche die Gleichungen für die aus der Centrallinie des Körpers entstandene krumme Linie sind; wie es in der oben angeführten Schrift gezeigt ist. Diese Linie ist daher im Allgemeinen eine doppelt gekrümmte. Sie wird es ebenfalls sein, wenn zwar die Normalschnitte von den Ebenen der Resultirenden der Kräftepaare p_{b_α} in Haupt-Axen geschnitten werden, wie z. B. wenn die Normalschnitte eine solche Gestalt haben, dafs alle durch deren Schwerpuncte gehenden geraden Linien Haupt-Axen sind, jene Ebenen aber nicht alle in eine zusammenfallen.

Es ist diesen Betrachtungen gemäfs anzunehmen, dafs, wenn die Kraft oder die Resultirende der Kräfte, durch welche ein Körper mit gerader Centrallinie gebogen wird, ursprünglich mit der Centrallinie in einer Ebene liegt und diese Ebene die Normalschnitte in Haupt-Axen schneidet, sei es nun, dafs die Normalschnitte nur zwei, oder unzählig viele solche Axen haben, die Centrallinie eine einfache Krümmung annehmen, wenn aber die Richtung der Kraft diesen Bedingungen nicht genügt, im Allgemeinen eine doppelte Krümmung entstehen wird.

Wird z. B. ein Körper, dessen Normalschnitte längliche Rechtecke sind, von einer an der Centrallinie angebrachten Kraft so gebogen, dafs die eine oder die andere Seite dieser Recht-Ecke mit der durch die Centrallinie und die Richtung der Kraft gehenden Ebene parallel ist, so wird eine einfache Krümmung, bei einer anderen Richtung der Kraft aber eine doppelte Krümmung erfolgen.

§. 9.

Für das Gleichgewicht zwischen den Kräftepaaren p_{b_β} und den ihnen entgegenstrebenden Spannungen der Fibern lassen sich ebenfalls drei Gleichungen construiren.

Bezeichnet man mit η die eigenthümliche Spannkraft des Körpers gegen Torsion, d. h. die Kraft, welche erforderlich wäre, um ein Aggregat von Fibern des Körpers, dessen Querschnitt die Gröfse der Flächen-Einheit hat, in einer ihrer Länge gleichen seitlichen Ausweichung zu erhalten; und mit n die Verhältnifszahl der Ausweichung einer um den Halbmesser $=1$ vom Drehpunct entfernten Fiber zu ihrer Länge oder zur Dicke der Schicht, so wird die Kraft, mit welcher ein um den Halbmesser ϱ vom Drehpunct abstehendes Element ∂i des Normalschnitts der Drehung widersteht, durch $\eta n \varrho \partial i$ ausgedrückt.

Wird diese Kraft nach zwei durch den Drehpunct gehenden rechtwinkeligen Axen zerlegt, so giebt sie, wenn u und t die Coordinaten des Ele-

ments ∂i sind, nach der Richtung der Axe der u die Theilkraft $\eta n t \partial i$, und nach der Richtung der Axe der t die Theilkraft $\eta n u \partial i$. Das Moment der Kraft in Bezug auf den Drehpunct ist $\eta n \varrho^2 \partial i$.

Die Bedingungen des Gleichgewichts sind, dafs sowohl die Summe der Theilkräfte nach jeder der beiden Coordinaten-Axen, als auch die Summe der Momente in Bezug auf den Drehpunct, gleich Null seien, und es ergeben sich hieraus, da die Summen der Kräftepaare p_{b_β} für sich gleich Null sind, die drei Gleichungen:

$$\int \eta n t \partial i = 0, \quad \text{oder} \quad \int t \partial i = 0,$$
$$\int \eta n u \partial i = 0, \quad \text{oder} \quad \int u \partial i = 0,$$
$$\eta n \int \varrho^2 \partial i - V = 0;$$

wo V das Moment der Resultirenden der Kräftepaare p_{b_β} bedeutet.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt, dafs die Drehung des Normalschnitts nur um seinen Schwerpunct geschehen kann, und die dritte Gleichung giebt einen Ausdruck für das Torsionsmoment am Normalschnitt, so wie für den Torsionswinkel an demselben; welcher Winkel, wenn ∂s die Dicke der Schicht bezeichnet, $= n \partial s$ ist.

Mit der hier betrachteten Drehung des Normalschnitts ist ferner noch eine Verkürzung der Fibern oder eine Verminderung der Dicke ∂s verbunden, die jedoch, als zu unbedeutend, in den Gleichungen, welche auf die Gestalt des Körpers nach der Biegung Bezug haben, füglich aufser Acht bleiben kann.

§. 10.

Unter den neuern Schriftstellern, welche die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung elastischer fester Körper zum Gegenstande ihrer Forschungen gemacht haben, nimmt unstreitig *Poisson* eine der ersten Stellen ein.

Er hat theils mehrere besondere Abhandlungen über diesen Gegenstand in den „Mémoires de l'Académie des sciences Tome VIII." und in den „Annales de chimie et de physique 1829" geliefert, theils denselben in seinem „Traité de mécanique, 2te Ausg. 1833" mit einiger Ausführlichkeit bearbeitet, und sich hierdurch wesentliche Verdienste um den genannten Zweig der mathematischen Physik erworben.

Jedoch sind einige der Ergebnisse seiner Untersuchungen, hauptsächlich aus dem Grunde, weil er die Haupt-Axen der Querschnitte der Körper entweder nicht berücksichtigt, oder, was wahrscheinlich ist, nicht gekannt hat, nicht frei von Ungenauigkeiten oder Unrichtigkeiten.

Dafs dieses namentlich bei den allgemeinen Gleichungen über das Gleichgewicht einer elastischen Ruthe, wie sie *Poisson* im ersten Bande seines „Traité de Mécanique Nro. 316 u. folg." giebt, und woraus er die Beständigkeit des Torsionsmoments der Ruthe im gebogenen Zustande ableitet, der Fall ist, soll hier umständlicher gezeigt werden *).

§. 11.

Poisson wendet auf den Fall einer gebogenen elastischen Ruthe die drei Gleichungen des Gleichgewichts eines um einen festen Punct beweglichen festen Körpers, auf welchen Kräfte von beliebigen Richtungen wirken, an, indem er sowohl die Momente der spannenden Kräfte, als auch die Momente der der Drehung irgend eines Normalschnitts um die Normale an der Krümmungs-Ebene des Centralpuncts widerstehenden Spannungen, das Biegungsmoment, so wie die Momente der der Drehung des Normalschnitts um denselben Punct widerstehenden Spannungen (das Torsionsmoment) nach drei durch jenen Punct gehenden Coordinaten-Axen zerlegt und die Summe der Momente der Kräfte und Spannungen in Bezug auf jede dieser Axen gleich Null setzt.

Der Fall des Gleichgewichts eines um einen festen Punct beweglichen Körpers trifft aber hier nur unter gewissen Voraussetzungen zu, und wenn dieselben nicht Statt finden, mufs die Anwendung der ihm entsprechenden Gleichungen zu unrichtigen Resultaten führen. Es giebt nämlich, wenn es sich von dem Gleichgewichte eines gebogenen elastischen Körpers an einem seiner Normalschnitte handelt, zwei verschiedene Systeme von Kräften, deren jedes für sich im Gleichgewicht sein mufs: nemlich ein System von parallelen, auf der Ebene des Normalschnitts winkelrechten, bei der Drehung des Normalschnitts um die Biegungs-Axe wirksamen Kräften, und ein System von Kräften, welche in der Ebene des Normalschnitts liegen und bei der Drehung des Normalschnitts um einen in ihm liegenden Punct (der Torsion) thätig sind. Jedes dieser Systeme giebt, wie §. 8. gezeigt ist, drei Gleichgewichtsglei-

*) Da diese Gleichungen, wie sie *Poisson* giebt, inzwischen bereits in mehrere Lehrbücher der Mechanik aufgenommen worden sind, so dürfte es um so mehr im Interesse der Wissenschaft sein, auf die Mängel derselben aufmerksam zu machen.

chungen. Sind jedoch diese richtig bestimmt, und hat man ihnen gemäfs die Drehungs-Axen für beide Systeme angenommen, so müssen auch, indem man den diesen Axen gemeinschaftlichen Punct als festen Punct betrachtet und die auf dieselben Bezug habenden Momente nach drei in diesem Punct sich schneidenden rechtwinkligen Axen zerlegt, die Gleichungen, welche das Gleichgewicht zwischen der Summe der Momente in Bezug auf jede dieser drei Axen ausdrücken, gültig sein.

Nun dienen zwei der drei Gleichungen des einen Systems der in der Ebene des Normalschnitts liegenden Kräfte, anzuzeigen, dafs der Normalschnitt sich um seinen Schwerpunct, oder um die Berührende an der Centrallinie, drehen mufs und, indem man die Momente derselben Kräfte (das Torsionsmoment) auf diese Berührende als Axe bezogen hat, ist den genannten zwei Gleichungen Genüge geschehen, wenn auch die Nothwendigkeit, so zu verfahren, nicht zuvor erwiesen wurde.

Gleichfalls ist die eine Gleichung des andern Systems der auf der Ebene des Normalschnitts winkelrechten Kräfte, welche fordert, dafs die Axe der Drehung durch den Schwerpunct des Normalschnitts gehe, berücksichtigt. Auch ist die Normale auf der Krümmungs-Ebene am Centralpunct wirklich die Axe für die Drehung des Normalschnitts (die Biegungs-Axe), selbst wenn man zwei Axen der Drehung anzunehmen genöthigt ist. Aber diese eine Axe genügt, wie aus §. 8. erhellet, für das Gleichgewicht nur dann, wenn der Durchschnitt der Krümmungs-Ebene mit dem Normalschnitt eine Haupt-Axe ist. Denn findet das Letztere Statt, so ist eben dadurch eine zweite der drei Bedingungsgleichungen des Systems (§. 8.), nemlich die Gleichung $\int u\,t\,\partial i = 0$ erfüllt. Ist aber jene Durchschnittslinie keine Haupt-Axe, d. h. fällt die Resultirende der Kräfte des Systems nicht in die Krümmungs-Ebene, so mufs noch einer weitern Bedingung genügt werden; und diese Bedingung kommt darauf hinaus, dafs man die Momente der bei der Drehung thätigen Kräfte auf zwei Axen, statt auf eine einzige bezieht, und die Summe der Momente in Bezug auf jede Axe gleich Null setzt; wozu am einfachsten die beiden Haupt-Axen dienen.

Es ergiebt sich aber hieraus, dafs, wenn die Momente der zuletzt erwähnten Kräfte in Bezug auf beide Haupt-Axen genommen werden, wenn man dann diese Momente und das Torsionsmoment nach den drei im Centralpunct des Normalschnitts sich schneidenden Coordinaten-Axen zerlegt und die algebraische Summe der Momente in Bezug auf jede dieser Axen gleich Null setzt:

dafs dann die drei hieraus hervorgehenden Gleichungen als die Gleichungen für das Gleichgewicht des gebogenen elastischen Körpers betrachtet werden können.

§. 12.

Um diese Zerlegung zu bewerkstelligen, hat man zuvor analytische Ausdrücke für die Cosinus der Winkel, welche die Haupt-Axen mit den Coordinaten-Axen bilden, zu suchen.

Zu diesem Behuf stelle (Fig. 1.) die Ebene des Normalschnitts am Punct m vor; mq sei die Durchschnittslinie der Krümmungs-Ebene auf der Seite, wo die Fibern ausgedehnt werden, so dafs auf der andern Seite von m in dieser Linie der Krümmungshalbmesser liegt; mp sei die Normale auf der Kreis-Ebene auf der als bestimmt angenommenen Seite; bd, ce seien die beiden Haupt-Axen im Centralpunct m, und zu deren Unterscheidung me als Axe der t, md als Axe der u bezeichnet; mq bilde mit md den Winkel ξ.

Man stelle sich die (positive) Axe der x, mx (welche aufser der Ebene der Figur fällt), mit der Normalen mp der Durchschnittslinie der Krümmungs-Ebene mq und der Haupt-Axe md durch Ebenen verbunden vor, und bezeichne die Winkel pmx mit f, qmx mit f_1 und dmx mit v, so ist in dem sphärischen Dreieck dxq:

$$\cos d = \frac{\cos f_1 - \cos v \cos \xi}{\sin v \sin \xi}$$

und in dem sphärischen Dreieck dxp:

$$\cos d = \frac{\cos f - \cos v \sin \xi}{\sin v \cos \xi},$$

und da die Winkel d in beiden Dreiecken einander zu 180° ergänzen,

$$\frac{\cos f_1 - \cos v \cos \xi}{\sin v \sin \xi} = \frac{\cos v \sin \xi - \cos f}{\sin v \cos \xi},$$

woraus $\cos dmx = \cos f \sin \xi + \cos f_1 \cos \xi$ folgt.

Auf gleichem Wege findet man, wenn der Winkel cmx mit v_1 bezeichnet wird, in dem sphärischen Dreieck cxq, in welchem der Winkel $cmq = 90° + \xi$ ist,

$$\cos c = \frac{\cos f_1 + \cos v_1 \sin \xi}{\sin v_1 \cos \xi},$$

in dem sphärischen Dreieck cxp:

$$\cos c = \frac{\cos f - \cos v_1 \cos \xi}{\sin v_1 \sin \xi},$$

und da die Winkel c in beiden Dreiecken gleich sind,

$$\frac{\cos f_1 + \cos v_1 \sin \xi}{\sin v_1 \cos \xi} = \frac{\cos f - \cos v_1 \cos \xi}{\sin v_1 \sin \xi};$$

woraus $\cos cmx = \cos f \cos \xi - \cos f_1 \sin \xi$ hervorgeht.

Sind dmy, cmy, g, g_1 die Winkel, welche die (positive) Axe der y, dmz, cmz, h, h_1 die Winkel, welche die (positive) Axe der z mit den Haupt-Axen md, mc, der Normalen mp und der Durchschnittslinie mq bildet, so erhält man auf gleiche Weise:

$$\begin{aligned}
\cos dmy &= \cos g \sin \xi + \cos g_1 \cos \xi, \\
\cos cmy &= \cos g \cos \xi - \cos g_1 \sin \xi, \\
\cos dmz &= \cos h \sin \xi + \cos h_1 \cos \xi, \\
\cos cmz &= \cos h \cos \xi - \cos h_1 \sin \xi:
\end{aligned}$$

daher, wenn μ, μ_1 die Biegungsmomente in Bezug auf die Haupt-Axen md, mc *) bedeuten, für dieselben Momente in Bezug auf die Axen der x, y und z:

$$\begin{aligned}
&\cos f(\mu \sin \xi + \mu_1 \cos \xi) + \cos f_1(\mu \cos \xi - \mu_1 \sin \xi), \\
&\cos g(\mu \sin \xi + \mu_1 \cos \xi) + \cos g_1(\mu \cos \xi - \mu_1 \sin \xi), \\
&\cos h(\mu \sin \xi + \mu_1 \cos \xi) + \cos h_1(\mu \cos \xi - \mu_1 \sin \xi).
\end{aligned}$$

Heifst ferner τ das Torsions-Moment am Normalschnitt, d. i. das Moment der der Torsion widerstrebenden Spannungen der angrenzenden Fiberntheile in Bezug auf die Berührende am Centralpunct m, so sind

$$\tau \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \tau \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \tau \frac{\partial z}{\partial s}$$

diese Momente in Bezug auf die drei durch diesen Punct gehenden Axen.

§. 13.

Um die Momente der die Spannung des Körpers bewirkenden Kräfte in Bezug auf eben diese Axen auszudrücken, nehme man den freien Endpunct der Centrallinie als Anfangspunct der Coordinaten x, y, z und des Bogens s der Centrallinie an; x, y, z seien die Coordinaten des Punctes in der Centrallinie, welcher der Schwerpunct des Normalschnitts ist, an welchem man das Gleichgewicht zwischen den spannenden Kräften und den ihnen widerstrebenden Spannungen betrachtet, s der zugehörige Bogen; es seien x', y', z' die Coordinaten eines andern Puncts in der Centrallinie zwischen dem freien

---

*) Wird der Theil md der Axe de als Umdrehungs-Axe genommen, und fällt mp zwischen md und mc, so mufs auch der Theil mc (nicht me) der Axe ce als Umdrehungs-Axe genommen werden.

Endpunct und dem Punct m, s' der durch m' begrenzte Bogen, S' der Flächen-Inhalt des Normalschnitts an m', β die Dichtigkeit des Körpers an diesem Punct, so dafs $\beta S'\partial s'$ die Masse einer Schicht an demselben Punct bedeutet; $X'\beta S'\partial s'$, $Y'\beta S'\partial s'$, $Z'\beta S'\partial s'$ seien die nach den drei Axen zerlegten Theilkräfte, von denen diese Schicht (im Schwerpunct) angegriffen wird, X', Y', Z' daher die entsprechenden beschleunigenden Kräfte. $Y'(z-z')-Z'(y-y')$ sind die Momente der Theilkräfte am Punct m, in Bezug auf die Axe der x, welche, wenn positiv, die Ebene der positiven x und y in den körperlichen Winkel der positiven Cordinaten hineinzudrehen streben; $Z'(x-x')-X'(z-z')$ sind die Momente in Bezug auf die Axe der y, welche, wenn positiv, die Ebene der positiven y und z, und eben so $X'(y-y')-Y'(x-x')$ die Momente in Bezug auf die Axe der Z, welche, wenn positiv, die Ebene der positiven z und x in den körperlichen Winkel der positiven Coordinaten hineinzudrehen streben.

Benennt man der Kürze wegen

$$\int_{s \div 0}[(Y'(z-z')-Z'(y-y')]\beta S'\partial s' \quad \text{mit} \quad X_1,$$

$$\int_{s \div 0}[(Z'(x-x')-X'(z-z')]\beta S'\partial s' \quad \text{mit} \quad Y_1,$$

$$\int_{s \div 0}[(X'(y-y')-Y'(x-x')]\beta S'\partial s' \quad \text{mit} \quad Z_1,$$

so sind X_1, Y_1, Z_1 die Summen dieser Momente in Bezug auf die Axen der x, y, z; und wenn ferner am freien Ende des Körpers Kräfte angebracht sind, welche eine Resultirende haben, die, nach den Richtungen der drei Axen zerlegt, die Theilkräfte $P_1 Q_1 R$ giebt und deren Angriffspunct die Coordinaten a', b', c' hat, so sind die Momente dieser Kräfte nach den drei Axen:

$$Q(z-c')-R(y-b'),$$
$$R(x-a')-P(z-c'),$$
$$P(y-b')-Q(x-a').$$

Bei der Construction der Gleichungen für das Gleichgewicht des gebogenen Körpers hat man nun die Summe sämmtlicher Momente in Bezug auf jede der drei Axen zu nehmen, indem man sowohl den Momenten der Biegung μ, μ_1, als dem Torsions-Momente τ, deren Richtungen denen der Momente der spannenden Kräfte entgegengesetzt sind, das negative Zeichen giebt, und jede dieser Summen gleich Null zu setzen.

Die Gleichungen werden hierdurch zu:

$$K.\begin{cases} X_1 + Q(z-c') - R(y-b') - \tau\cdot\frac{\partial x}{\partial s} - \cos f(\mu\sin\xi + \mu_1\cos\xi) \\ \qquad - \cos f_1(\mu\cos\xi - \mu_1\sin\xi) = 0, \\ Y_1 + R(x-a') - P(z-c') - \tau\cdot\frac{\partial y}{\partial s} - \cos g(\mu\sin\xi + \mu_1\cos\xi) \\ \qquad - \cos g_1(\mu\cos\xi - \mu_1\sin\xi) = 0, \\ Z_1 + P(y-b') - Q(x-a') - \tau\cdot\frac{\partial z}{\partial s} - \cos h(\mu\sin\xi + \mu_1\cos\xi) \\ \qquad - \cos h_1(\mu\cos\xi - \mu_1\sin\xi) = 0. \end{cases}$$

§. 14.

Was die Winkel f, g, h, f_1, g_1, h_1 betrifft, so hat man nach *Poisson* I. 19, indem man die unabhängige Veränderliche der Symmetrie der Ausdrücke wegen vorerst unbestimmt läfst:

$$\cos f = \pm\frac{1}{k}(\partial y\,\partial^2 z - \partial z\,\partial^2 y),$$

$$\cos g = \pm\frac{1}{k}(\partial z\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 z),$$

$$\cos h = \pm\frac{1}{k}(\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x);$$

wo k^2 die Summe der Quadrate der drei Zähler und k die positive Wurzel aus dieser Summe bedeutet; und da die Geraden pm, qm (Fig. 1.) und die berührende am Punct m winkelrecht auf einander stehen, so finden zwischen denselben Winkeln und denen, welche die berührende mit den drei Coordinaten-Axen bildet, und deren Cosinus $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ sind, die Beziehungen

$$\cos f^2 + \cos f_1^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 = 1,$$

$$\cos g^2 + \cos g_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1,$$

$$\cos h^2 + \cos h_1^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1$$

Statt; und daraus folgt, wenn ϱ den positiven Werth des Krümmungshalbmessers $\frac{\partial s^3}{k}$ am Puncte m bezeichnet:

$$\cos f_1 = \pm\varrho\cdot\frac{\partial z(\partial z\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 z) - \partial y(\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x)}{\partial s^4} = \pm\varrho\cdot\frac{\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}}{\partial s}$$

u. s. w.

Diese Ausdrücke für die Cosinus der Winkel f_1, g_1 und h_1 sind, so wie jene für die Cosinus der Winkel f, g, h, zweideutig, da sie sich sowohl

auf den Theil mq des Durchschnitts der Krümmungs-Ebene mit dem Normalschnitt und auf den Theil mp der Normalen auf der Krümmungs-Ebene, als auf die andern Theile dieser Linien an der entgegengesetzten Seite von m beziehen können.

Da jedoch nach **Poisson** I. No. 20. die Projection des Krümmungshalbmessers auf die Axe der x, welche Projection daselbst mit $x'-x$ bezeichnet wird,

$$= \varrho^2 \cdot \frac{\partial z(\partial z \partial^2 x - \partial x \partial^2 z) - \partial y(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)}{\partial s^4}$$

ist, und $\frac{x'-x}{\varrho}$ den Cosinus des Winkels ausdrückt, welchen die positive Axe der x mit dem auf der hohlen Seite der Curve (auf der der Mittelpunct der Krümmung sich befindet) liegenden Theil des Durchschnitts der Krümmungs-Ebene und des Normalschnitts einschliefst, die Linie mq aber auf der erhabenen Seite der Curve, auf der die Fibern ausgedehnt werden, vorausgesetzt wird, so hat man offenbar in den Ausdrücken für $\cos f$, etc. das Zeichen $-$ zu nehmen. Demnach ergiebt sich

$$\cos f_1 = -\varrho \cdot \frac{\partial z(\partial z \partial^2 x - \partial x \partial^2 z) - \partial y(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)}{\partial s^4} = -\varrho \cdot \frac{\partial \cdot \frac{\partial x}{\partial s}}{\partial s},$$

$$\cos g_1 = -\varrho \cdot \frac{\partial x(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x) - \partial z(\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y)}{\partial s^4} = -\varrho \cdot \frac{\partial \cdot \frac{\partial y}{\partial s}}{\partial s},$$

$$\cos h_1 = -\varrho \cdot \frac{\partial y(\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y) - \partial x(\partial z \partial^2 x - \partial x \partial^2 z)}{\partial s^4} = -\varrho \cdot \frac{\partial \cdot \frac{\partial z}{\partial s}}{\partial s}.$$

Etwas mehr Schwierigkeiten macht die Zweideutigkeit der Ausdrücke für $\cos f$, $\cos g$ und $\cos h$.

§. 15.

Man setze zur Abkürzung

$$a = \partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y, \quad b = \partial z \partial^2 x - \partial x \partial^2 z, \quad c = \partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x,$$

so ist

$$\partial a = \partial y \partial^3 z - \partial z \partial^3 y, \quad \partial b = \partial z \partial^3 x - \partial x \partial^3 z, \quad \partial c = \partial x \partial^3 y - \partial y \partial^3 x;$$

und die Gleichung für die Krümmungs-Ebene am Puncte m der Curve $m_{\prime\prime} m_\prime m m'$ (Fig. 2.), dessen Coordinaten x, y und z sind, wenn x', y' und z' die laufenden Coordinaten vorstellen (**Poisson** I. 19.) ist:

$$A. \quad a(x'-x) + b(y'-y) + c(z'-z) = 0;$$

Die Gleichung aber für die Krümmungs-Ebene am nächstfolgenden Puncte m', auf derjenigen Seite des durch m begrenzten Bogens s, nach welcher dieser als zunehmend oder wo das Element $mm' = \partial s$ als positiv angenommen wird, erhält man, indem man in (*A.*) $x+\partial x$, $y+\partial y$, $z+\partial z$ statt x, y, z setzt und (*A.*) abzieht, oder indem man diese Gleichung nach x, y, z differentiirt; nemlich:

$$B.\quad \partial a(x'-x)+\partial b(y'-y)+\partial c(z'-z) = 0.$$

Aus beiden Gleichungen folgt für die auf der Durchschnittslinie beider Krümmungs-Ebenen senkrechte, durch den Punct m gehende Ebene die Gleichung

$$C.\quad (b\partial c-c\partial b)(x'-x)+(c\partial a-a\partial c)(y'-y)+(a\partial b-b\partial a)(z'-z)=0.$$

Diese Durchschnittslinie ist aber keine andere, als die Berührende mt der Curve, in welche das beiden Krümmungs-Ebenen gemeinschaftliche Element $m_1 m$ derselben fällt, und die Gleichung der auf diesem Element normalen Ebene

$$(x'-x)\partial x+(y'-y)\partial y+(z'-z)\partial z = 0$$

mufs daher nur der Multiplication mit einem Factor O bedürfen, um in die Gleichung (*C.*) überzugehen, so dafs

$$\frac{b\partial c-c\partial b}{\partial x} = \frac{c\partial a-a\partial c}{\partial y} = \frac{a\partial b-b\partial a}{\partial z} = O \text{ ist.}$$

Wirklich findet sich

$$O = \partial x(\partial^2 y\,\partial^3 z-\partial^2 z\,\partial^3 y)+\partial y(\partial^2 z\,\partial^3 x-\partial^2 x\,\partial^3 z)+\partial z(\partial^2 x\,\partial^3 y-\partial^2 y\,\partial^3 x).$$

Bezeichnet ζ den spitzen (unendlich kleinen) Winkel, den beide Krümmungs-Ebenen mit einander einschliefsen, so ist (*Poisson* I. 19.)

$$\zeta^2 = (\partial.\cos f)^2+(\partial.\cos g)^2+(\partial.\cos h)^2,$$

oder da sich

$$\partial.\cos f = \frac{c(c\partial a-a\partial c)-b(a\partial b-b\partial a)}{k^2},$$

$$\partial.\cos g = \frac{a(a\partial b-b\partial a)-c(b\partial c-c\partial b)}{k^2},$$

$$\partial.\cos h = \frac{b(b\partial c-c\partial b)-a(c\partial a-a\partial c)}{k^2}$$

findet:

$$\zeta^2 = \frac{(b\partial c-c\partial b)^2+(c\partial a-a\partial c)^2+(a\partial b-b\partial a)^2}{k^4}$$

$$= \left(\frac{b\partial c-c\partial b}{k^2}.\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{c\partial a-a\partial c}{k^2}.\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{a\partial b-b\partial a}{k^2}.\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2;$$

und der dem *Winkel der Krümmungs-Ebenen*, ζ, *zugehörige Halbmesser*, welcher nur positiv genommen werden soll, ist

$$\frac{\partial s}{\zeta} = \pm\frac{k^2}{O},$$

je nachdem O positiv oder negativ ist; dem gemäfs also der Krümmungswinkel $\delta = \frac{k}{\partial s^2}$ zum Winkel der Krümmungs-Ebenen ζ, oder der dem letztern zugehörige Halbmesser $\frac{\partial s}{\zeta}$ zum Krümmungshalbmesser $\frac{\partial s}{\delta}$ sich verhält, wie 1 zu $\pm O.\left(\frac{\partial s}{k}\right)^3$.

§. 16.

Die Gleichung für die winkelrecht auf den Krümmungshalbmesser am Puncte m geführte, durch das Element $m_1 m$ (Fig. 2.) gehende Ebene ist

$$\cos f_1(x'-x) + \cos g_1(y'-y) + \cos h_1(z'-z) = 0,$$

oder

$$D. \quad (b\partial z - c\partial y)(x'-x) + (c\partial x - a\partial z)(y'-y) + (a\partial y - b\partial x)(z'-z) = 0$$

und, in Verbindung mit dieser, die Gleichung für die durch das Element mm' gehende, auf dem Krümmungshalbmesser am Punct m' senkrechte Ebene, welche man durch Differentiiren der Gleichung ($D.$) nach x, y und z erhält:

$$\begin{aligned} E. \quad & (\partial b\,\partial z - \partial c\,\partial y + b\,\partial^2 z - c\,\partial^2 y)(x'-x) \\ & + (\partial c\,\partial x - \partial a\,\partial z + c\,\partial^2 x - a\,\partial^2 z)(y'-y) \\ & + (\partial a\,\partial y - \partial b\,\partial x + a\,\partial^2 y - b\,\partial^2 x)(z'-z) = 0. \end{aligned}$$

Hieraus findet man folgende Gleichungen für die, ebenfalls durch den Punct m gehende Durchschnittslinie beider Ebenen:

$$F. \quad \frac{x'-x}{ak^2 + (b\partial c - c\partial b)\partial s^2} = \frac{y'-y}{bk^2 + (c\partial a - a\partial c)\partial s^2} = \frac{z'-z}{ck^2 + (a\partial b - b\partial a)\partial s^2}.$$

Wird nun durch einen Punct in der Berührenden am Puncte m oder in der Durchschnittslinie beider Krümmungs-Ebenen, welcher auf der positiven Seite des Bogens s im Abstande l vom Puncte m liegt, oder dessen Coordinaten $x + l\cdot\frac{\partial x}{\partial s}$, $y + l\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$, $z + l\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$ sind, eine Ebene winkelrecht auf die Berührende gelegt, so ist die Gleichung dieser Ebene:

$$\left(x' - x - l\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)\partial x + \left(y' - y - l\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)\partial y + \left(z' - z - l\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)\partial z = 0,$$

oder

$$G. \quad (x'-x)\partial x + (y'-y)\partial y + (z'-z)\partial z = l\partial s.$$

Die drei Ebenen, deren Gleichungen ($D.$, $E.$ und $G.$) sind, müssen, da keine derselben mit einer der andern parallel ist, sich in einem und demselben Puncte schneiden, und die Coordinaten dieses gemeinschaftlichen Puncts sind die Werthe von x', y' und z', welche durch die genannten drei Gleichungen, indem man die Coordinaten in ihnen gleich annimmt, bestimmt werden.

Setzt man in die Gleichung ($G.$) die aus den Gleichungen ($F.$) für $y'-y$ und $z'-z$ sich ergebenden Ausdrücke, so findet man

$$x'-x = \frac{l\partial s(ak^2+(b\partial c-c\partial b)\partial s^2)}{\partial s^2[(b\partial c-c\partial b)\partial x+(c\partial a-a\partial c)\partial y+(a\partial b-b\partial a)\partial z]}$$
$$= l\cdot\frac{ak^2}{\partial s^2\cdot\frac{b\partial c-c\partial b}{\partial x}}+l\cdot\frac{\partial x}{\partial s},$$

oder

$$x'-x-l\cdot\frac{\partial x}{\partial s} = l\cdot\frac{ak^2}{\partial s^2\cdot\frac{b\partial c-c\partial b}{\partial x}} = l\cdot\frac{a}{\partial s^2\cdot\frac{U}{k^2}}.$$

Auf gleiche Weise erhält man, wenn man die auf die Berührende am Puncte m winkelrechte Ebene durch einen auf der negativen Seite des Bogens s im Abstande l von m in der Berührenden liegenden Punct legt, dessen Coordinaten $x-l\cdot\frac{\partial x}{\partial s}$, $y-l\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$, $z-l\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$ sind, für die Ordinate x' des Durchschnittspuncts der drei Ebenen:

$$x'-x+l\cdot\frac{\partial x}{\partial s} = -l\cdot\frac{a}{\partial s^2\cdot\frac{U}{k^2}}.$$

Die Figur 3. stelle die auf der Berührenden am Punct m winkelrechte Ebene dar; sie werde von dieser Berührenden im Punct h, von der Krümmungs-Ebene am Puncte m in der Linie hp, von der Krümmungs-Ebene am Puncte m' in der Linie hq und von der Ebene ($D.$) in der Linie hr geschnitten. Je nachdem die Ebene der Figur auf der Seite von m liegt, nach welcher hin der Bogen s zunimmt, oder nach welcher hin er abnimmt, wird sie von der Durchschnittslinie ($F.$) entweder auf derjenigen Seite der Krümmungs-Ebene am Puncte m, auf welcher das positive ∂s aus dieser Ebene heraustritt und auf welcher demnach der Punct m' liegt, oder auf der entgegengesetzten Seite derselben Ebene, entweder in r, oder in r', geschnitten, und die Durchschnittslinien nr und $n'r'$ der Ebene ($E.$) mit den beiden durch die Ebene der Figur dargestellten Ebenen stehen, weil sowohl die Ebene ($E.$) als die

ebengenannten beiden Ebenen auf der Krümmungs-Ebene am Puncte m' senkrecht sind, winkelrecht auf der Linie hq.

Der Winkel hmn', den die Berührende am Puncte m mit der Berührenden am nächstfolgenden Puncte m' in der Krümmungs-Ebene am letztern Punct bildet, ist dem Krümmungswinkel δ gleich, und die Berührende trifft die Ebene der Figur in n, oder in n'. Nimmt man daher den Abstand l gleich dem Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{\partial s^2}{k}$ an, so werden hn und hn' gleich ∂s, und da der Winkel hnr, oder hnr', dem Winkel phq, d. h. dem Winkel der Krümmungs-Ebenen ζ, gleich ist, so sind hr und hr' dem diesem Winkel zugehörigen Halbmesser $\frac{\partial s}{\zeta}$ gleich. Es ist ferner

$$x' - x - \varrho \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = + \frac{a}{k} : \frac{O}{k^2} = + \frac{a}{k} \cdot \frac{k^2}{O},$$

$$x' - x + \varrho \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = - \frac{a}{k} : \frac{O}{k^2} = - \frac{a}{k} \cdot \frac{k^2}{O};$$

in welchen Gleichungen der Ausdruck $x' - x - \varrho \cdot \frac{\partial x}{\partial s}$ den auf die Axe der x projicirten Halbmesser $\frac{\partial s}{\zeta} = hr$ an derjenigen Seite der Krümmungs-Ebene am Puncte m, auf der das positive ∂s aus ihr hervortritt, der Ausdruck $x' - x + \varrho \cdot \frac{\partial x}{\partial s}$ dieselbe Projection des Halbmessers $\frac{\partial s}{\zeta} = hr'$ an der andern Seite dieser Ebene bedeutet, und $\pm \frac{k^2}{O}$, je nachdem O einen positiven oder negativen Werth hat, eben diesem Halbmesser $\frac{\partial s}{\zeta}$ gleich ist.

Hieraus folgt aber

$$\frac{a}{k} \text{ oder } \cos f, \text{ mit dem positiven Zeichen, } = \frac{x' - x \mp \varrho \cdot \frac{\partial x}{\partial s}}{\frac{\partial s}{\zeta}};$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem O positiv oder negativ ist. Eben so ergiebt sich

$$\left.\begin{matrix} \frac{b}{k} \text{ oder } \cos g \\ \frac{c}{k} \text{ oder } \cos h \end{matrix}\right\}, \text{ mit positivem Zeichen, } = \frac{y' - y \mp \varrho \cdot \frac{\partial y}{\partial s}}{\frac{\partial s}{\zeta}} = \frac{z' - z \mp \varrho \cdot \frac{\partial z}{\partial s}}{\frac{\partial s}{\zeta}};$$

und es mufs hieraus der Schlufs gezogen werden, dafs die mit positivem Zeichen genommenen Ausdrücke von $\cos f$, $\cos g$ und $\cos h$, wenn O positiv ist,

auf die Normale an derjenigen Seite der Krümmungs-Ebene, wo das positive ∂s aus ihr heraustritt, bei negativem O aber auf die entgegengesetzte Seite sich beziehen.

Ein reelles, in der Gestalt der Curve begründetes Merkmal für die Seite der Krümmungs-Ebene, auf welche man die so genommenen Ausdrücke zu beziehen hat, so wie dasselbe in Bezug auf die Cosinus der Winkel f_1, g_1, h_1 für die Seite der Berührenden (§. 14.) besteht, findet demnach, wie aus diesen Erörterungen weiter zu folgern ist, nicht Statt, da das Zeichen der Gröfse O, für einen bestimmten Punct m der Curve, von der Lage der drei Coordinaten-Axen und von den Richtungen, nach denen ihre positiven Theile sich erstrecken (welche Lage und Richtungen ganz beliebig gewählt werden können) abhangt und, überdies die Seite des Bogens s, nach welcher derselbe als vom Punct m an zunehmend angesehen wird, ebenfalls beliebig und unabhängig von den genannten Richtungen der Coordinaten-Axen genommen werden kann, so dafs es eben durch diese Seite des Bogens s in die Willkür gelegt ist, die Ausdrücke für die Cosinus der Winkel f, g, h mit positivem Zeichen, bei bekanntem Zeichen des Werthes von O, auf die eine oder die andere der beiden Seiten der Krümmungs-Ebene des Punctes m zu beziehen.

§. 17.

Die auf den Winkel der Krümmungs-Ebenen Bezug habenden Ausdrücke werden etwas einfacher, wenn man eine der Veränderlichen, z. B. y, als unabhängige Veränderliche einführt.

Man erhält dann, indem man der Kürze wegen

$$\frac{\partial x}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 x}{\partial y^3} \text{ mit } x_{\prime},\ x_{\prime\prime},\ x_{\prime\prime\prime},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \text{ mit } z_{\prime},\ z_{\prime\prime},\ z_{\prime\prime\prime} \text{ bezeichnet:}$$

$$O = \partial y^6 (z_{\prime\prime} x_{\prime\prime\prime} - x_{\prime\prime} z_{\prime\prime\prime}),$$

$$\zeta = \pm \frac{O}{k^2}\partial s = \pm \frac{z_{\prime\prime} x_{\prime\prime\prime} - x_{\prime\prime} z_{\prime\prime\prime}}{z_{\prime\prime}^2 + x_{\prime\prime}^2 + (z_{\prime} x_{\prime\prime} - x_{\prime} z_{\prime\prime})^2}\partial s,$$

$$\frac{\partial s}{\zeta} = \pm \frac{z_{\prime\prime}^2 + x_{\prime\prime}^2 + (z_{\prime} x_{\prime\prime} - x_{\prime} z_{\prime\prime})^2}{z_{\prime\prime} x_{\prime\prime\prime} - x_{\prime\prime} z_{\prime\prime\prime}};$$

wo das obere Zeichen auf einen positiven, das untere auf einen negativen Werth von $z_{\prime\prime} x_{\prime\prime\prime} - x_{\prime\prime} z_{\prime\prime\prime}$ sich bezieht.

Um das in den beiden vorigen Paragraphen Vorgetragene durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, werde hiezu die Curve gewählt, welche durch

den Durchschnitt der krummen Flächen zweier geraden Cylinder, deren Grundflächen Kreise sind, gebildet wird.

Die Axe des einen Cylinders, dessen Halbmesser $=R$ sei, werde zur Axe der z, die Axe des andern, dessen Halbmesser $=r$, zur Axe der x und der Durchschnittspunct der beiden winkelrecht auf einander stehenden Axen zum Anfangspunct der Coordinaten genommen.

Die Gleichung des ersten Cylinders ist $y^2+x^2=R^2$,

Die Gleichung des zweiten - - - $y^2+z^2=r^2$,

und es ist

$$x_{,}=-\frac{y}{x},\qquad z_{,}=-\frac{y}{z},$$

$$x_{,,}=-\frac{R^2}{x^3},\qquad z_{,,}=-\frac{r^2}{z^3},$$

$$x_{,,,}=-3\cdot\frac{yR^2}{x^5},\qquad z_{,,,}=-\frac{yr^2}{z^5},$$

wo $x=\sqrt{(R^2-y^2)}$ und $z=\sqrt{(r^2-y^2)}$ mit dem positiven Zeichen zu nehmen sind, indem man nur das Stück der Curve, dessen Coordinaten x und z positiv sind, betrachtet.

Es findet sich ferner

$$\frac{k^2}{\partial y^6}\ \text{oder}\ z_{,,}^2+x_{,,}^2+(z_{,}x_{,,}-x_{,}z_{,,})^2=\frac{R^4z^6+r^4x^6+(R^2-r^2)^2y^6}{z^6x^6},$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2\ \text{oder}\ 1+x_{,}^2+z_{,}^2=\frac{R^2r^2-y^4}{z^2x^2},$$

$$\varrho^2\ \text{oder}\ \frac{\partial s^6}{k^2}=\frac{(R^2r^2-y^4)^3}{R^4z^6+r^4x^6+(R^2-r^2)^2y^6},\ \text{und}$$

$$z_{,,}x_{,,,}-x_{,,}z_{,,,}=-\frac{3yR^2r^2(R^2-r^2)}{z^8x^8};$$

$$\cos f\ \text{oder}\ \frac{a}{k}=z_{,,}\cdot\frac{\partial y^3}{k}=-\frac{r^2x^3}{\sqrt{(R^4z^6+r^4x^6+(R^2-r^2)^2y^6)}},$$

$$\cos g\ \text{oder}\ \frac{b}{k}=(z_{,}x_{,,}-x_{,}z_{,,})\frac{\partial y^3}{k}=-\frac{y^3(R^2-r^2)}{\sqrt{(R^4z^6+r^4x^6+(R^2-r^2)^2y^6)}},$$

$$\cos h\ \text{oder}\ \frac{c}{k}=-x_{,,}\cdot\frac{\partial y^3}{k}=\frac{R^2z^3}{\sqrt{(R^4z^6+r^4x^6+(R^2-r^2)^2y^6)}}.$$

Ist $R=r$, so wird $z_{,,}x_{,,,}-x_{,,}z_{,,,}$ für jeden Werth der Coordinaten gleich Null, und man erhält

$$z_{,,}=Cx_{,,},\quad z_{,}=Cx_{,}+C',\quad z=Cx+C'y+C'';$$

wo C, C', C'' willkürliche Constanten sind. Die Curve liegt in einer Ebene,

und da $z = x = r$ für $y = 0$ ist, so ist $C = 1$, $C' = C'' = 0$ und

$$z = x;$$

d. h. diese Ebene geht durch die Axe der y und ist unter 45° gegen die Axen der z und x geneigt;

$$\cos f \text{ wird } = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos g = 0, \quad \cos h = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ oder}$$

$\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$, mit positiven Zeichen, beziehen sich auf die Normale an derjenigen Seite der Ebene, wo der positive Theil der Axe der z sich befindet.

§. 18.

Es sei $R > r$, so kann der absolute Werth von y nicht gröfser als r angenommen werden, und $z_{,,}x_{,,,} - x_{,,}z_{,,,}$ wird negativ, wenn y positiv ist, und umgekehrt; $\cos f$ wird immer negativ, $\cos h$ immer positiv und $\cos g$ negativ für positive, positiv für negative Werthe von y. Die Ausdrücke für $\cos f$, $\cos g$ und $\cos h$ in (§. 14.) müssen sich demnach auf die Normale an derjenigen Seite der Krümmungs-Ebene, wo das positive ∂s aus ihr hervortritt, beziehen, wenn y negativ ist, und bei positivem y auf die Normale der andern Seite.

Um zu zeigen, dafs dieses wirklich der Fall ist, sei e irgend ein, als bestimmt angenommener positiver oder negativer Werth von y, und $e + \delta$ ein benachbarter Werth von y. Nimmt man s so an, dafs es mit y zugleich wächst, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{xz}{\sqrt{(R^2r^2 - y^4)}}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{yz}{\sqrt{(R^2r^2 - y^4)}}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = -\frac{yx}{\sqrt{(R^2r^2 - y^4)}};$$

das Wurzelzeichen mit $+$, und eben so x und z fortwährend positiv genommen. Heifst dann λ der Winkel, den die Berührende an dem Punct, für welchen $y = e + \delta$ ist, nach der positiven Richtung von s mit der Normale auf der Krümungs-Ebene an dem Punct einschliefst, wo $y = e$ ist, und zwar mit dem Theil der Normale, auf welchen sich die Ausdrücke für $\cos f$, $\cos g$, $\cos h$ mit positivem Zeichen beziehen: so ergiebt sich, indem man in diesen Ausdrücken $y = e$, in $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ aber $y = e + \delta$ setzt:

$$\cos \lambda = \cos f \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \cos g \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \cos h \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(R^2r^2 - (e+\delta)^4)}\sqrt{(R^4z^2 + r^4x^2 + (R^2 - r^2)^2e^2)}} [(e+\delta)r^2zx^2 - e^2(R^2 - r^2)xz - (e+\delta)R^2xz^2],$$

(wo noch $\sqrt{(r^2 - (e+\delta)^2)}$, $\sqrt{(R^2 - (e+\delta)^2)}$ im eingeklammerten Factor und $\sqrt{(r^2 - e^2)}$, $\sqrt{(R^2 - e^2)}$ im Nenner statt z und x zu setzen ist) oder

$$\cos\lambda = \frac{R^3 r^3}{\sqrt{(R^2r^2-(e+\delta)^4)}\sqrt{(R^4(r^2-e^2)^3+r^4(R^2-e^2)^3+(R^2-r^2)^2e^6)}}$$

$$\times\Big[(e+\delta)\sqrt{\Big(1-\Big(\frac{e+\delta}{r}\Big)^2\Big)\Big(1-\Big(\frac{e}{R}\Big)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}-e^2\sqrt{\Big(1-\Big(\frac{e+\delta}{R}\Big)^2\Big)}\cdot\sqrt{1-\Big(\frac{e+\delta}{r}\Big)^2}\Big(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R^2}\Big)$$

$$-(e+\delta)\sqrt{\Big(1-\Big(\frac{e+\delta}{R}\Big)^2\Big(1-\Big(\frac{e}{r}\Big)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}\Big].$$

Wird nun der in den Klammern enthaltene Ausdruck mittels des *Taylor*schen Theorems, nach welchem z. B.

$$\sqrt{\Big(1-\Big(\frac{e+\delta}{r}\Big)^2\Big)}=\sqrt{\Big(1-\Big(\frac{e}{r}\Big)^2\Big)}-\frac{e}{r^2}\Big(1-\Big(\frac{e}{r}\Big)^2\Big)^{-\frac{1}{2}}.\delta-\frac{1}{2r^2}\Big(1-\Big(\frac{e}{r}\Big)^2\Big)^{-\frac{3}{2}}.\delta^2\ldots.$$

ist, nach δ entwickelt, so verschwinden die Coëfficienten von δ^0 und von δ, und man erhält, wenn man die dritten Potenzen von δ, da sie keinen Einflufs auf das Zeichen von $\cos\lambda$ haben können, gleich Null setzt:

$$\cos\lambda =$$

$$-\frac{\frac{1}{2}e\Big(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R^2}\Big)\delta^2}{\sqrt{\Big(1-\Big(\frac{e}{r}\Big)^2\Big)}\cdot\sqrt{\Big(1-\Big(\frac{e}{R}\Big)^2\Big)}}\cdot\frac{R^3r^3}{\sqrt{(R^2r^2-e^4)}\cdot\sqrt{(R^4(r^2-e^2)^3+r^4(R^2-e^2)^3+(R^2-r^2)^2e^6)}},$$

Man sieht, dafs der Winkel λ, welcher für $\delta = 0$ ein rechter ist, für kleine positive oder negative Werthe von δ bei positivem e gröfser, bei negativem e kleiner als ein rechter wird, und dafs somit das positive ∂s in dem Theile der Curve, für welchen y negativ zu nehmen ist, an derjenigen Seite der Krümmungs-Ebene aus dieser heraustritt, wo die Normale sich befindet, auf welche die Ausdrücke für $\cos f$, $\cos g$, $\cos h$ mit positivem Zeichen sich beziehen, in dem andern Theile der Curve aber, wo y positive Werthe hat, an der entgegengesetzten Seite; was mit der oben aus dem Zeichen von $z_{\prime\prime}x_{\prime\prime\prime}-x_{\prime\prime}z_{\prime\prime\prime}$ gezogenen Folgerung übereinstimmt. Bei negativem ∂s ändert der Ausdruck für $\cos\lambda$ sein Zeichen, weil $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ das ihrige ändern, d. h. das negative ∂s tritt, wie natürlich, an der entgegengesetzten Seite als das positive ∂s, aus der Krümmungs-Ebene heraus. Wird dagegen ∂s, nach derselben Richtung, nach welcher es vorhin positiv gesetzt wurde, nunmehr negativ angenommen, so dafs s abnimmt, wenn y wächst, so ändern dadurch $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$, und mit ihnen $\cos\lambda$, ebenfalls ihr Zeichen, oder es tritt der Theil der Normale, auf welche die mit positivem Zeichen genommenen Ausdrücke von $\cos f$, $\cos g$ und $\cos h$ zu beziehen sind, durch diesen Wechsel auf die

andere Seite der Krümmungs-Ebene über; woraus erhellet, dafs es eben dadurch, dafs der Bogen s in bestimmter Richtung willkürlich wachsend oder abnehmend gesetzt werden kann, gestattet ist (die Gröfse $z_{\prime\prime}x_{\prime\prime\prime}-x_{\prime\prime}z_{\prime\prime\prime}$ mag für den bestimmten Punct, an welchem die Curve betrachtet wird, einen positiven oder negativen Werth haben), jene Ausdrücke beliebig auf die eine oder die andere der beiden Seiten der Krümmungs-Ebene dieses Punctes zu beziehen, oder, was dasselbe ist, den Werth von $\cos\lambda$ beliebig in Bezug auf jede dieser Seiten positiv zu nehmen; welche Bemerkung allgemein für jede Curve gilt.

Für $e=0$ verschwindet der Ausdruck von $\cos\lambda$. Man findet aber unmittelbar für $e=0$:

$$\cos\lambda = \frac{\delta . Rr\left[\sqrt{\left(1-\left(\frac{\delta}{r}\right)^2\right)}-\sqrt{\left(1-\left(\frac{\delta}{R}\right)^2\right)}\right]}{\sqrt{((R^2+r^2)(R^2r^2-\delta^4))}};$$

welcher Ausdruck negativ ist, wenn δ positiv, und umgekehrt. Er ändert das Zeichen sowohl mit ∂s als mit δ, und behält es daher, wenn beide zugleich es ändern; er verhält sich in dieser Beziehung anders als der allgemeine Ausdruck für $\cos\lambda$, indem der entsprechende Punct ein Wendungspunct oder $z_{\prime\prime}x_{\prime\prime\prime}-x_{\prime\prime}z_{\prime\prime\prime}=0$ ist, für $y=0$.

§. 19.

Bei einer gegebenen Curve von doppelter Krümmung lassen sich zwar an jedem Puncte, wenn die Krümmung nicht zu gering ist, nicht nur die Seite des Bogens, an welcher der Krümmungshalbmesser liegt, und die Lage der Krümmungs-Ebene, welche durch die Berührende und den Krümmungshalbmesser bestimmt wird, ohne Schwierigkeit erkennen, sondern auch meistens die Seite der Krümmungs-Ebene beurtheilen, an welcher das als positiv genommene nächstfolgende Element des Bogens aus ihr heraustritt: da sich aber selten wird *a priori* unterscheiden lassen, ob bei der angenommenen Lage der Coordinaten-Axen die Gröfse $z_{\prime\prime}x_{\prime\prime\prime}-x_{\prime\prime}z_{\prime\prime\prime}$ für denselben Punct einen positiven oder negativen Werth hat, so wird, wenn man die Gleichungen (*K.* in §. 13.) auf einen gegebenen Fall anwenden will, nichts anderes übrig bleiben, als, indem man die Ausdrücke von $\cos f$, $\cos g$, $\cos h$ auf die Normale einer bestimmten Seite der Krümmungs-Ebene bezieht, das Zeichen dieser Ausdrücke vorerst willkürlich anzunehmen, und in der Folge zu untersuchen, ob das Resultat der Rechnung die Annahme rechtfertigt.

§. 20.

Um die Gleichungen (*K*.) mit den in der Schrift: „Über Gleichgewicht und Bewegung etc. §. 113. und folg." für den Fall der Biegung eines Körpers durch eine einzige Kraft p abgeleiteten Gleichungen (3. und 4.) zu vergleichen, gebe man den Axen der Coordinaten die dort angenommene Lage und Richtung, so dafs der Angriffspunct der Kraft p der Anfangspunct der Coordinaten ist und die positive Axe der y mit der Richtungslinie der Kraft p zusammenfällt und mit dieser die gleiche Richtung hat. Nach der Figur der Curve, welche die Construction in der angef. Schrift (Fig. 22—25.) voraussetzt, mufs man annehmen, dafs das positive ∂s an der Seite der Krümmungs-Ebene nmq, wo r liegt, aus ihr heraustritt, dafs die durch den Punct m gehende Normale auf der Krümmungs-Ebene, an derselben Seite der letztern, die parallel mit der Axe der z durch diesen Punct geführte gerade Linie unter einem spitzen Winkel schneidet und dafs $\frac{\partial x}{\partial y}$, die Tangente des Winkels, den die Projection der Berührenden am Puncte m auf die Ebene der y und x mit der Axe der y einschliefst, bei zunehmendem x abnimmt, also $\frac{\partial y}{\partial x}$ wächst, oder $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positiv ist, dafs daher der mit positivem Zeichen genommene Ausdruck für $\cos h$, welcher $= +\frac{\partial x^3}{k}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ist, wenn, wie in derselben Schrift, x als die unabhängige Veränderliche angenommen wird, sich auf die Normale an derselben Seite bezieht, und dafs demnach, wenn man die Ausdrücke für $\cos f$, $\cos g$, $\cos h$ auf die Normale der andern Seite, welche der bei der auf die Zerfällung der Biegungs-Momente nach den Haupt-Axen der Normalschnitte Bezug habenden Construction (§. 12.) dieser Abhandlung als bestimmt angenommenen Seite der Krümmungs-Ebene*) entspricht, beziehen will,

$$\cos f = -\frac{\partial y\partial^2 z - \partial z\partial^2 y}{k} = -\varrho\cdot\frac{\partial y\partial^2 z - \partial z\partial^2 y}{\partial s^2},$$

$$\cos g = -\frac{\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z}{k} = -\varrho\cdot\frac{\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z}{\partial s^2},$$

$$\cos h = -\frac{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}{k} = -\varrho\cdot\frac{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}{\partial s^2}$$

gesetzt werden müssen.

---

*) Derjenigen Seite nemlich, auf welcher der dem Krümmungshalbmesser entgegengesetzt liegende Theil mq der Durchschnittslinie der Krümmungs-Ebene mit der als Axe der u bezeichneten Haupt-Axe md des Normalschnitts den spitzen Winkel ξ bildet.

Für die Biegungsmomente μ, μ_1 in Bezug auf die Haupt-Axen *md*, *mc* (§. 12.) erhält man, wie in der angeführten Schrift (§. 115.) gezeigt ist, die Ausdrücke:

$$\mu = \frac{\varepsilon T \sin\xi}{\varrho}\Big(1 - \frac{p}{\varepsilon S}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\Big),$$

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon U \cos\xi}{\varrho}\Big(1 - \frac{p}{\varepsilon S}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\Big),$$

wo ε, ξ, ϱ die früher in dieser Abhandlung für sie angenommene Bedeutung haben, S den Flächen-Inhalt des Normalschnitts und T und U die Drehungsmomente des Normalschnitts $\int t^2 \partial i$, $\int u^2 \partial i$ in Bezug auf die Axen *md*, *mc* bezeichnen, so dafs

$$\mu \sin\xi + \mu_1 \cos\xi = \frac{\varepsilon}{\varrho}(1 - {}'p)(T \sin\xi^2 + U \cos\xi^2),$$

$$\mu \cos\mu - \mu_1 \sin\xi = \frac{\varepsilon}{\varrho}(1 - {}'p)(T - U)\cos\xi \sin\xi$$

ist, wenn zur Abkürzung $'p$ statt $\frac{p}{\varepsilon S}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$ gesetzt wird.

Da ferner p die einzige spannende Kraft ist, deren Angriffspunct mit dem Anfangspunct der Coordinaten und deren Richtung mit der Axe der y zusammenfällt, so ist in den Gleichungen $(K.)$ $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$, $P = R = 0$, $Q = p$, $a' = b' = c' = 0$; und diese Gleichungen werden, wenn man, wie in (§. 17.) y als die unabhängige Veränderliche und $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, $z_{,}$, $z_{,,}$, $z_{,,,}$ in der Bedeutung wie in eben diesem Paragraphen annimmt:

$$C.\left\{\begin{aligned}
&pz - \tau\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \varepsilon(1 - {}'p)(T\sin\xi^2 + U\cos\xi^2)\Big(\frac{\partial y}{\partial s}\Big)^3 z_{,,}\\
&\quad + \varepsilon(1 - {}'p)(T - U)\cos\xi\sin\xi\Big(\frac{\partial y}{\partial s}\Big)^4 (x_{,,} + z_{,}(z_{,}x_{,,} - x_{,}z_{,,})) = 0,\\
&-\tau\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \varepsilon(1 - {}'p)(T\sin\xi^2 + U\cos\xi^2)\Big(\frac{\partial y}{\partial s}\Big)^3 (z_{,}x_{,,} - x_{,}z_{,,})\\
&\quad - \varepsilon(1 - {}'p)(T - U)\cos\xi\sin\xi\Big(\frac{\partial y}{\partial s}\Big)^4 (x_{,}x_{,,} + z_{,}z_{,,}) = 0,\\
&-px - \tau\cdot\frac{\partial z}{\partial s} - \varepsilon(1 - {}'p)(T\sin\xi^2 + U)\cos\xi^2)\Big(\frac{\partial y}{\partial s}\Big)^3 x_{,,}\\
&\quad + \varepsilon(1 - {}'p)(T - U)\cos\xi\sin\xi\Big(\frac{\partial y}{\partial s}\Big)^4 (z_{,,} - x_{,}(z_{,}x_{,,} - x_{,}z_{,,})) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Man sieht, dafs, wenn $U = T$ ist, d. h. wenn sämmtliche durch den Centralpunct des Normalschnitts gelegte Axen Haupt-Axen sind, die Gleichungen einfacher werden, indem das letzte Glied jeder derselben verschwindet

und der Winkel ξ herausfällt; welche Bemerkung schon auf die Gleichungen (*K.*) Anwendung findet.

§. 21.

Man multiplicire die erste der Gleichungen (*K.*) oder (*L.*) mit $\frac{\partial x}{\partial s}$, die zweite mit $\frac{\partial y}{\partial s}$, die dritte mit $\frac{\partial z}{\partial s}$ und addire die Producte, so verschwinden, da

$$\cos f\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\cos g\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\cos h\cdot\frac{\partial z}{\partial s} \text{ und ebenso}$$

$$\cos f_1\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\cos g_1\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\cos h_1\cdot\frac{\partial z}{\partial s} \text{ gleich } \cos 90^\circ \text{ ist,}$$

die μ und μ_1 enthaltenden Glieder in der Summe, und man erhält aus den Gleichungen (*L.*) für das Torsionsmoment:

$$\tau = p\left(z\cdot\frac{\partial x}{\partial z}-x\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right);$$

unabhängig von U und T.

Wird dieser Werth von τ in die Gleichungen (*L.*) gesetzt, so giebt die erste derselben:

$$a.\quad -\frac{p}{s(1-'p)}(z+z_{,}(xx_{,}+zz_{,}))$$
$$=\frac{\partial y}{\partial s}z_{,,}(T\sin\xi^2+U\cos\xi^2)+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2(x_{,,}+z_{,}(z_{,}x_{,,}-x_{,}z_{,,}))\cos\xi\sin\xi(T-U);$$

die zweite:

$$b.\quad \frac{p}{s(1-'p)}(zx_{,}-xz_{,})$$
$$=\frac{\partial y}{\partial s}\cdot(z_{,}x_{,,}-x_{,}z_{,,})(T\sin\xi^2+U\cos\xi^2)-\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2(x_{,}x_{,,}+z_{,}z_{,,})\cos\xi\sin\xi(T-U);$$

die dritte:

$$c.\quad \frac{p}{s(1-'p)}(x+x_{,}(xx_{,}+zz_{,}))$$
$$=-\frac{\partial y}{\partial s}x_{,,}(T\sin\xi^2+U\cos\xi^2)+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2(z_{,,}-x_{,}(z_{,}x_{,,}-x_{,}z_{,,}))\cos\xi\sin\xi(T-U).$$

Wird die Gleichung (*a.*) von der Gleichung (*c.*) abgezogen, nachdem jene mit $z_{,}$, diese mit $x_{,}$ multiplicirt worden, so ergiebt sich:

$$d.\quad \frac{p}{s(1-'p)}(xx_{,}+zz_{,})$$
$$=-\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2(x_{,}x_{,,}+z_{,}z_{,,})(T\sin\xi^2+U\cos\xi^2)-\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2(z_{,}x_{,,}-x_{,}z_{,,})\cos\xi\sin\xi(T-U).$$

Es findet sich ferner aus (*b.* und *d.*):

$$e.\quad \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2(x_{,}x_{,,}-z_{,}z_{,,})$$

$$= -\frac{p}{\varepsilon(1-'p)}\cdot\frac{\frac{\partial s}{\partial y}(xx_{,}+zz_{,})(U\cos\xi^2+T\sin\xi^2)+(zx_{,}-xz_{,})\cos\xi\sin\xi(T-U)}{U^2\cos\xi^2+T^2\sin\xi^2},$$

$$f.\quad \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2(z_{,}x_{,,}-x_{,}z_{,,})$$

$$= \frac{p}{\varepsilon(1-'p)}\cdot\frac{\frac{\partial y}{\partial s}(zx_{,}-xz_{,})(T\sin\xi^2+U\cos\xi^2)-(xx_{,}+zz_{,})\cos\xi\sin\xi(T-U)}{T^2\sin\xi^2+U^2\cos\xi^2}.$$

Wird das Product der Gleichung (*e.*) mit $x_{,}$ zum Product der Gleichung (*f.*) mit $z_{,}$ addirt, und hierauf das Product der Gleichung (*f.*) mit $x_{,}$ vom Product der Gleichung (*e.*) mit $z_{,}$ abgezogen, so erhält man endlich:

$$M.\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 x_{,,} = -\frac{p}{\varepsilon(1-'p)}\left[\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{U\cos\xi^2+T\sin\xi^2}{U^2\cos\xi^2+T^2\sin\xi^2}(x+x_{,}(xx_{,}+zz'))\right. \\ \qquad\qquad\qquad \left. + z\cdot\frac{\cos\xi\sin\xi(T-U)}{T^2\sin\xi^2+U^2\cos\xi^2}\right], \\ \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 z_{,,} = -\frac{p}{\varepsilon(1-'p)}\left[\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{T\sin\xi^2+U\cos\xi^2}{T^2\sin\xi^2+U^2\cos\xi^2}(z+z_{,}(xx_{,}+zz_{,}))\right. \\ \qquad\qquad\qquad \left. - x\cdot\frac{\cos\xi\sin\xi(T-U)}{T^2\sin\xi^2+U^2\cos\xi^2}\right]; \end{cases}$$

welche Gleichungen mit den in der Schrift: „Über Gleichgewicht etc. §. 116." auf anderem Wege gefundenen Gleichungen übereinstimmen; nämlich mit

$$3.\quad \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 y''$$

$$= \frac{p}{\varepsilon(1-'p)}\left[\frac{\partial x}{\partial s}\left(\frac{\cos\chi^2}{U}+\frac{\sin\chi^2}{T}\right)(x+zz'+xy'^2)+zy'\cos\chi\sin\chi\left(\frac{1}{U}-\frac{1}{T}\right)\right],$$

$$4.\quad \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 z''$$

$$= \frac{-p}{\varepsilon(1-'p)}\left[\frac{\partial x}{\partial s}\left(\frac{\sin\chi^2}{T}+\frac{\cos\chi^2}{U}\right)y'(z-xz')-(x+zz')\cos\chi\sin\chi\left(\frac{1}{U}-\frac{1}{T}\right)\right],$$

in welchen

$$y',\ y''\ \text{statt}\ \frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$z',\ z''\ \text{statt}\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

gesetzt ist und der Winkel χ zum Winkel ξ in der durch die Gleichung

$\tang\chi = \frac{T}{U}\tang\xi$ ausgedrückten Beziehung steht; denn es ist

$$y' = \frac{1}{x_{,}},\quad z' = \frac{z_{,}}{x_{,}},\quad y'' = -\frac{x_{,,}}{x_{,}^3},\quad z'' = \frac{x_{,}z_{,,} - z_{,}x_{,,}}{x_{,}^3},\quad \frac{\partial x}{\partial s} = x_{,}\cdot\frac{\partial y}{\partial s};$$

aus $\tang\chi = \frac{T}{U}\tang\xi$ findet sich aber

$$\cos\chi\sin\chi\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{T}\right) = \frac{\cos\xi\sin\xi(T-U)}{T^2\sin\xi^2 + U^2\cos\xi^2},$$

$$\frac{\sin\chi^2}{T} + \frac{\cos\chi^2}{U} = \frac{T\sin\xi^2 + U\cos\xi^2}{T^2\sin\xi^2 + U^2\cos\xi^2};$$

und durch Substitution der einen dieser Ausdrücke für die anderen gehen aus den Gleichungen (3. und 4.) die Gleichungen (*M.*) hervor; und umgekehrt.

Mit dem aus den Gleichungen (*L.*) folgenden Ausdruck für das Torsionsmoment $\tau = p\left(z\cdot\frac{\partial x}{\partial s} - x\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)$ ist der in der angef. Schrift (§. 114. und 116.) für das Moment der in die Ebene des Normalschnitts fallenden Theilkräfte gegebene Ausdruck $om.p\cos\vartheta = \frac{p(z - xz')}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}$ gleichbedeutend.

Sollen endlich die im vorigen Paragraph über die Seite, an welcher das positive ∂s aus der Krümmungs-Ebene heraustritt, und die über das Zeichen von $\cos f$, $\cos g$ und $\cos h$ gemachten Voraussetzungen mit einander bestehen können, so mufs nach (§. 16.) $z_{,,}x_{,,,} - x_{,,}z_{,,,}$ eine positive Gröfse sein.

Setzt man zur Abkürzung

$$-\frac{p}{\varepsilon(1-'p)}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{T\sin\xi^2 + U^2\cos\xi^2}{T^2\sin\xi^2 + U^2\cos\xi^2} = v,\quad \frac{p}{\varepsilon(1-'p)}\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2\frac{(T-U)\cos\xi\sin\xi}{T^2\sin\xi^2 + U^2\cos\xi^2} = w,$$

so ist

$$x_{,,} = v(x + x_{,}(xx_{,} + zz_{,})) - wz,\qquad z_{,,} = v(z + z_{,}(xx_{,} + zz_{,})) + wx,$$

und man findet

$$x_{,,,} = \frac{\partial v}{\partial y}(x + x_{,}(xx_{,} + zz_{,})) + v(x_{,}(1 + x_{,}^2 + z_{,}^2 + xx_{,,} + zz_{,,}) + x_{,,}(xx_{,} + zz_{,})) - wz_{,} - \frac{\partial w}{\partial y}\cdot z,$$

$$z_{,,,} = \frac{\partial v}{\partial y}(z + z_{,}(xx_{,} + zz_{,})) + v(z_{,}(1 + x_{,}^2 + z_{,}^2 + xx_{,,} + zz_{,,}) + z_{,,}(xx_{,} + zz_{,})) + wx_{,} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot x,$$

$$z_{,,}x_{,,,} - x_{,,}z_{,,,} = (zx_{,} - xz_{,})\left[w^2 + v^2\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + v^3(x^2 + z^2 + (xx_{,} + zz_{,})^2)\right]$$
$$+ v^2w(xx_{,} + zz_{,})(x^2 + z^2 + (xx_{,} + zz_{,})^2) + \left(w\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)(x^2 + z^2 + (xx_{,} + zz_{,})^2).$$

Nach den Voraussetzungen der Construction ist $zx_{,}-xz_{,}$ (welches $=\frac{\tau}{p}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}$ ist), so wie $xx_{,}+zz_{,}$, positiv, und der Winkel χ ist gröfser als der Winkel ξ, oder T gröfser als u, daher w ebenfalls positiv; ferner ist, da ε jedenfalls im Verhältnifs zu p sehr grofs ist, v eine negative Gröfse von absolut sehr kleinem Werthe, so dafs auch der Factor, womit $zx_{,}-xz_{,}$ multiplicirt ist, positiv sein mufs. Die Gröfse $z_{,,}x_{,,,}-x_{,,}z_{,,,}$ wird daher nur dann negativ, wenn $w\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$ negativ und zugleich das dritte Glied des für jene Gröfse gefundenen Ausdrucks gröfser ist, als die Summe der beiden ersten Glieder. Tritt aber dieser Fall ein, so ist daraus zu folgern, dafs die Zeichen der zweideutigen Gröfsen, so wie sie bei der Construction der Gleichungen angenommen wurden, mit den übrigen Annahmen der Rechnung unvereinbar sind.

Ist $T=U$, so verschwindet w, und $z_{,,}x_{,,,}-x_{,,}z_{,,,}$ wird positiv.

§. 22.

Was die Beständigkeit des Torsions-Moments τ betrifft, so zeigt ***Poisson*** (I. No. 318.), indem er die für das Gleichgewicht des gebogenen Körpers abgeleiteten drei Gleichungen differentiirt, darauf die auf die Axe der x Bezug habende Gleichung mit $\frac{\partial x}{\partial s}$ und eben so die auf die Axen der y und z Bezug habenden Gleichungen mit $\frac{\partial y}{\partial s}$ und $\frac{\partial z}{\partial s}$ multiplicirt und die drei Producte addirt, dafs $\partial\tau$ für jeden Werth der Coordinaten gleich Null ist.

Wird dasselbe Verfahren auf die Gleichungen (*K.*) angewendet, so erhält man, weil $\int_{s\div 0} Y'(z-z')\beta S'\partial s'$ eben so viel ist als

$$z\int_{s\div 0}\beta YS\partial s-\int_{s\div 0} zY\beta S\partial s \quad \text{oder als} \quad \int_{s\div 0}\Big(\int_{s\div 0} Y\beta S\partial s\Big)\partial z,$$

indem die Buchstaben ohne Accent eben das bedeuten in Bezug auf x, y, z, wie jene mit Accent in Bezug auf $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, und weil $\int_{s\div 0} Z'(y-y')\beta S'\partial s'$ eben so viel ist als $\int_{s\div 0}\Big(\int_{s\div 0} Z\beta S\partial s\Big)\partial y$, u. s. w.:

$$\partial X_{,} = \partial z\int_{s\div 0} Y\beta S\partial s-\partial y\int_{s\div 0} Z\beta S\partial s,$$

$$\partial Y_{,} = \partial x\int_{s\div 0} Z\beta S\partial s-\partial z\int_{s\div 0} X\beta S\partial s,$$

$$\partial Z_{,} = \partial y\int_{s\div 0} X\beta S\partial s-\partial x\int_{s\div 0} Y\beta S\partial s,$$

und findet

$$\partial X_{,}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\partial Y_{,}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\partial Z_{,}\cdot\frac{\partial z}{\partial s} = 0;$$

desgleichen ist

$$\partial[Q(z-c')-R(y-b')]\frac{\partial x}{\partial s}+\partial[R(x-a')-P(z-c')]\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$+\partial[P(y-b')-Q(x-a')]\frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

Ferner findet sich, da $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2=1$ und

$$\frac{\partial x}{\partial s}\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial s}\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial s}\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s} = 0 \text{ ist:}$$

$$\partial\left(\tau\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\partial\left(\tau\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\partial\left(\tau\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial z}{\partial s} = \partial\tau,$$

und für

$$\partial[\cos f(\mu\sin\xi+\mu_1\cos\xi)]\frac{\partial x}{\partial s}+\partial[\cos g(\mu\sin\xi+\mu_1\cos\xi)]\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$+\partial[\cos h(\mu\sin\xi+\mu_1\cos\xi)]\frac{\partial z}{\partial s}$$

erhält man, da nach der Bezeichnung in (§. 15.) sowohl $a\partial x+b\partial y+c\partial z$, als $\partial a\partial x+\partial b\partial y+\partial c\partial z=0$ ist, ebenfalls Null.

Setzt man der Kürze wegen

$$\varepsilon\left(1-\frac{p}{\varepsilon S}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)(T-U)\cos\xi\sin\xi = w_1,$$

wo man sich nunmehr unter p die Resultirende vorzustellen hat, welche alle die Kräfte, durch welche die Schicht des Körpers am Punct m gespannt wird, haben würden, wenn ihre Richtungen in einem und demselben Puncte zusammenliefen, so ist nach (§. 14. und 20.):

$$\cos f_1(\mu\cos\xi-\mu_1\sin\xi) = -\frac{\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}}{\partial s}\cdot w_1,$$

$$\cos g_1(\mu\cos\xi-\mu_1\sin\xi) = -\frac{\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s}}{\partial s}\cdot w_1,$$

$$\cos h_1(\mu\cos\xi-\mu_1\sin\xi) = -\frac{\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s}}{\partial s}\cdot w_1,$$

und es ergiebt sich, da aus der Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s}}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s}}{\partial s} = 0$$

durch nochmalige Differentiation

$$\frac{\partial x}{\partial s}\partial\cdot\frac{\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial s}\partial\cdot\frac{\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s}}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial s}\partial\cdot\frac{\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s}}{\partial s}=-\left[\frac{\left(\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2}{\partial s}+\frac{\left(\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}{\partial s}+\frac{\left(\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2}{\partial s}\right]$$

folgt, und da

$$\cos f_1^2+\cos g_1^2+\cos h_1^2=\varrho^2\left[\left(\frac{\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s}}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s}}{\partial s}\right)^2\right]=1 \text{ ist:}$$

$$\partial\left(\frac{\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}}{\partial s}\cdot w_1\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\partial\left(\frac{\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s}}{\partial s}\cdot w_1\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\partial\left(\frac{\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s}}{\partial s}\cdot w_1\right)\frac{\partial z}{\partial s}=-\frac{w_1}{\varrho^2}\cdot\partial s,$$

und folglich

$$\partial\tau=-\frac{\partial s}{\varrho^2}\varepsilon\left(1-\frac{p}{\varepsilon S}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)(T-U)\sin\xi\cos\xi.$$

Man sieht aus diesem Ausdruck, dafs das Torsionsmoment τ nur in den Fällen constant ist, wenn entweder $T=U$ ist: d. h. wenn alle durch den Schwerpunct der Normalschnitte gehenden geraden Linien Haupt-Axen sind, oder wenn der Winkel $\xi=0$ oder $=90^0$ ist, d. h. wenn jeder Normalschnitt von der Krümmungs-Ebene in einer Haupt-Axe geschnitten wird. Findet keine dieser Bedingungen Statt, so ändert sich τ mit den Coordinaten, und das Differential $\partial\tau$ ist dem Unterschiede $T-U$ proportional, welcher erheblich sein kann und nach (§. 5.) z. B. $=\frac{1}{12}hg(h^2-g^2)$ ist, wenn die Normalschnitte die Gestalt eines Recht-Ecks haben, dessen Seiten h und g sind.

Die Beständigkeit des Torsionsmoments ist demnach in dem besondern Falle, wenn U und T unter sich gleich sind, eine Eigenthümlichkeit der durch Biegung entstehenden doppelten Krümmung, und als solche um so bemerkenswerther, da sie, wenn die spannenden Kräfte so am Körper angebracht sind, dafs Drehung (Torsion) ohne Biegung erfolgt oder dafs die Centrallinie gerade bleibt, in gleicher Allgemeinheit, wie wenn Biegung und Drehung mit einander verbunden sind, nicht mehr bestehen kann.

Es mag noch bemerkt werden, dafs Das, was hier über das Torsionsmoment gesagt ist, ebensowohl seine Gültigkeit hat, wenn die Normalschnitte, und folglich U, T, S, mit den Coordinaten sich verändern, als wenn sie in der ganzen Ausdehnung des Körpers sich gleich bleiben.

§. 23.

Für $U = T$ gehen die Gleichungen (*M.* §. 21.) in

$$N.\quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial s}\cdot x_{\prime\prime}\left(1-\frac{p}{\epsilon S}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right) = -\frac{p}{\epsilon U}(x+x_\prime(xx_\prime+zz_\prime)), \\ \frac{\partial y}{\partial s}\cdot z_{\prime\prime}\left(1-\frac{p}{\epsilon S}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right) = -\frac{p}{\epsilon U}(z+z_\prime(xx_\prime+zz_\prime)) \end{cases}$$

über, und die letztern Gleichungen sind gleichbedeutend mit den beiden folgenden, welche aus ihnen hervorgehen:

$$g.\quad \frac{x_\prime x_{\prime\prime}+z_\prime z_{\prime\prime}}{(1+x_\prime^2+z_\prime^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{p}{\epsilon S}\cdot\frac{1}{(1+x_\prime^2+z_\prime^2)}\right) = -\frac{p}{\epsilon U}(xx_\prime+zx_\prime),$$

$$h.\quad \frac{zx_{\prime\prime}-xz_{\prime\prime}}{(1+x_\prime^2+z_\prime^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(zx_\prime-xz_\prime)(x_\prime x_{\prime\prime}+z_\prime z_{\prime\prime})}{(1+x_\prime^2+z_\prime^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Das erste Integral der Gleichung (*h.*) ist

$$\frac{zx_\prime-xz_\prime}{(1+x_\prime^2+z_\prime^2)^{\frac{1}{2}}} = C \text{ oder}$$

$$h_1.\quad z\cdot\frac{\partial x}{\partial s}-x\cdot\frac{\partial z}{\partial s} = C;$$

welches mit der in (§. 21.) gefundenen Gleichung $\tau = p\left(z\cdot\frac{\partial x}{\partial s}-x\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)$ übereinstimmt, da $\partial\tau = 0$ ist.

Sind die Factoren $\frac{p}{\epsilon S}$ und $\frac{p}{\epsilon U}$ constant, so ist ferner das erste Integral der Gleichung (*g.*):

$$\frac{1}{(1+x_\prime^2+z_\prime^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{\epsilon S}\cdot\frac{1}{1+x_\prime^2+z_\prime^2} = \frac{p}{2\epsilon U}(x^2+z^2)+C' \text{ oder}$$

$$g_1.\quad \frac{\partial y}{\partial s}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{\epsilon S}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \frac{p}{2\epsilon U}(x^2+z^2)+C'.$$

Die Gleichungen (g_1. und h_1.) sind unter den bemerkten Beschränkungen zugleich die ersten Integrale der Gleichungen (*N.*); die zweiten Integrale derselben werden sich dagegen nicht in endlicher Form darstellen lassen.

Demnach müssen sich also auch die Gleichungen (8. und 9. §. 118.) der Schrift „Über Gleichgewicht und Bewegung etc." integriren lassen, und insbesondere ist die Gleichung $z'' = -\frac{y'y''(z-xz')}{x+zz'+xy'^2}$ daselbst identisch mit der Gleichung (*h.*).

§. 24.

Die von *Poisson* für das Gleichgewicht eines gebogenen Körpers entwickelten Gleichungen sollen nach ihm auch auf einen Körper mit ursprünglich gekrümmter Centrallinie anwendbar sein, wenn man in dem Ausdrucke für das Biegungsmoment μ (unter r den Krümmungshalbmesser am Puncte m vor der Biegung verstanden) $\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}$ statt $\frac{1}{\varrho}$ setzt. Allein die Richtigkeit dieses Ausdrucks unterliegt in diesem Falle noch gröfsern Beschränkungen, als in dem Falle eines Körpers mit ursprünglich gerader Centrallinie. In den Schichten, in welche man sich den Körper durch winkelrecht auf die Centrallinie gelegte Schnitte getheilt vorstellt, haben die Fiberntheile nicht mehr die gleiche Länge, wie bei ursprünglich gerader Centrallinie, und die Spannungen zweier Fiberntheile einer Schicht verhalten sich daher nicht einfach wie ihre Abstände von der Biegungs-Axe, sondern das Verhältnifs ihrer Spannungen ist zusammengesetzt aus dem Verhältnisse dieser Abstände und aus dem umgekehrten Verhältnisse der Längen der Fiberntheile oder ihrer Abstände von der geraden Linie, in welcher zwei aufeinander folgende Normalschnitte sich schneiden. Auch bei einem solchen Körper hat im Allgemeinen jeder Normalschnitt zwei Haupt-Axen ähnlicher Art, wie bei gerader Centrallinie: der Durchschnittspunct derselben ist aber nicht der Schwerpunct des Normalschnitts, sondern ein anderer Punct, dessen Lage von dem Durchschnitte des Normalschnitts mit der ursprünglichen Krümmungs-Ebene abhangt, welcher indessen zugleich derjenige Punct ist, um den die Drehung (Torsion) des Normalschnitts Statt findet. Die Momente der Biegung müssen daher ebenfalls auf die beiden Haupt-Axen bezogen werden, und durch die Bedingung, dafs dieses nur auf eine Axe geschehen dürfe, oder dafs alle durch denselben Punct gezogenen geraden Linien Haupt-Axen seien, wird man hier zu einer Abhängigkeit der Gröfse des Normalschnitts (z. B. des Halbmessers, wenn er ein Kreis ist) vom Krümmungshalbmesser r geführt.

Sind indessen die Ausdrücke für die auf beide Haupt-Axen bezüglichen Biegungsmomente μ, μ_1 richtig bestimmt, so lassen sich die Gleichungen (*K.*) auch auf Körper mit ursprünglich krummer Centrallinie anwenden. In Betreff der Darstellung dieser Ausdrücke wird auf die angeführte Schrift: „Über Gleichgewicht etc. Cap. V." verwiesen.

Die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts fester Körper müssen, wie *Poisson* im „Traité de Mécanique I. No. 261." selbst bemerkt, auch für

solche Systeme materieller Puncte noch bestehen, deren Theile nicht auf unveränderliche Weise unter sich verbunden sind; aber diese Bedingungen sind dann nicht mehr ausreichend, sondern es treten für das Gleichgewicht eines jeden solchen Systems noch weitere, ihm eigenthümliche Bedingungen hinzu. Solcher weiterer Bedingungen findet insbesondere für das Gleichgewicht gebogener elastischer fester Körper eine gröfsere Zahl Statt, welche die Rechnung nicht aufser Acht lassen darf, wenn sie zu richtigen Ergebnissen führen soll.

§. 25.

Der in (§. 117.) der angeführten Schrift für das Differential des Winkels χ entwickelte Ausdruck bedarf ebenfalls einer Berichtigung. Man findet nämlich, dafs der für $\frac{\partial . pms}{\partial x}$ abgeleitete Werth mit demjenigen, welcher aus $\sin pms$ und $\cos pms$ (§. 116.) sich ergiebt, nur dann übereinstimmt, wenn $z''=0$, oder auch, wenn $z''y'''-y''z'''=0$ ist; d. h. wenn entweder die Krümmungs-Ebene am Puncte m mit der Richtung der biegenden Kraft (der Axe der y) gleichlaufend (§. 119.), oder wenn der Punct m ein Wendungspunct in Beziehung auf die doppelte Krümmung ist; daher auch der für $\frac{\partial . ump}{\partial x}$ gegebene Ausdruck (§. 117.) nicht, wie er sollte, verschwindet, wenn man den Winkel umq constant gleich Null oder $z''=-\frac{y'y''(z-xz')}{x+zz'+xy'^2}$ setzt.

Der analytische Werth des Winkels $\partial\chi$ ergiebt sich aber aus folgenden Betrachtungen. Es ist (§. 116.) $\chi=\xi+umq$, daher $\partial\chi=\partial\xi+\partial\cdot umq$; aber auch, wie (§. 117.) gezeigt, $\partial\chi=\partial\gamma+\partial . umq$, folglich ist

$$\partial\xi=\partial\gamma=-\left(z\cdot\frac{\partial x}{\partial s}-x\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{p}{\eta S\varrho^2\partial i}\cdot\partial s'.$$

Nun erhält man ferner für eine ursprünglich gerade Centrallinie (§. 115.):

$$\operatorname{tang}\chi=\frac{T}{U}\operatorname{tang}\xi,$$

daher

$$\partial\cdot\operatorname{tang}\chi \quad\text{oder}\quad \partial\chi(1+\operatorname{tang}\chi^2)=\partial\cdot\frac{T}{U}\operatorname{tang}\xi+\frac{T}{U}\cdot\partial\xi(1+\operatorname{tang}\xi^2) \quad\text{und}$$

$$\partial\chi=\frac{(U\partial T-T\partial U)\operatorname{tang}\chi+(T^2+U^2\operatorname{tang}\chi^2)\partial\xi}{UT(1+\operatorname{tang}\chi^2)}$$

$$=\frac{U\partial T-T\partial U}{UT}\sin\chi\cos\chi+\frac{T^2\cos\chi^2+U^2\sin\chi^2}{UT}\cdot\partial\xi$$

$$=\frac{U\partial T-T\partial U}{UT}\sin\chi\cos\chi-\frac{T^2\cos\chi^2+U^2\sin\chi^2}{UT}\left(z\cdot\frac{\partial x}{\partial s}-x\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{p}{\eta S\varrho^2\partial i}\cdot\partial s'.$$

Es ist indessen besser, den Winkel ξ statt des Winkels χ in die Gleichungen aufzunehmen, weil dann einfach $\partial\xi = \partial\gamma$ ist, und weil für $U = T$, für eine gerade Centrallinie $z \cdot \frac{\partial x}{\partial s} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$, die Centrallinie mag ursprünglich gerade oder krumm sein, eine constante Gröfse ist, der Winkel ξ folglich integrirt sich darstellen läfst. (Die Bezeichnungen haben hier dieselbe Bedeutung wie in der angeführten Schrift.)

Ulm im December 1847.

16.

Die Doppel-Integrale

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(ax^m \pm by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(ax^m \pm by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy;$$

ihre gegenseitigen Beziehungen und die Reduction derselben auf einfache bestimmte Integral-Ausdrücke.

(Von dem Herrn Prof. *Raabe* in Zürich.)

1.

Der synthetische Theil der vorliegenden Abhandlung läuft auf die Angabe der beiden Doppel-Integrale

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m + y^n)dx\,dy,\quad \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m - y^n)dx\,dy$$

hinaus. Von dem ersteren habe ich im 28. Bande dieses Journals gehandelt. Hier soll von dem letzteren die Rede sein.

Stellt man der Kürze wegen die Gleichung

$$(1.)\quad \lambda = \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m - y^n)dx\,dy$$

auf, wo m und n reelle positive Zahlen sind und $\varphi(x^m - y^n)$ eine beliebige Function von $x^m - y^n$ ist; so kann λ als von einem einfachen Integral abhängig dargestellt werden, wenn man die Variabeln x und y durch zwei andere u und v mittels folgender Gleichungen ersetzt:

$$(2.)\quad x^m = \frac{v\cos u^2}{\cos 2u},\quad y^n = \frac{v\sin u^2}{\cos 2u}.$$

Um die Integrationsgrenzen dieser neuen Variabeln u und v zu erfahren, eliminire man aus den vermittelnden Gleichungen zuerst v, was

$$(3.)\quad \operatorname{tang} u^2 = \frac{y^n}{x^m}$$

giebt, und bestimme die Grenzen von u nach denen von x. Erwägt man, dafs y^n im ganzen Bereiche der Integrationsgrenzen von y positiv bleibt, so finden sich für $x = 0$ und $x = \infty$, da m positiv angenommen ist, bezüglich

die Werthe $u = \frac{1}{2}\pi$ und $u = 0$; so dafs in Beziehung auf u, von $u = \frac{1}{2}\pi$ bis $u = 0$ zu integriren ist.

Die Integrationsgrenzen von v sind in dem vorliegenden Falle unmittelbar aus der zweiten Gleichung in (2.) (welche von x frei ist) nach denen von y zu bestimmen. Drückt man diese Gleichung wie folgt aus:

$$v = \frac{\cos 2u}{\sin u^2} \cdot y^n,$$

so ist, da auch n positiv angenommen wurde, der untere Grenzwerth von v, nämlich der, welcher der Annahme $y = 0$ entspricht, ebenfalls $= 0$. Der obere Grenzwerth von v, oder der zu $y = \infty$ gehörige ist, aber wegen des Factors $\cos 2u$, der von $u = \frac{1}{2}\pi$ bis $u = \frac{1}{4}\pi$ negativ und von $u = \frac{1}{4}\pi$ bis $u = 0$ positiv ist, nicht derselbe für jedes dieser Intervalle; für das erstere Intervall ist $-\infty$ und für das letztere $+\infty$ der obere Grenzwerth von v.

Diesemnach geht die Gleichung (1.), nach Einführung der neuen Variabeln, in

$$\lambda = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \int_0^{-\infty} \varphi(v) \Delta \, dv \, du + \int_{\frac{1}{4}\pi}^{0} \int_0^{\infty} \varphi(v) \Delta \, dv \, du$$

über, wo Δ nach der Gleichung

$$\Delta = \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \cdot \frac{dy}{du},$$

oder im vorliegenden Falle bequemer nach der Gleichung

$$\frac{du}{dy} \cdot \Delta = -\frac{dx}{dv}$$

zu bestimmen ist. In dieser letzten Gleichung stellt $\frac{du}{dy}$ den aus (3.) gefolgerten partiellen Differentialquotienten von u nach y, und $\frac{dx}{dv}$ den aus der ersten der Gleichungen (2.) gefolgerten partiellen Differentialquotienten von x nach v vor.

So erhält man

$$\Delta = -\frac{2}{mn} \cdot v^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} \cdot \frac{\cos u^{\frac{2}{m} - 1} \sin u^{\frac{2}{n} - 1}}{\cos 2u^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}},$$

und die vorige Bestimmungsgleichung von λ geht in

$$\lambda = \frac{2}{mn} v \left(M \int_0^{\infty} v^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} \varphi(v) \, dv + M' \int_0^{\infty} v^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} \varphi(-v) \, dv \right)$$

über, wo der Kürze wegen

$$M = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos u^{\frac{2}{m}-1} \sin u^{\frac{2}{n}-1}}{\cos 2u^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} du, \quad M' = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin u^{\frac{2}{m}-1} \cos u^{\frac{2}{n}-1}}{\cos 2u^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} du$$

gesetzt worden ist.

Ersetzt man ferner die Variable u durch eine neue w mittels der Gleichung

$$\cos 2u = \frac{1}{1+2w},$$

so ergiebt sich:

$$(1'.) \quad \lambda = \frac{1}{mn} \int_0^\infty \frac{w^{\frac{1}{m}-1}}{(1+w)^{1-\frac{1}{m}}} dw \cdot \int_0^\infty v^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} \varphi(v)\, dv$$
$$+ \frac{1}{mn} \int_0^\infty \frac{w^{\frac{1}{m}-1}}{(1+w)^{1-\frac{1}{n}}} dw \cdot \int_0^\infty v^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} \varphi'(v)\, dv;$$

wo die Functionen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ mittels der Gleichung

$$4. \quad \varphi'(x) = \varphi(-x)$$

zusammenhangen. Die weitere Entwicklung dieses Ergebnisses unterbrechen wir durch eine kleine, auf den Gegenstand Bezug habende Nebenbetrachtung, und werden sie in (§. 3.) wieder aufnehmen.

2.

Die in der Gleichung (1'.) auf die Variable w bezogenen bestimmten Integrale haben wegen der unendlichgrofs werdenden obern Integrationsgrenze, wie bekannt, endliche oder unendlichgrofs werdende Werthe, je nachdem die Reihen

$$\frac{1^{\frac{1}{n}-1}}{2^{1-\frac{1}{m}}} + \frac{2^{\frac{1}{n}-1}}{3^{1-\frac{1}{m}}} + \frac{3^{\frac{1}{n}-1}}{4^{1-\frac{1}{m}}} + \frac{4^{\frac{1}{n}-1}}{5^{1-\frac{1}{m}}} + \text{in inf.},$$
$$\frac{1^{\frac{1}{m}-1}}{2^{1-\frac{1}{n}}} + \frac{2^{\frac{1}{m}-1}}{3^{1-\frac{1}{n}}} + \frac{3^{\frac{1}{m}-1}}{4^{1-\frac{1}{n}}} + \frac{4^{\frac{1}{m}-1}}{5^{1-\frac{1}{n}}} + \text{in inf.}$$

zu den convergenten oder divergenten gehören. Untersucht man Dieses nach den in der Nr. 123 und 126. meiner Differential- und Integral-Rechnung mitgetheilten Sätzen, so findet sich, dafs die Reihen convergent sind, wenn die

reellen positiven Zahlen m und n der Ungleichheit $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$ genügen; bei jeder andern Verfügung über m und n gehören sie zu den divergenten Reihen. Es haben demnach die auf w bezogenen bestimmten Integrale in der Gleichung (1'.) nur wenn $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$ ist endliche Werthe, und werden unendlichgrofs, wenn für die reellen positiven Gröfsen m und n,

$$\alpha. \quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geqq 1 \text{ ist.}$$

Dieses vorausgeschickt, ergiebt sich folgender Satz:

„Trifft die Bedingung (α.) ein, und sind die Functionen $\varphi(x)$ und $-\varphi'(x)$ „unter einander verschieden: so ist, unter der Annahme, dafs die be- „stimmten Integrale

$$(\beta.) \quad \int_0^\infty v^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}\varphi(v)\,dv, \quad \int_0^\infty v^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}\varphi'(v)\,dv$$

„von Null verschiedene Werthe haben, nothwendig $\lambda=\infty$. Ist umge- „kehrt die Gröfse λ in (1'.) unter denselben Prämissen endlich, oder gar „unendlichklein werdend, so müssen die Werthe der bestimmten Integrale „in (β.) nothwendig Null sein."

Setzen wir die besondern Fälle

$$m=n=2, \quad \varphi(x)=\cos x, \quad \text{also auch} \quad \varphi'(x)=\cos x,$$

in Übereinstimmung mit den hypothetischen Theilen obiger Aussage, so wird unter der Annahme

$$\int_0^\infty \cos v\,dv \gtrless 0$$

nothwendig

$$\lambda=\int_0^\infty\int_0^\infty \cos(x^2-y^2)\,dx\,dy=\infty$$

sein; und umgekehrt, wenn

$$\lambda=\int_0^\infty\int_0^\infty \cos(x^2-y^2)\,dx\,dy<\infty,$$

d. h. wenn λ endlich oder unendlichklein werdend ist, mufs nothwendig die Gleichung

$$(\gamma.) \quad \int_0^\infty \cos v\,dv=0$$

Statt finden. Nun stellt sich in der That λ als endliche Gröfse dar, denn es ist

$$\lambda=\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx.\int_0^\infty \cos(y^2)\,dy+\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx.\int_0^\infty \sin(y^2)\,dy$$

oder

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Daher besteht wirklich die Gleichung $(\gamma.)$. Setzt man noch daselbst $\frac{1}{2}\pi - v$ statt v und addirt zu dem Ergebnisse die Gleichung $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin v\,dv = 1$, so ergiebt sich

$$(\gamma'.)\qquad \int_0^\infty \sin v\,dv = 1;$$

was auf demselben Grunde wie das Obige $(\gamma.)$, nämlich auf der Zulässigkeit der Gleichungen

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}$$

beruhet.

3.

Dem Vorigen zufolge haben die auf w sich beziehenden bestimmten Integrale in $(1'.)$ unter der Annahme $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$ endliche Werthe. Gehen wir nun von dieser Annahme aus, so sind besagte Integrale durch die Function „*Gamma* (Γ)" darstellbar und man erhält:

$$\int_0^\infty \frac{w^{\frac{1}{n}-1}}{(1+w)^{1-\frac{1}{m}}}\,dw = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)},$$

$$\int_0^\infty \frac{w^{\frac{1}{m}-1}}{(1+w)^{1-\frac{1}{n}}}\,dw = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$$

Nach einer bekannten Eigenschaft von Γ ist aber

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

wo $a<1$ ist, und da auch gegenwärtig sowohl $\frac{1}{m}<1$ als $\frac{1}{n}<1$ ist, so ist

$$\int_0^\infty \frac{w^{\frac{1}{n}-1}}{(1+w)^{1-\frac{1}{m}}}\,dw = \frac{\sin\frac{1}{m}\pi}{\sin\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)},$$

$$\int_0^\infty \frac{w^{\frac{1}{m}-1}}{(1+w)^{1-\frac{1}{n}}}\,dw = \frac{\sin\frac{1}{n}\pi}{\sin\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}.$$

Führt man diese Bestimmungen in (1'.) ein, so erhält man, nach Restitution des Werthes von λ aus der Gleichung (1.), folgende Reductionsgleichung:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m - y^n)\,dx\,dy = \frac{1}{mn}\cdot\frac{\sin\frac{1}{m}\pi}{\sin\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\int_0^\infty v^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}\varphi(v)\,dv$$

$$+\frac{1}{mn}\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}\pi}{\sin\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\int_0^\infty v^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}\varphi'(v)\,dv.$$

Werden hier links vom Gleichheitszeichen die Integrationsvariabeln x und y bezüglich durch $x^p.\sqrt[m]{a}$ und $y^q.\sqrt[n]{b}$ ersetzt, wo p, q, a, b ebenfalls reelle positive Zahlen sind, so bleiben die Integrationsgrenzen unverändert, und wenn hierauf noch die reellen und positiven Constanten m und n bezüglich durch $\frac{m}{p}$ und $\frac{n}{q}$ ersetzt werden, wo also

$$(\alpha'.)\quad \frac{p}{m}+\frac{q}{n}<1$$

sein mufs, so stellt sich folgende allgemeinere Reductionsgleichung heraus:

$$(1.)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(ax^m - by^n)\,x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{mn}\cdot\frac{f\left(\frac{p}{m},\frac{q}{n}\right)}{\sin\left(\frac{p}{m}+\frac{q}{n}\right)\pi}\left\{\sin\frac{p\pi}{m}\int_0^\infty v^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}-1}\varphi(v)\,dv+\sin\frac{q\pi}{n}\int_0^\infty v^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}-1}\varphi'(v)\,dv\right\};$$

wo der Kürze wegen

$$(5.)\quad f\left(\frac{p}{m},\frac{q}{n}\right) = \frac{1}{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{n}}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+\frac{q}{n}\right)}$$

gesetzt worden ist, wo ferner die Functionen $\varphi(v)$ und $\varphi'(v)$ durch die Gleichung (4.) mit einander zusammenhangen, und wo die Constanten a, b, m, n, p, q sämmtlich reell und positiv sind, von denen aber die vier letztern der Bedingung in (α'.) nachkommen müssen.

Um zu dem in der Überschrift bezeichneten Ziel zu gelangen, nehmen wir noch ein Resultat aus der Abhandlung im 28. Bande dieses Journals auf (S. die Specialisirung der allgemeinen Gleichungen (I. und II.) *) Seite 27

---

*) Bei der Gleichung (I.) a. a. O. ist durch Druckfehler rechts vom Gleichheitszeichen

durch die Annahme $p=2$). Dasselbe läfst sich leicht wie folgt ausdrücken:

$$\text{(II.)} \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(ax^m+by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy = \frac{1}{mn}\cdot f\left(\frac{p}{m},\frac{q}{n}\right)\int_0^\infty v^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}-1}\varphi(v)dv;$$

wo $f\left(\frac{p}{m},\frac{q}{n}\right)$ dieselbe Bedeutung hat wie oben in (I.), wo aber die reellen positiven Constanten a, b, m, n, p, q an keine Beschränkung gebunden sind.

4.

Wir können nunmehr die Doppel-Integrale links in den Gleichungen (I. und II.) in gegenseitiger Abhängigkeit darstellen, so dafs sich das eine mit Hülfe des andern, und umgekehrt, auf einfache Integral-Ausdrücke bringen läfst.

Unmittelbar aus den Gleichungen (I. und II.) läfst sich, unter Zugrundelegung der Gleichung (4.), folgende Gleichung entnehmen:

$$\text{(III.)} \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(ax^m-by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy$$

$$= \frac{\sin\frac{p\pi}{m}}{\sin\left(\frac{p}{m}+\frac{q}{n}\right)\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(ax^m+by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy$$

$$+ \frac{\sin\frac{q\pi}{n}}{\sin\left(\frac{p}{m}+\frac{q}{n}\right)\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi'(ax^m+by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy.$$

Vertauscht man hier die Functionen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ mit einander, so erhält man auch:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi'(ax^m-by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy$$

$$= \frac{\sin\frac{q\pi}{n}}{\sin\left(\frac{p}{m}+\frac{q}{n}\right)\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(ax^m+by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy$$

$$+ \frac{\sin\frac{p\pi}{m}}{\sin\left(\frac{p}{m}+\frac{q}{n}\right)\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi'(ax^m+by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy;$$

---

die untere Integrationsgrenze 0 vergessen; eben so fehlt im Nenner rechts vom Gleichheitszeichen in der Gleichung (II.) das Functionszeichen Γ vor dem Ausdrucke

$$\frac{r_1}{n_1}+\frac{r_2}{n_2}+\dots\frac{r_p}{n_p}.$$

und wenn diese Gleichung mit der vorigen, um $\varphi'(ax^m+by^n)$ wegzuschaffen, verbunden wird, so erhält man die zur vorigen inverse Gleichung:

$$\text{(IV.)}\quad \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(ax^m+by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy$$

$$=\frac{\sin\frac{p\pi}{m}}{\sin\left(\frac{p}{m}-\frac{q}{n}\right)\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(ax^m-by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy$$

$$-\frac{\sin\frac{q\pi}{n}}{\sin\left(\frac{p}{m}-\frac{q}{n}\right)\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi'(ax^m-by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy;$$

wo, wie in der obigen (III.), die reellen positiven Constanten m, n, p, q der Ungleichheit in (α'.) nachkommen müssen.

Auch ist hier noch der specielle Fall, $\frac{p}{m}=\frac{q}{n}$ besonders zu betrachten. Setzt man nämlich

$$\frac{p}{m}=\frac{q}{n}=\lambda,$$

wo vermöge der Ungleichheit in (α'.) $\lambda<\frac{1}{2}$ sein mufs, so geben die vorhergehenden Ergebnisse in (III.), wenn man noch x^m durch x und y^n durch y ersetzt, Folgendes:

$$\text{(V.)}\quad \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(ax-by)x^{\lambda-1}y^{\lambda-1}dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2\cos\lambda\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \{\varphi(ax+by)+\varphi'(ax+by)\}x^{\lambda-1}y^{\lambda-1}dx\,dy;$$

wo, wie schon gesagt, $\lambda<\frac{1}{2}$ sein mufs. Vertauscht man φ mit φ', so ergiebt sich

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(ax-by)x^{\lambda-1}y^{\lambda-1}dx\,dy=\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(by-ax)x^{\lambda-1}y^{\lambda-1}dx\,dy;$$

wodurch die Gleichung (IV.) für die gegenwärtigen Annahmen in eine identische Gleichung übergeht.

5.

Um die Doppel-Integrale auf einfache zu bringen, in dem Fall, wo die Integrationsgrenzen beider Variabeln $-\infty$ und $+\infty$ sind, bedienen wir uns folgender allgemeinen Umstellungsgleichung

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} F(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} F(x,y)\,dx\,dy + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} F(-x,y)\,dx\,dy$$
$$+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} F(x,-y)\,dx\,dy + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} F(-x,-y)\,dx\,dy,$$

in welcher $F(x,y)$ jede beliebige Function von x und y bezeichnen kann.

Während in sämmtlichen obigen Resultaten die Exponenten m und n in $\varphi(ax^m \pm by^n)$ auch gebrochene und sogar irrationale Zahlen sein durften, sind sie hier lediglich als ganze positive Zahlen zu behandeln; die übrigen Constanten aber können in der ihnen bis jetzt beigelegten Allgemeinheit beibehalten werden.

Dieses vorausgeschickt, setzen wir noch zur Vereinfachung:

$$(6.)\quad \begin{cases} S_{m,n} = \varphi(ax^m + by^n)x^{p-1}y^{q-1}, \\ S'_{m,n} = \varphi'(ax^m + by^n)x^{p-1}y^{q-1}, \end{cases}$$

wo die Functionen φ und φ' durch die Gleichung (4.) einander gegenseitig bestimmen. Dann ergeben sich, in Rücksicht auf die Gleichung (III.), zunächst folgende Relationen:

$$(\text{VI.})\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(ax^{2n} + by^{2n})x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy$$
$$= \{1-(-1)^p\}\{1-(-1)^q\}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} S_{2m,2n}\,dx\,dy,$$

$$(\text{VI}'.)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(ax^{2m} - by^{2n})x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy$$
$$= \frac{\{1-(-1)^p\}\{1-(-1)^q\}}{\sin\left(\frac{p}{2m}+\frac{q}{2n}\right)\pi}\left\{\sin\frac{p\pi}{2m}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} S_{2m,2n}\,dx\,dy + \sin\frac{q\pi}{2n}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} S'_{2m,2n}\,dx\,dy\right\},$$

wo in den letztern $\frac{p}{2m}+\frac{q}{2n}<1$ sein mufs. Ferner erhält man:

$$(\text{VII.})\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(ax^{2m} \pm by^{2n+1})x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy$$
$$= (\pm 1)^{q-1}\{1-(-1)^p\}\left\{1+(-1)^{q-1}\frac{\sin\frac{p\pi}{2m}}{\sin\left(\frac{p}{2m}+\frac{q}{2n+1}\right)\pi}\right\}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} S_{2m,2n+1}\,dx\,dy$$
$$+(\mp 1)^{q-1}\{1-(-1)^p\}\frac{\sin\frac{q\pi}{2n+1}}{\sin\left(\frac{p}{2m}+\frac{q}{2n+1}\right)\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} S'_{2m,2n+1}\,dx\,dy,$$

$$(\text{VII}'.)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(ax^{2m+1}\pm by^{2n})x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy$$

$$= (\pm1)^{p-1}\{1-(-1)^q\}\left\{1+(-1)^{p-1}\frac{\sin\frac{q\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{p}{2m+1}+\frac{q}{2n}\right)\pi}\right\}\int_0^\infty\int_0^\infty S'_{2m+1,2n}\,dx\,dy$$

$$+(\mp1)^{p-1}\{1-(-1)^q\}\frac{\sin\frac{p\pi}{2m+1}}{\sin\left(\frac{p}{2m+1}+\frac{q}{2n}\right)\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty S'_{2m+1,2n}\,dx\,dy;$$

wo überall entweder das obere oder das untere der Doppelzeichen $\pm$, $\mp$ zu nehmen ist, und wo in (VII.) $\frac{p}{2m}+\frac{q}{2n+1}<1$ und in (VII'.) $\frac{p}{2m+1}+\frac{q}{2n}<1$ sein mufs. Endlich erhält man:

$$(\text{VIII.})\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(ax^{2m+1}\pm by^{2n+1})x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy$$

$$= (\pm1)^{q-1}A\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty S_{2m+1,2n+1}\,dx\,dy+(-1)^{p+q}\int_0^\infty\int_0^\infty S'_{2m+1,2n+1}\,dx\,dy\right\};$$

wo ebenfalls das obere oder das untere des Doppelzeichens $\pm$ zu nehmen ist, und wo der Kürze wegen

$$(7.)\quad A = 1+(-1)^{q-1}\frac{\sin\frac{p\pi}{2m+1}}{\sin\left(\frac{p}{2m+1}+\frac{q}{2n+1}\right)\pi}+(-1)^{p-1}\frac{\sin\frac{q\pi}{2n+1}}{\sin\left(\frac{p}{2m+1}+\frac{q}{2n+1}\right)\pi}$$

gesetzt ist; welches Ergebnifs jedoch nur für $\frac{p}{2m+1}+\frac{q}{2n+1}<1$ Statt findet.

Die Doppel-Integrale rechts in (VI. bis VIII.) sind mittels der Gleichung (II.) sämmtlich durch einfache Integrale darstellbar. Nämlich es ist

$$(\text{IX.})\quad \begin{cases}\int_0^\infty\int_0^\infty S_{m,n}\,dx\,dy = \frac{1}{mn}f\left(\frac{p}{m},\frac{q}{n}\right)\int_0^\infty v^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}-1}\varphi(v)\,dv,\\ \int_0^\infty\int_0^\infty S'_{m,n}\,dx\,dy = \frac{1}{mn}f\left(\frac{p}{m},\frac{q}{n}\right)\int_0^\infty v^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}-1}\varphi'(v)\,dv;\end{cases}$$

wo $f\left(\frac{p}{m},\frac{q}{n}\right)$ durch die Gleichung (5.) gegeben und nach der Gleichung (4.) $\varphi'(v)=\varphi(-v)$ ist. Demnach ist in diesen Gleichungen (IX.) statt m und n der Reihe nach

$2m$ und $2n$, $2m$ und $2n+1$, $2m+1$ und $2n$, $2m+1$ und $2n+1$

zu setzen und die Ergebnisse sind in die obigen Gleichungen (VI. bis VIII.) einzuführen, wodurch das Doppel-Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(ax^m \pm by^n)\,x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy$$

bei jeder Verfügung über die ganzen und positiven Zahlen m und n, bei welcher a, b, p und q beliebige positive reelle Zahlen bleiben, von der Ausmittelung der einfachen bestimmten Integrale

$$\int_0^{\infty} v^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}-1}\varphi(v)\,dv, \qquad \int_0^{\infty} v^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}-1}\varphi'(v)\,dv,$$

abhängig wird. Hierbei ist nicht aufser Acht zu lassen, dafs die reellen positiven Gröfsen m, n, p, q den bei jeder der Gleichungen von (VI. bis VII.) angemerkten Ungleichheiten zu entsprechen haben. Ferner leuchtet aus (Nr. 3.), wo die Constanten a, b, p und q zuerst eingeführt wurden, ein, dafs keine derselben gleich Null angenommen werden darf. Eben so wenig dürfen die Gröfsen m und n in den Gleichungen (VI. und VI'.) $=0$ gesetzt werden; ein Gleiches findet für die Gröfse m in (VII.) und für die Gröfse n in (VII'.) Statt; hingegen kann man in (VII.) $n=0$, so wie in (VII'.) $m=0$, und endlich in (VIII.) sowohl $m=0$ als $n=0$ setzen.

Zürich, im October 1847.

17.
Über den richtigen Gebrauch vieldeutiger Functionen bei der Ermittelung bestimmter Integrale.

(Von dem Herrn Prof. *Raabe* in Zürich.)

I.

Wenn F das Zeichen einer vieldeutigen, f das einer eindeutigen Function, ferner

$$d.F(f(x)) = \varphi(x)dx$$

und auch $\varphi(x)$ eine eindeutige Function von x ist, was folgende unbestimmte Integralgleichung

$$\int\varphi(x)dx = F(f(x)) + \text{Const.}$$

giebt, so hat man nach Nr. 132—134. des ersten Bandes meiner Differential- und Integralrechnung, bei der Ermittelung von u aus der Gleichung

$$u = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

zuerst die vieldeutige Function $F(f(x))$ durch eine eindeutige, welche dafür eine innerhalb eines gewissen Umfanges willkürliche Gröfse ϱ enthält, zu ersetzen; und wenn diese eindeutige Function durch $f'(\varrho, x)$ vorgestellt wird, so dafs auch

$$d.f'(\varrho, x) = \varphi(x)dx$$

ist, wo ϱ_g irgend einen speciellen, oder auch ganz willkürlichen Werth von ϱ bezeichnet, so ist

$$(A.) \qquad u = \int_a^b \varphi(x)dx = f'(\varrho_g, b) - f'(\varrho_g, a).$$

Dieses an sich ganz richtige Ergebnifs hat in der Anwendung einige Schwierigkeiten, die lediglich in der Nichtdarstellbarkeit einer Function wie $f'(\varrho, x)$ liegen, welche vermöge der Willkürlichkeit von ϱ die vieldeutige Function $F(f(x))$ für alle Werthe von x ersetzen soll. Bei den bekannteren vieldeutigen Functionen arc sin, arc tang, $\sqrt[m]{}$, log müssen die Werthe von x, für welche $f(x)$ positiv ist, von denen, die ein negatives $f(x)$ geben, gesondert behandelt werden. Zur Erörterung dieses Umstandes diene z. B. die vieldeutige Function $\sqrt[m]{x}$, die wir durch $((\sqrt[m]{x}))$ bezeichnen, wenn sie noch in ihrer

ganzen Vieldeutigkeit ausgedrückt werden soll; hingegen einfach durch $\sqrt[m]{x}$, wenn nur *ein* reeller Werth von x gemeint ist, der, zur $m$ten Potenz erhoben, x giebt. Dann ist, wie bekannt,

$$((\sqrt[m]{x})) = \left(\cos\frac{2\varrho\pi}{m}+i\sin\frac{2\varrho\pi}{m}\right)\sqrt[m]{x}$$

für ein positives x; hingegen

$$((\sqrt[m]{x})) = \left(\cos\frac{(2\varrho+1)\pi}{m}+i\sin\frac{(2\varrho+1)\pi}{m}\right)\sqrt[m]{-x},$$

wenn x eine reelle negative Gröfse und in diesem wie in jenem Ergebnisse ϱ eine beliebige ganze und positive Zahl, Null mit begriffen, und i die maginäre Einheit ist. Eben so ist allgemein, für alle Werthe von x, welche ein positives $f(x)$ geben,

$$(1.)\quad ((\sqrt[m]{f(x)})) = \left(\cos\frac{2\varrho\pi}{m}+i\sin\frac{2\varrho\pi}{m}\right)\sqrt[m]{(f(x))};$$

für die Werthe von x aber, die ein negatives $f(x)$ geben, ist

$$(1'.)\quad ((\sqrt[m]{f(x)})) = \left(\cos\frac{(2\varrho+1)\pi}{m}+i\sin\frac{(2\varrho+1)\pi}{m}\right)\sqrt[m]{(-f(x))};$$

wo ϱ und i wieder die obigen Bedeutungen haben.

Bezeichnet man auch bei den andern vieldeutigen Functionen die Gesammtheit ihrer Werthe auf gleiche Weise, so erhält man:

$$(2.)\quad ((\log f(x))) = 2\varrho i\pi+\log f(x),$$

$$(2'.)\quad ((\log f(x))) = (2\varrho+1)i\pi+\log[-f(x)]:$$

das Eine für Werthe von x, die $f(x)$ positiv machen, das Andere für die x, für welche $f(x)$ negativ ist. Überall haben ϱ und i die obigen Bedeutungen.

Ferner ist

$$(3.)\quad ((\text{arc}\sin f(x))) = \varrho\pi+(-1)^\varrho\,\text{arc}\sin f(x),$$

$$(3'.)\quad ((\text{arc}\sin f(x))) = \varrho\pi-(-1)^\varrho\,\text{arc}\sin[-f(x)]:$$

das Erste oder das Zweite, je nachdem $f(x)$ positiv oder negativ wird, und wo ϱ ebenfalls jede ganze positive Zahl und auch Null sein kann. In dem einen und dem andern Ausdruck hat man rechts den kleinsten positiven Bogen zu setzen, dessen Sinus $f(x)$ oder $-f(x)$ ist.

Endlich ist.

$$(4.)\quad ((\text{arc}\tan f(x))) = \varrho\pi+\text{arc}\tan f(x),$$

$$(4'.)\quad ((\text{arc}\tan f(x))) = \varrho\pi-\text{arc}\tan[-f(x)]:$$

das Erste für die Werthe von x, die $f(x)$ positiv, das zweite für die x, die $f(x)$ negativ machen; ϱ ist wieder jede ganze und positive Zahl, Null mitbe-

griffen, und für arc tang rechts ist der *kleinste* positive Bogen zu setzen, dessen trigonometrische Tangente $f(x)$ oder $-f(x)$ ist.

Die gegenseitige Vergleichung der beiden Ergebnisse (3. und 3'.) mit denen (4. und 4'.) zeigt, dafs die Ableitung eines bestimmten Integrals aus der unbestimmten Integralfunction minder leicht ist, wenn das Integral einen arc sin, als wenn es einen arc tang enthält; daher ist es gut, ehe man zur Ausmittelung eines bestimmten Integrals schreitet, jeden in der unbestimmten Integralfunction vorkommenden arc sin mittels der Umstellungsgleichung

$$\text{arc sin}\,\lambda = \text{arc tang}\,\frac{\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)}}$$

erst auf einen arc tang zu bringen.

II.

Da es blofs die Kreisfunctionen sind, die durch ihre Vieldeutigkeit bei der Ausmittelung eines bestimmten Integralwerthes Schwierigkeiten machen können, so theilen wir nur einen auf *diese* Function sich beziehenden Satz mit.

Wir setzen die unbestimmte Integralgleichung

$$(5.)\qquad \int \varphi(x)\,dx = \text{arc tang}\,f(x);$$

wo $\varphi(x)dx$ das Differential von arc tang $f(x)$ ist; dann hat besagter Satz die Bestimmung von u aus der Gleichung

$$(6.)\qquad u = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

zum Zwecke; wo die reellen Integrationsgrenzen a und b die positive Differenz $b-a$ haben.

Wir haben hier den vieldeutigen Ausdruck rechts in (5.) durch die Ausdrücke (4. und 4'.) zu ersetzen; wobei wir für die Änderung des Zeichens von $f(x)$, während x die Werthe von a bis b durchläuft, Folgendes bestimmen. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k$ reelle Zahlengröfsen, die der Gröfse nach aufeinander folgen, die zwischen a und b fallen und die, in $f(x)$ statt x gesetzt, die Übergangsgrenzen der *Zeichen* der Function bestimmen. Nemlich, wenn

$$\alpha_1-a=+,\ \alpha_2-\alpha_1=+,\ \alpha_3-\alpha_2=+,\ \ldots\ \alpha_k-\alpha_{k-1}=+,\ b-\alpha_k=+$$

ist, so sollen die Werthe der Function $f(x)$ von $x=a$ bis $x=\alpha_1$ ein bestimmtes Vorzeichen, von $x=\alpha_1$ bis $x=\alpha_2$ das entgegengesetzte, von $x=\alpha_2$ bis $x=\alpha_3$ wieder das vorhergehende, von $x=\alpha_3$ bis $x=\alpha_4$ wiederum das zweite u. s. w. bekommen. Wird bei dieser Voraussetzung die Gleichung (6.)

folgendermafsen gestellt:

$$u=\int_a^{\alpha_1}\varphi(x)\,dx+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varphi(x)\,dx+\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\varphi(x)\,dx+\ldots\int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k}\varphi(x)\,dx+\int_{\alpha_k}^{b}\varphi(x)\,dx,$$

und beachtet man, dafs die zu ermittelnde Gröfse u nur insofern Gegenstand einer Bestimmung sein kann, als die Differentialfunctionen $\varphi(x)\omega$ (wo ω eine unendlichklein werdende Gröfse ist) beim stufenweisen Übergange von $x=a$ bis $x=b$ mittels des constanten, unendlichklein werdenden Zuwachses ω beständig unendlichklein werdend *bleibt:* so kann die letzte Gleichung auch wie folgt aufgestellt werden:

$$u=\int_{a+\omega}^{\alpha_1-\omega}\varphi(x)\,dx+\int_{\alpha_1+\omega}^{\alpha_2-\omega}\varphi(x)\,dx+\int_{\alpha_2+\omega}^{\alpha_3-\omega}\varphi(x)\,dx+\ldots.$$
$$\ldots.+\int_{\alpha_{k-1}+\omega}^{\alpha_k-\omega}\varphi(x)\,dx+\int_{\alpha_k+\omega}^{b-\omega}\varphi(x)\,dx.$$

Wenn nun die Function $f(x)$ innerhalb der Werthe a und α_1 von x positive Werthe annimmt, so gelangt man, mit Zuziehung der Gleichung (*A.*) und der Ausdrücke (4. und 4'.), zu folgender Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned}u=&\{\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_1-\omega)-\operatorname{arc\,tang}f(a+\omega)\}\\&\quad+\{-\operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_2-\omega)]+\operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_1+\omega)]\}\\&+\{\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_3-\omega)-\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_2+\omega)\}\\&\quad+\{-\operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_4-\omega)]+\operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_3+\omega)]\}\\&+\{\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_5-\omega)-\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_4+\omega)\}\\&\quad+\{-\operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_6-\omega)]+\operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_5+\omega)]\}\\&+\text{u. s. w.};\end{aligned}$$

wo ein Ausdruck rechterhand, von der Form $\operatorname{arc\,tang}\lambda$, den kleinsten positiven Bogen bezeichnet, dessen Tangente der positiven Gröfse λ gleich ist. Aus diesem Grunde sind zwei Ausdrücke wie

$$\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_{2n+1}-\omega),\qquad \operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_{2n+1}+\omega)]$$

und auch die zwei

$$\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_{2n}+\omega),\qquad \operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_{2n}-\omega)]$$

verschieden: jedes Paar von einander nur um eine unendlichklein werdende Gröfse; so dafs sich also unter dieser Annahme folgende Bestimmungsgleichung ergiebt:

$$u=(-1)^k\operatorname{arc\,tang}[(-1)^k f(b-\omega)]-\operatorname{arc\,tang}f(a+\omega)$$
$$+2\left\{\begin{matrix}+\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_1-\omega)-\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_2+\omega)+\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_3-\omega)\\-\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_4+\omega)+\ldots.\;(-1)^{k-1}\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_k+(-1)^k\omega)\end{matrix}\right\};$$

wo, wenn irgend ein Glied rechterhand durch arc tang λ dargestellt wird, λ jedesmal positiv ist, und so ein Glied dann jedesmal durch den kleinsten positiven Bogen zu ersetzen ist, der zur Tangente die positive Gröfse λ hat.

Wird im Gegentheil festgestellt, dafs die Function von $x=a$ bis $x=\alpha_1$ negativ sein soll, so erhält man zunächst:

$$\begin{aligned} u = & \{-\operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_1-\omega)]+\operatorname{arc\,tang}[-f(a+\omega)]\} \\ & \quad +\{\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_2-\omega)-\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_1+\omega)\} \\ & +\{-\operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_3-\omega)]+\operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_2+\omega)]\} \\ & \quad +\{\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_4-\omega)-\operatorname{arc\,tang}f(\rho_3+\omega)\} \\ & +\{-\operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_5-\omega)]+\operatorname{arc\,tang}[-f(\alpha_4+\omega)]\} \\ & \quad +\{\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_6-\omega)-\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_5+\omega)\} \\ & + \text{u. s. w.,} \end{aligned}$$

und aus ähnlichem Grunde wie oben:

$$\begin{aligned} u = & (-1)^{k-1}\operatorname{arc\,tang}[(-1)^{k-1}f(b-\omega)]+\operatorname{arc\,tang}[-f(a+\omega)] \\ & -2\left\{\begin{array}{l} +\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_1+\omega)-\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_2-\omega)+\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_3+\omega) \\ -\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_4-\omega)+\dots\dots(-1)^{k-1}\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_k+(-1)^{k-1}\omega) \end{array}\right\}; \end{aligned}$$

wo, wie vorhin, ein Ausdruck rechts, von der Form arc tang λ, den kleinsten positiven Bogen bedeutet, dessen Tangente die immer positive Gröfse λ ist.

Dieses vorausgeschickt, ergiebt sich, unter Zugrundelegung der Gleichung (5.), folgender Doppelsatz:

Wenn die in (5.) durch $f(x)$ dargestellte Function von x positive Werthe von $x=a$ bis $x=\alpha_1$, negative von $x=\alpha_1$ bis $x=\alpha_2$, wieder positive von $x=\alpha_2$ bis $x=\alpha_3$ u. s. w. hat und

$\alpha_1-a=+$, $\alpha_2-\alpha_1=+$, $\alpha_3-\alpha_2=+$, ... $\alpha_k-\alpha_{k-1}=+$, $b-\alpha_k=+$ ***ist: so ist***

$$\text{(I.)}\quad \int_a^b \varphi(x)dx = (-1)^k\operatorname{arc\,tang}[(-1)^k f(b-\omega)]-\operatorname{arc\,tang}f(a+\omega) \\ +2\left\{\begin{array}{l} +\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_1-\omega)-\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_2+\omega)+\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_3-\omega) \\ -\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_4+\omega)+\dots\dots(-1)^{k-1}\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_k+(-1)^k\omega) \end{array}\right\};$$

hingegen, wenn $f(x)$ von $x=a$ bis $x=\alpha_1$ negative, von $x=\alpha_1$ bis $x=\alpha_2$ positive, von $x=\alpha_2$ bis $x=\alpha_3$ wiederum negative Werthe u. s. w. hat, so ist

$$\text{(II.)}\quad \int_a^b \varphi(x)dx = (-1)^{k-1}\operatorname{arc\,tang}[(-1)^{k-1}f(b-\omega)]+\operatorname{arc\,tang}[-f(a+\omega)] \\ -2\left\{\begin{array}{l} +\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_1+\omega)-\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_2-\omega)+\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_3+\omega) \\ -\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_4-\omega)+\dots\dots(-1)^{k-1}\operatorname{arc\,tang}f(\alpha_k+(-1)^{k-1}\omega) \end{array}\right\}.$$

Bei diesem Doppelsatze ist vorausgesetzt, dafs $\omega\varphi(x)$ für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$ unendlichklein werdend bleibe, wenn die unendlichklein

werdende Gröfse ω den Unterschied zweier benachbarten Werthe von x vorstellt; ferner stellt ein Ausdruck von der Form $\text{arc tang}\,\lambda$, rechts vom Gleichheitszeichen, den kleinsten positiven Kreisbogen vom Halbmesser 1 dar, dessen trigonometrische Tangente die positive Gröfse λ ist.

III.

Zur Erläuterung der Sätze in (I. und II.) wollen wir den besondern Fall

$$(\alpha.)\qquad u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\,dx$$

annehmen. Durch Zerlegung erhält man

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x\sqrt{3}+x^2}$$

und, integrirt,

$$(\beta.)\qquad \int \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\,dx = \text{arc tang}(2x-\sqrt{3}) + \text{arc tang}(2x+\sqrt{3}),$$

oder auch

$$(\gamma.)\qquad \int \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\,dx = \text{arc tang}\,\frac{x}{1-x^2}.$$

1) Für den Werth von u aus der Gleichung (α.) ist, mittels des Ergebnisses (γ.),

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

Da ferner die Integrationsgrenzen $-\infty$ und $+\infty$ sind und die Function $f(x)$ bei $x=-1$ und $x=0$, so wie bei $x=+1$ das Zeichen ändert, so erhält man durch Vergleichung mit dem allgemeinen Falle:

$$a = -\infty,\quad \alpha_1 = -1,\quad \alpha_2 = 0,\quad \alpha_3 = +1,\quad b = +\infty;$$

wo also $k=3$ ist. Da endlich die Function $f(x)$ von $x=a$ bis $x=\alpha_1$ positiv ist, so dient die Gleichung in (I.) zur Bestimmung von u, oder des bestimmten Integrals (α.). Sie giebt:

$$u = -\text{arc tang}\,\frac{1}{\infty} - \text{arc tang}\,\frac{1}{\infty}$$
$$+2\left\{\text{arc tang}\,\frac{1+\omega}{\omega(2+\omega)} - \text{arc tang}\,\frac{\omega}{1-\omega^2} + \text{arc tang}\,\frac{1-\omega}{\omega(2-\omega)}\right\};$$

wo ω unendlich klein werdend und positiv ist: folglich erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\,dx = 2\pi.$$

2) Der Ausdruck rechterhand in (β.) kann ebenfalls zur Bestimmung von u dienen. Sieht man zuerst auf das Glied $\text{arc tang}(2x-\sqrt{3})$ und erwägt, dafs die Integrationsgrenzen $-\infty$ und $+\infty$ sind, so erhält man:

$$a = -\infty,\quad \alpha_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad b = +\infty,$$

wo demnach $k=1$ ist; und da die Function $f(x)=2x-\sqrt{3}$ von $x=\alpha$ bis $x=\alpha_1$ negativ bleibt, so kommt hier die Gleichung (II.) zur Anwendung und man erhält

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1-x\sqrt{3}+x^2} = \text{arc tang}\,\infty+\text{arc tang}\,\infty-2\,\text{arc tang}\,2\omega \quad \text{oder}$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1-x\sqrt{3}+x^2} = \pi.$$

Behandelt man ähnlich das zweite Glied des Ausdrucks rechterhand in (β.), so findet sich

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1-x\sqrt{3}+x^2} = \pi.$$

Addirt man dieses zum Vorhergehenden, so findet sich wie oben:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4} = 2\pi.$$

3) Zerlegt man endlich das bestimmte Integral (α.) in eine Summe zweier andern, von welchen die Integrationsgrenzen des einen $-\infty$ und 0, die des andern 0 und $+\infty$ sind, und ersetzt hierauf im erstern die Integrationsvariable x durch $-x$, so ergiebt sich

$$u = 2\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}dx.$$

Zerlegt man dieses bestimmte Integral in eine Summe zweier, das eine innerhalb der Grenzen 0 und 1, das andere innerhalb der Grenzen 1 und ∞, und ersetzt im letztern die Integrationsvariable x durch $\frac{1}{x}$, so erhält man

$$u = 4\int_0^{1}\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}dx.$$

Legt man nun die unbestimmte Integralfunction in (γ.) zum Grunde, nemlich

$$\text{arc tang}\frac{x}{1-x^2},$$

und erwägt, dafs nunmehr $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und 1 beständig positiv bleibt, so ist die Gleichung (I.) für die Annahme $k=0$ anzuwenden, was

$$\int_0^{1}\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}dx = \text{arc tang}\frac{1-\omega}{\omega(2-\omega)}-\text{arc tang}\frac{\omega}{1-\omega^2} = \tfrac{1}{2}\pi$$

giebt, und mit 4 multiplicirt erhält man, wie nach beiden obigen Arten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}dx = 2\pi.$$

Zürich, im October 1847.

18.

Über die bestimmten Integrale mit imaginären Grenzen.

(Von Herrn Dr. *Dienger* zu Sinsheim bei Heidelberg.)

Die Theorie der bestimmten Integrale ist in ihrer Anwendung sehr fruchtbar, und es ist daher wichtig, sie genau zu erforschen. Im Folgenden sollen einige Sätze zur Beurtheilung vorgelegt werden, die sich auf die imaginären Grenzen solcher Integrale beziehen und in denen versucht worden ist, den Integralen einen bestimmten und einer folgereichen Anwendung fähigen Sinn zu unterlegen.

§. 1.

Die Gröfse $a+bi$ soll unendlich klein heifsen, wenn sowohl a als b unendlich klein sind. Ist von a und b Eins ein unendlich Kleines von anderer Ordnung, als das andere, so soll $a+bi$ ein unendlich Kleines von der Ordnung n heifsen, wenn die mindeste Ordnung für a oder b die Ordnung n ist. Sind demnach a und b, oder Eins von ihnen, unendlich kleine Gröfsen von der ersten Ordnung, so ist $a+bi$ ein unendlich Kleines, ebenfalls von der ersten Ordnung. Die Function $f(a+bi)$ soll eine unendlich kleine Gröfse von der $n$ten Ordnung sein, wenn

$$\frac{f(a+bi)^r}{(a+bi)^n}$$

unendlich klein ist für $n<r$, unendlich grofs für $n>r$, und nicht unendlich grofs für $n=r$; vorausgesetzt, dafs $a+bi$ ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung sei.

Ist r eine unendlich kleine Gröfse erster Ordnung, so ist

$$r(\cos t+i\sin t)$$

ebenfalls eine unendlich kleine Gröfse erster Ordnung, da $\cos t$ und $\sin t$ immer zwischen 0 und 1 liegen und nie zugleich verschwinden. Demnach wird $f(r(\cos t+i\sin t))$ zu einem unendlich Kleinen $k$ter Ordnung, wenn in

$$(1.)\quad \frac{f(r(\cos t+i\sin t))}{r^n(\cos nt+i\sin nt)}$$

(r von der ersten Ordnung vorausgesetzt) die Gröfse (1.) unendlich klein (oder Null) ist, für $n<k$ unendlich grofs für $n>k$, und nicht unendlich

grofs für $n=k$. Die Gröfse (1.) ist aber gleich

$$(2.)\quad \frac{f[r(\cos t+i\sin t)]}{r^n}\cos nt - i\frac{f[r(\cos t+i\sin t)]}{r^n}\sin nt,$$

und da $\cos nt$, $\sin nt$ immer endlich sind, was auch n und t sein mögen, auch beide nicht zugleich verschwinden, so wird

$$f(r(\cos t+i\sin t))$$

eine unendlich kleine Gröfse $k$ter Ordnung sein, wenn man r unendlich klein erster Ordnung annimmt; ferner

$$(3.)\quad \frac{(r(\cos t+i\sin t))}{r^n}$$

unendlich klein für $n<k$, unendlich grofs für $n>k$ und nicht unendlich grofs für $n=k$.

Eine imaginäre Function $R(\cos T+i\sin T)$ ist unendlich klein, oder grofs, mit R zugleich. In dem Falle

$$f(r(\cos t+i\sin t)) = R(\cos T+i\sin T)$$

ist diese Function von gleicher Ordnung mit R.

Bezeichnet man allgemein $f(r(\cos t+i\sin t))$ durch $F(r)$, so ist $F(r)$ ein unendlich Kleines $k$ter Ordnung, wenn $\frac{F(r)}{r^n}$ unendlich klein ist für $n<k$, unendlich grofs für $n>k$ und nicht unendlich grofs für $n=k$.

Ob demnach $F(r)$ continuirlich im engsten Sinne sei, hangt von dem Differentialquotienten

$$(4.)\quad \frac{\partial .F(r)}{\partial (r)}$$

ab. So lange derselbe endlich bleibt, was auch t sei, so lange ist $F(r)$ continuirlich, im engern Sinne.

Für die Bestimmung von $\frac{\partial .F(r)}{\partial r}$ ist

$$\frac{\partial .F(r)}{\partial r} = \frac{\partial .f(r(\cos t+i\sin t))}{\partial (r(\cos t+i\sin t))}(\cos t+i\sin t) = f'(r(\cos t+i\sin t)).(\cos t+i\sin t).$$

Die Bestimmung der Continuität im engsten Sinne hangt also von $f'(r(\cos t+i\sin t))$ $\cdot(\cos t+i\sin t)$ oder von $f'(r(\cos t+i\sin t))$ ab, und es soll $f'(r(\cos t+i\sin t))$ der Differentialquotient von $f(r(\cos t+i\sin t))$ heifsen. Seine Bildung ist der des Differentialquotienten von reellen Formen analog. Die Gröfse (4.) ist aber immer endlich, so lange (was auch t sei)

$$\frac{\partial^2 F(r)}{\partial r\,\partial t}$$

endlich ist; denn in diesem Falle ist (4.) continuirlich im engern Sinne, also endlich.

Es ist

$$(5.)\quad \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r \partial t} = -r\sin 2t f''[r(\cos t + i\sin t)] - \sin t f'[r(\cos t + i\sin t)]$$
$$+ i\{r\cos 2t f''[r(\cos t + i\sin t)] + \cos t f'[r(\cos t + i\sin t)]\}.$$

Übrigens ist die Untersuchung von

$$(6.)\quad f'[\cos t + i\sin t)]$$

zureichend. Ist für *alle* Werthe von t diese Gröſse endlich, wenn r zwischen a und $b > a$ liegt, so ist für *alle* Werthe von t die Function $f[r(\cos t + i\sin t)]$ continuirlich im engern Sinne für jedes r zwischen a und b; und zwar, wenn $f'(r(\cos t + i\sin t))$ noch endlich ist für a und b, so ist es $f(r(\cos t + i\sin t))$ für $r = a$ und $r = b + \varepsilon$, wo ε eine unendlich kleine Gröſse ist. Ist aber $f'(r(\cos t + i\sin t))$ nicht für *alle* Werthe von t endlich, so ist auch die Function $f(r(\cos t + i\sin t))$ nicht für alle Werthe von t continuirlich, im engern Sinne.

§. 2.

Die Function $f(r(\cos t + i\sin t))$ soll auch hier das Integral von $f'(r(\cos t + i\sin t))$ heiſsen und wird also durch

$$\int f'(r(\cos t + i\sin t))\,\partial(r\cos t + i\sin t))$$

zu bezeichnen sein. Setzt man $r(\cos t + i\sin t) = x$, so findet sich

$$f(x) = \int f'(x)\,\partial x$$

ganz nach bekannten Formeln gebildet, nur daſs hier x eine imaginäre Gröſse ist. Es ist

$$\frac{\partial . F(r)}{\partial r} = f'(r(\cos t + i\sin t)).(\cos t + i\sin t), \text{ also}$$
$$F(r) = \int f'(r(\cos t + i\sin t)).(\cos t + i\sin t)\,\partial r,$$

wenn man die Constante mit einbegreift; daher ist

$$\int f'(r(\cos t + i\sin t))\,\partial.(r(\cos t + i\sin t)) = (\cos t + i\sin t))\int f'(r(\cos t + i\sin t))\,\partial r,$$

oder allgemeiner:

$$(7.)\quad \int \varphi(r(\cos t + i\sin t))\,\partial.(r(\cos t + i\sin t))$$
$$= (\cos t + i\sin t))\int \varphi(r(\cos t + i\sin t))\,\partial r.$$

Da die Seite rechts ein Integral in Bezug auf eine reelle Gröſse ist, so kann man, was sie betrifft, von einem bestimmten Integrale sprechen. Was auch t sei, behält demnach

$$(\cos t + i\sin t)\int_a^b \varphi(r(\cos t + i\sin t))\,\partial r$$

einen bestimmten Werth. Schreibt man für die Seite links von (7.)

$$\int \varphi(x)\,\partial x,$$

so ist für $r=a$, $x=a(\cos t+i\sin t)$, und für $r=b$, $x=b(\cos t+i\sin t)$, folglich ist

$$(8.)\quad \int_{a(\cos t+i\sin t)}^{b(\cos t+i\sin t)}\varphi(x)\,\partial x = (\cos t+i\sin t)\int_a^b \varphi(r(\cos t+i\sin t))\,\partial r;$$

daher ist das Integral $\int_{a(\cos t+i\sin t)}^{b(\cos t+i\sin t)}\varphi(x)\,\partial x$ die Summe der Elemente

$$(9.)\quad (\cos t+i\sin t)[\varepsilon\varphi\{a(\cos t+i\sin t)\}+\varepsilon\varphi\{(a+\varepsilon)(\cos t+i\sin t)\}+\ldots$$
$$\ldots+\varepsilon\varphi\{(b-\varepsilon)(\cos t+i\sin t)\}];$$

wo ε unendlich klein ist.

Die Gröfse t hat hier einen bestimmten Werth und es wird vorausgesetzt, dafs alle Elemente (9.) endlich oder unendlich klein seien. Damit also das Integral $\int_{a(\cos t+i\sin t)}^{b(\cos t+i\sin t)}\varphi(x)\,\partial x$ eine Bedeutung habe, mufs die Gröfse $\varphi[r(\cos t+i\sin t)]$ von $r=a$ bis $r=b-\varepsilon$ endlich sein.

§. 3.

Ganz wie oben erhält man

$$\frac{\partial F(r)}{\partial t} = f'(r(\cos t+i\sin t))r(-\sin t+i\cos t),$$
$$F(r) = r\int f'(r(\cos t+i\sin t))(-\sin t+i\cos t)\,\partial t,$$

also auch für $x=r(\cos t+i\sin t)$:

$$(10.)\quad \int\varphi(x)\,\partial x = r\int\varphi(r(\cos t+i\sin t))(-\sin t+i\cos t)\,\partial t.$$

Für $t=\alpha$ ist $x=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$; für $t=\beta$ ist $x=r(\cos\beta+i\sin\beta)$, folglich

$$(11.)\quad \int_{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}^{r(\cos\beta+i\sin\beta)}\varphi(x)\,\partial x = r\int_\alpha^\beta\varphi(r(\cos t+i\sin t))(-\sin t+i\cos t)\,\partial t.$$

Das bestimmte Integral rechts in der Gleichung (11.) ist also gleich der Summe der Elemente, die man erhält, wenn man in

$$r\varepsilon\varphi[r(\cos k+i\sin k)](-\sin k+i\cos k)$$

$k=\alpha,\ \alpha+\varepsilon,\ \alpha+2\varepsilon,\ \ldots.\ \beta-\varepsilon$ setzt, wo ε unendlich klein ist; vorausgesetzt, dafs keines dieser Elemente unendlich grofs sei; unter welcher Bedingung allein das bestimmte Integral eine Bedeutung hat.

§. 4.

Auf gleiche Weise findet sich

$$\frac{\partial^2 F(r)}{\partial r\,\partial t} = rf''(r(\cos t+i\sin t))(-\sin 2t+i\cos 2t)$$
$$+f'(r(\cos t+i\sin t))(-\sin t+i\cos t),$$

woraus sich

$$(12.)\int_{a(\cos\alpha+i\sin\alpha)}^{b(\cos\beta+i\sin\beta)}\varphi(x)\partial x=\int_a^b\int_\alpha^\beta r\varphi'[r(\cos t+i\sin t)](-\sin 2t+i\cos 2t)\partial r\,\partial t$$
$$+\int_a^b\int_\alpha^\beta\varphi[r(\cos t+i\sin t)](-\sin t+i\cos t)\partial r\,\partial t$$

ergiebt, wenn man wieder voraussetzt, dafs keines der einzelnen Elemente der Integrale unendlich grofs werde.

Die Ausdrücke (8., 11. und 12.) sind für unsern Zweck die Hauptformeln, welche bald ein wenig weiter ausgedehnt werden sollen.

Eine Andeutung zu Anwendungen mág hier nicht am unrechten Orte sein. Es ist bekanntlich

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,$$

was auch x sei, reell oder imaginär.

Demnach ist

$$\int e^x\partial x = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+C \text{ und}$$

$$\int_0^{a(\cos\alpha+i\sin\alpha)}e^x\partial x = a(\cos\alpha+i\sin\alpha)+\frac{a^2}{2!}(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)+\ldots$$

oder

$$e^{a(\cos\alpha+i\sin\alpha)}-1 = a\cos+\frac{a^2}{2!}\cos 2\alpha+\frac{a^3}{3!}\cos 3\alpha+\ldots$$
$$+i\left(a\sin\alpha+\frac{a^2}{2!}\sin 2\alpha+\ldots\right),$$

woraus

$$a\cos\alpha+\frac{a^2}{2!}\cos 2\alpha+\ldots = e^{a\cos\alpha}\cos(a\sin\alpha)-1,$$
$$a\sin\alpha+\frac{a^2}{2!}\sin 2\alpha+\ldots = e^{a\cos\alpha}\sin(a\sin\alpha)-1$$

folgt. Ähnliche Resultate lassen sich leicht ableiten; was weiter auszuführen hier nicht der Ort ist, da die Ausführung aufser unserer Absicht liegt.

§. 5.

Läfst sich die Function $\varphi[r(\cos t+i\sin t)]$ in der Form

$$\chi(r,t)+i\lambda(r,t) = R[\cos T+i\sin T]$$

darstellen, so ist in (8.)

$$\int_{a(\cos t+i\sin t)}^{b(\cos t+i\sin t)}\varphi(x)\partial x = (\cos(t)+i\sin(t))\int_a^b R(\cos T+i\sin T)\partial r$$
$$=\int_a^b R\cos(T+t)\partial r+i\int_a^b R\sin(T+t)\partial r.$$

Ist nun auch $\int_{a(\cos t+i\sin t)}^{b(\cos t+i\sin t)}\varphi(x)\partial x = P+Qi$, so erhält man

$$(13.)\quad P=\int_a^b R\cos(T+t)\partial r,\qquad Q=\int_a^b R\sin(T+t)\partial r.$$

Ist z. B. $\varphi(x)=e^x$, so ergiebt sich

$$R=e^{r\cos t},\quad T=r\sin t,\quad P=e^{b\cos t}\cos(b\sin t)-e^{a\cos t}\cos(a\sin t)\text{ und}$$

$$Q=e^{b\cos t}\sin(b\sin t)-e^{a\cos t}\sin(a\sin t),\text{ also}$$

$$\int_a^b e^{r\cos t}\cos(r\sin t+t)\partial r = e^{b\cos t}\cos(b\sin t)-e^{a\cos t}\cos(a\sin t),$$

$$\int_a^b e^{r\cos t}\sin(r\sin t+t)\partial r = e^{b\cos t}\sin(b\sin t)-e^{a\cos t}\sin(a\sin t);$$

welche Ausdrücke übrigens auch auf anderm Wege gefunden werden können.

Setzt man ferner $\varphi(x)=\cos(x)$, so findet sich

$$R = \tfrac{1}{2}\sqrt{[e^{-2r\sin t}+e^{2r\sin t}+2\cos(2r\cos t)]},$$

$$\cos T = \frac{(e^{-r\sin t}+e^{r\sin t})\cos(r\cos t)}{2R},\qquad \sin T = \frac{(e^{-r\sin t}-e^{r\sin t})\sin(r\cos t)}{2R},$$

und endlich

$$\int_a^b \sqrt{[e^{2r\sin t}+e^{-2r\sin t}+2\cos(2r\cos t)]}.\cos(T+t)\partial r$$

$$=(e^{-b\sin t}+e^{b\sin t})\sin(b\cos t)-(e^{-a\sin t}+e^{a\sin t})\sin(a\cos t)\text{ und}$$

$$\int_a^b \sqrt{[e^{2r\sin t}+e^{-2r\sin t}+2\cos(2r\cos t)}.\sin(T+t)\partial r$$

$$=(e^{b\sin t}-e^{-b\sin t})\cos(b\cos t)-(e^{a\sin t}-e^{-a\sin t})\cos(a\cos t).$$

§. 6.

Ganz eben so läfst sich die Formel (11.) anwenden. Ist

$$\varphi(r(\cos t+i\sin t)) = R(\cos T+i\sin T),\text{ so ist}$$

$$(14.)\quad \int_{r(\cos\alpha+i\sin\beta)}^{r(\cos\beta+i\sin\beta)}\varphi(x)\partial x = -r\int_\alpha^\beta R\sin(T+t)\partial t + ir\int_\alpha^\beta R\cos(T+t)\partial t.$$

Ist aber $\varphi(r(\cos t+i\sin t)) = P+Qi$, so ergiebt sich

$$(15.)\quad \int_{r(\cos\alpha+i\sin\beta)}^{r(\cos\beta+i\sin\beta)}\varphi(x)\partial x = -r\int_\alpha^\beta (P\sin t+Q\cos t)\partial t + ir\int_\alpha^\beta (P\cos t-Q\sin t)\partial t.$$

Aus den Formeln (14. und 15.) lassen sich einzelne Formeln wieder eben so ableiten wie oben.

Da $\int l(1+x)\partial x = (1+x)l(1+x)-x$ ist, so setze man in (15.) $\varphi(x)=l(1+x)$; dann ist $P=\frac{1}{2}l(1+2r\cos t+r^2)$, $Q=\varphi_t$, wenn $\cos\varphi_t = \frac{1+r\cos t}{\sqrt{(1+2r\cos t+r^2)}}$, $\sin\varphi_t = \frac{r\sin t}{\sqrt{(1+2r\cos t+r^2)}}$. Demnach ist

$$(16.)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta [l(1+2r\cos t+r^2).\sin t+2\varphi_t\cos t]\,\partial t\\
&= -\frac{1+r\cos\beta}{r}\,l(1+2r\cos\beta+r^2)+2\varphi_\beta\sin\beta+2\cos\beta,\\
&\quad+\frac{1+r\cos\alpha}{r}\,l(1+2r\cos\alpha+r^2)-2\varphi_\alpha\sin\alpha-2\cos\alpha;\\
&\int_\alpha^\beta [l(1+2r\cos t+r^2)-2\varphi_t\sin t]\,\partial t\\
&= \frac{\sin\beta}{r}\,l(1+2r\cos\beta+r^2)+2\Big(\frac{1+r\cos\beta}{r}\Big)\varphi_\beta-2\sin\beta\\
&\quad-\frac{\sin\alpha}{r}\,l(1+2r\cos\alpha+r^2)-2\Big(\frac{1+r\cos\alpha}{r}\Big)\varphi_\alpha+2\sin\alpha.
\end{aligned}\right.$$

Hier darf $l(1+2r\cos t+r^2)$ innerhalb der Grenzen der Integration nicht unendlich grofs werden. Setzt man also $\alpha=0$, $\beta=\pi$, so mufs $r^2<1$ sein. Dann findet sich

$$\int_0^\pi [l(1+2r\cos t+r^2).\sin t+2\varphi_t\cos t]\,\partial t = \frac{2}{r}\,l\Big(\frac{1+r}{1-r}\Big)+2\,l(1-r^2)-4,$$

$$\int_0^\pi [l(1+2r\cos t+r^2).\cos t-2\varphi_t\sin t]\,\partial t = 0.$$

Differentiirt man diese Formeln nach r, so lassen sich daraus leicht andere ableiten.

§. 7.

Ist in der Formel (12.):

$$\varphi(r(\cos t+i\sin t)) = R(\cos T+i\sin T) = P+Qi \text{ und}$$
$$\varphi'(r(\cos t+i\sin t)) = R_1(\cos T_1+i\sin T_1) = P_1+Q_1 i,$$

so ergiebt sich eben so

$$\begin{aligned}
(17.)\quad \int_{a(\cos\alpha+i\sin\alpha)}^{b(\cos\beta+i\sin\beta)}\varphi(x)\,\partial x &= -\int_a^b\int_\alpha^\beta [R_1 r\sin(T_1+2t)+R\sin(T+t)]\,\partial r\,\partial t\\
&\quad+i\int_a^b\int_\alpha^\beta [R_1 r\cos(T_1+2t)+R\cos(T+t)]\,\partial r\,\partial t\\
&= -\int_a^b\int_\alpha^\beta [P_1 r\sin 2t+Q_1 r\cos 2t+P\sin t+Q\cos t]\,\partial r\,\partial t\\
&\quad+i\int_a^b\int_\alpha^\beta [P_1 r\cos 2t-Q_1 r\sin 2t+P\cos t-Q\sin t]\,\partial r\,\partial t.
\end{aligned}$$

Für $\varphi(x)=e^x$ ergiebt sich hieraus:

$$e^{b\cos\beta}\cos(b\sin\beta)-e^{a\cos\alpha}\cos(a\sin\alpha) = -\int_a^b\int_\alpha^\beta e^{r\cos t}[r\sin(r\sin t+2t)+\sin(r\sin t+t)]\,\partial r\,\partial t,$$

$$e^{b\cos\beta}\sin(b\sin\beta)-e^{a\cos\alpha}\sin(a\sin\alpha) = \int_a^b\int_\alpha^\beta [r\cos(r\sin t+2t)+\cos(r\sin t+t)]\,e^{r\cos t}\,\partial r\,\partial t.$$

Giebt man den Gröfsen a, b, α, β specielle Werthe, so lassen sich aus den hier entwickelten Formeln leicht neue und merkwürdige Ausdrücke bilden. Diese Entwicklung übergehen wir, da sie einerseits leicht ist, anderseits nicht allgemeine Theoreme liefert. Sinsheim im December 1845.

19.

Zu Dr. Pohls Schrift „Der Electromagnetismus und die Bewegung der Himmelskörper."

(Von Herrn Dr. *Dienger*, Lehrer an der Gewerbschule zu Sinsheim bei Heidelberg.)

In dem bezeichneten Schriftchen hat Herr Professor Dr. *G. F. Pohl* neue und interessante Ansichten über das Wesen der kosmischen Bewegungen mitgetheilt. Wir wollen darauf hier nicht näher eingehen, sondern nur einige mathematische Deductionen, die dazu gehören dürften, beizufügen suchen. Im Übrigen verweisen wir auf die Schrift selbst.

§. 1.

Wir wollen zuerst Das ausführen, worauf am Ende von §. 42. des Buches hingewiesen ist; nemlich die periodische Function ableiten, die den Wechsel der anziehenden und abstofsenden Effecte angiebt. Wir legen die Figur zu §. 40. zu Grunde. Bedeutet $f(t)$ eine noch unbekannte Function der Zeit t, heifst der Winkel Pca hier u, die Linie ac aber r; ist t die Zeit, welche verflofs seit der Himmelskörper von P ausging, bis er in a anlangt, ist endlich ϱ die (rotatorische) Geschwindigkeit in P und $cP = c$: so hat man für die Bewegung im Puncte a, nach den im Buche gegebenen Bedingungen:

$$(1.)\quad \frac{du}{dt} = \frac{\varrho c}{r} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{f(t)}{r^2},$$

während zugleich

$$(2.)\quad r = \frac{b^2}{a + e\cos u}$$

ist, wenn man annimmt, die Bewegung geschehe in einer Ellipse, deren grofse Axe a und deren kleine Axe b ist; nebst $e = \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Setzt man zur Abkürzung $\frac{\varrho c}{b^2} = k$, so ist aus (1. und 2.)

$$(3.)\quad \frac{du}{a + e\cos u} = k\,dt \quad \text{und} \quad kt = \int_0^u \frac{du}{a + e\cos u} = \frac{1}{b}\,\text{arc}\left(\cos = \frac{e + a\cos u}{a + e\cos u}\right).$$

Ferner ist bekanntlich

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\frac{d^2 r}{du^2}\cdot\frac{dt}{du} - \frac{dr}{du}\cdot\frac{d^2 t}{du^2}}{\left(\frac{dt}{du}\right)^3}.$$

Nun ist

$$\frac{dr}{du}=\frac{r\,e\sin u}{a+e\cos u}=\frac{b^2 e\sin u}{(a+e\cos u)^2},\qquad \frac{d^2r}{du^2}=\frac{(a\cos u+e+e\sin^2 u)b^2e}{(a+e\cos u)^3},$$

$$\frac{dt}{du}=\frac{1}{k(a+e\cos u)},\qquad \frac{d^2t}{du^2}=\frac{e\sin u}{k(a+e\cos u)^2}.$$

Setzt man diese Werthe in die zweite Gleichung (1.), so erhält man

$$(4.)\qquad f(t)=\frac{\varrho^2c^2b^2e}{(a+e\cos u)^2}\left(\frac{a\cos u+e}{e\cos u+a}\right);$$

welche Function periodisch ist.

Ferner ist

$$\frac{a\cos u+e}{e\cos u+a}=\cos\left(\frac{\varrho ct}{b}\right),\qquad \cos u=\frac{a.\cos\frac{\varrho ct}{b}-e}{a-e\cos\frac{\varrho ct}{b}},\qquad a+e\cos u=\frac{b^2}{a-e\cos\frac{\varrho ct}{b}},$$

also

$$(5.)\qquad f(t)=\frac{\varrho^2c^2e}{b^2}\left(a-e\cos\frac{\varrho ct}{b}\right)^2\cos\left(\frac{\varrho ct}{b}\right);$$

wodurch die periodische Beschleunigung der Bewegung in der Richtung des Radius vector bestimmt wird.

§. 2.

Fände die Bewegung im ursprünglichen Kreise Statt, so wäre einfach

$$\frac{du}{dt}=\frac{\varrho c}{a}\quad\text{und}\quad u=\frac{\varrho tc}{a}.$$

Demnach wäre die Umlaufszeit des Körpers

$$(6.)\qquad T=\frac{2\pi a}{\varrho c};$$

wo ϱ die Winkelgeschwindigkeit im Puncte P bedeutet. Für den Fall der Ellipse ergiebt sich aus (3.) als Umlaufzeit:

$$(7'.)\qquad T'=\frac{2\pi b}{\varrho c}=\frac{2\pi a}{\varrho c}\cdot\frac{b}{a}=T\frac{b}{a}.$$

Die Umlaufzeit ist also dadurch kürzer geworden, dafs der Körper gezwungen war, sich in einer Ellipse zu bewegen.

Es findet sich ferner

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\frac{dr}{du}}{\frac{dt}{du}}=\frac{\varrho c e\sin u}{a+e\cos u};$$

welches zeigt, dafs in P ($u=0$) die Bewegung nach der Richtung des Radius Null; desgleichen in A ($u=\pi$), dafs sie von P bis A positiv (abstofsend) und von A bis P negativ (anziehend) ist.

§. 3.

Untersucht man die Bewegung in der Ellipse ferner, so findet sich, dafs für $r=a$ die rotatorische (Winkel-) Geschwindigkeit die nämliche ist, welche sie im Kreise gewesen wäre, d. h. in den Endpuncten der kleinen Axe. Die Bewegung nach der Richtung des Radius vector ist periodisch; sie erreicht ihre Maxima, wenn $\frac{d^2r}{dt^2}=0$, d. h. wenn

$$a\cos u+e=0 \quad \text{und} \quad \cos u=-\frac{e}{a}$$

ist. Dies findet also ebenfalls an den Endpuncten der kleinen Axe Statt. Da dort $\sin u=\pm\frac{b}{a}$ ist, so ist die Geschwindigkeit an den Endpuncten der kleinen Axe nach der Richtung des Radius vector:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\varrho c e\sin u}{a+e\cos u}=\pm\frac{\varrho c e}{b}.$$

Die rotatorische Geschwindigkeit ist dort $\frac{\varrho c}{a}$; demnach ist die wirkliche Geschwindigkeit $=\sqrt{\left(\frac{\varrho^2c^2}{a^2}+\frac{\varrho^2c^2e^2}{b^2}\right)}=\varrho c\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{e^2}{b^2}\right)}$.

Im Puncte a ist die ganze Geschwindigkeit des Himmelskörpers:

$$\sqrt{\left(\frac{\varrho^2c^2e^2\sin^2u}{(a+e\cos u)^2}+\frac{\varrho^2c^2}{r^2}\right)}=\varrho c\sqrt{\left(\frac{e^2\sin^2u}{(a+e\cos u)^2}+\frac{(a+e\cos u)^2}{b^4}\right)}$$

$$=\frac{\varrho c}{b^2(a+e\cos u)}\sqrt{[e^2b^4\sin^2u+(a+e\cos u)^4]}.$$

In allen diesen Formeln ist $c=a-e$.

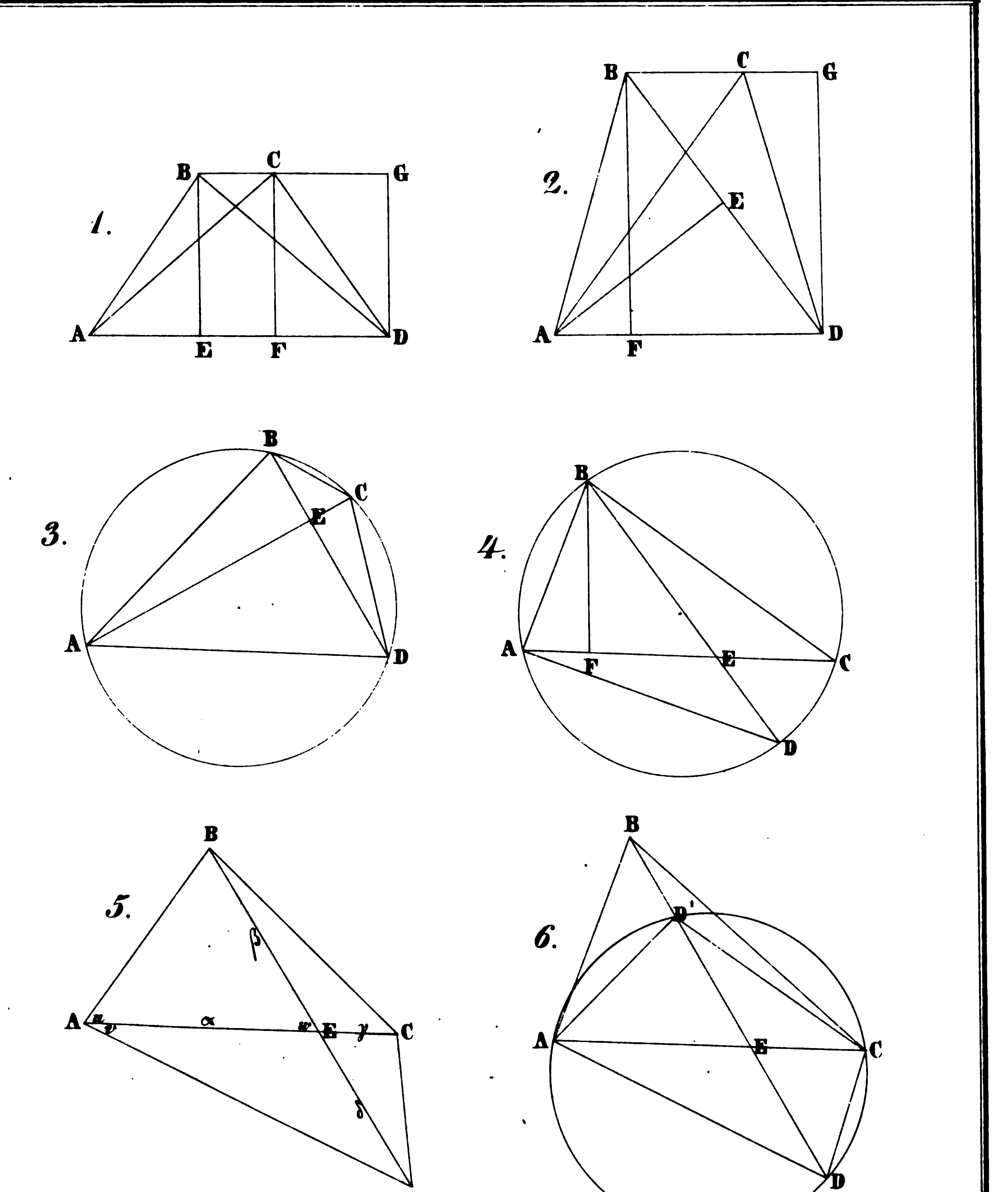
Da hier die umgekehrte Aufgabe gelöset ist, so läfst sich auch leicht die directe lösen, wenn man die gefundene Form von $f(t)$ als bekannt annimmt. Die Maxima der periodischen Beschleunigung der Bewegung nach der Richtung des Radius vector finden Statt für $u=0$ und $u=\pi$, und zwar ein Maximum für $u=0$, ein Minimum für $u=\pi$.

Das Übrige läfst sich ferner leicht finden.

Sinsheim im April 1846.

TAF. I.

C.



1.
A
B
C
D
E
F
G
2.
A
B
C
D
E
F
G
3.
A
B
C
D
E
4.
A
B
C
D
E
F
5.
A
B
C
D
E
α
β
γ
δ
6.
A
B
C
D
D'
E

Crelle, Journal d. Math. Bd 37. Heft 2.

V

δ'

x'

U

x,'

3.

C

δ'

a

d

b

x'

x

A

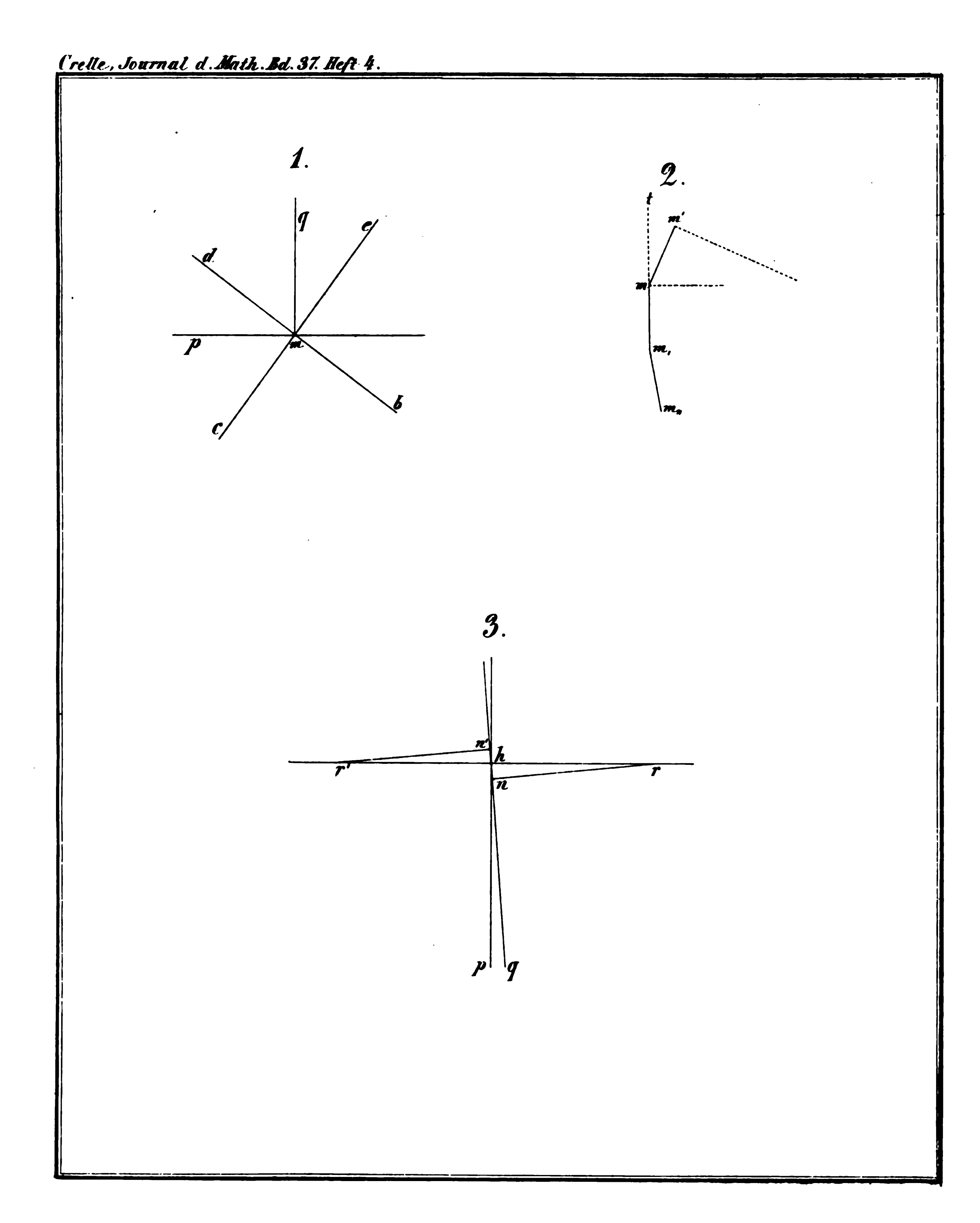
a,

D

b,

g

f


1.
q
e
d
p
m
b
c
2.
t
m'
m
m,
m,,
3.
n'
h
r'
r
n
p
q

